Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach

Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe
Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach
ISSN 2083-8611 Nr 241 · 2015

Informatyka i Ekonometria 3

Joanna Siwek

Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu
Wydział Informatyki i Gospodarki Elektronicznej
Katedra Badań Operacyjnych,
joanna.siwek@ue.poznan.pl

PORTFEL DWUSKŁADNIKOWY – PRZYPADEK WARTOŚCI BIEŻĄCEJ DANEJ JAKO TRÓJKĄTNA LICZBA ROZMYTA

Streszczenie: Artykuł ma na celu przedstawienie właściwości portfela dwuskładnikowego dla przypadku, kiedy nieprecyzyjna wartość bieżąca jest opisana za pomocą trójkątnej liczby rozmytej. Wyznaczone zostaną rozmyta oczekiwana stopa zwrotu z portfela oraz oceny ryzyka niepewności i nieprecyzji obciążających ten portfel. Dzięki temu zostanie opisany wpływ tworzenia portfela złożonego z instrumentów o nieprecyzyjnie wyznaczonej wartości bieżącej na ryzyko stopy zwrotu z portfela. Ponadto zostanie wyjaśniona kwestia, czy zdefiniowane powyżej stopy zwrotu spełniają podstawowy warunek klasycznej teorii portfelowej.

Słowa kluczowe: portfel dwuskładnikowy, wartość bieżąca, zbiory rozmyte.

Wprowadzenie

Wartość bieżącą instrumentu wyznacza się jako zdyskontowaną sumę przyszłych przepływów pieniężnych. Badania z ostatnich 25 lat wskazują na fakt, że podczas wyboru instrumentów finansowych tworzących portfel, należy uwzględnić nie tylko ryzyko niepewności informacji o przyszłych zdarzeniach, ale również nieprecyzję określenia wartości bieżącej.

Ward [1985] definiuje rozmytą wartość bieżącą jako rozmyty przepływ pieniężny. Aksjomatyczna definicja wartości bieżącej została uogólniona na przypadek rozmyty przez Calziego [1990]. Definicja Warda została uogólniona na przypadek rozmytej duracji przez Greenhuta i in. [2005]. Sheen [2005] zaproponował przeniesienie definicji Warda na przypadek rozmytej stopy procentowej, natomiast Buckley [1987, 1992], Gutierrez [1989] oraz Kuchta [2000] i Lesage [2001] omawiają problemy związane z zastosowaniem arytmetyki rozmytej do wyznaczania wartości bieżącej. Huang [2007] uogólnia ponownie definicję Warda dla przypadku, kiedy przyszłe przepływy pieniężne dane są w postaci rozmytej zmiennej losowej. Bardziej ogólna definicja wartości bieżącej została zaproponowana przez Tsao [2005], który zakłada, że przyszły przepływ pieniężny jest rozmytym zbiorem probabilistycznym. Odmienne podejście zostało zaprezentowane w: [Piasecki, 2011a], gdzie nieprecyzyjnie oszacowaną PV oceniono na podstawie bieżącej ceny rynkowej aktywa finansowego. Przyczyn braku precyzji oszacowania dopatrywano się tam w przesłankach behawioralnych.

Piasecki [2011b, 2011c] zauważył, że ze względu na wspomnianą nieprecyzję oraz traktowanie wartości przyszłej jako zmiennej losowej, możliwe jest przedstawienie stopy zwrotu z instrumentu jako zbioru probabilistycznego. Zaproponowany model nie tylko uwzględnia problem nieprecyzji, ale również wskazuje na istnienie niepewności obarczającej instrument.

Celem artykułu jest opis portfela dwuskładnikowego, uwzględniającego nieprecyzję wyznaczenia wartości bieżącej. Poniżej zaprezentowano teoretyczny model portfela dwuskładnikowego, uwzględniającego niepewność i nieprecyzję informacji. Wartość bieżąca traktowana jest tu jako trójkątna liczba rozmyta. Następnie przedstawiono metody obliczania ryzyka dla tak wprowadzonego modelu oraz dokonano analizy uzyskanych wyników. Podjęto również próbę weryfikacji zależności Markowitza dla zaproponowanego modelu stopy zwrotu. W ostatniej części podano przykład numeryczny, mający na celu ilustrację właściwości tak powstałego portfela.

1. Elementy teorii liczb rozmytych

Rozpocznijmy od wprowadzenia definicji liczby rozmytej. Dubois i Prade [1980] definiują liczbę rozmytą jako taki podzbiór rozmyty $\mathcal{R}$ prostej rzeczywistej, który jest określony za pomocą swej funkcji przynależności $\mu_{\mathcal{R}}: \mathbb{R} \to [0,1]$, spełniającej warunki:

– $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$x \leq y \leq z \Longrightarrow \mu_{\mathcal{R}}(y) \geq \min\left(\mu_{\mathcal{R}}(x), \mu_{\mathcal{R}}(z)\right) \tag{1}$$

– $\exists x_0 \in \mathbb{R}: \mu_{\mathcal{R}}(x_0) = 1$ (2)

Zgodnie z zasadą rozszerzenia Zadeha (1965) suma

$$\mathcal{R} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{Q} \tag{3}$$

liczb rozmytych $\mathcal{P}$ i $\mathcal{Q}$ jest liczbą rozmytą reprezentowaną przez swą funkcję przynależności:

$$\mu_{\mathcal{R}}(z) = sup_x\{\min\{\mu_{\mathcal{P}}(x), \mu_{\mathcal{Q}}(z-x)\}\} \tag{4}$$

Podobnie iloczyn

$$\mathcal{R} = \gamma \cdot \mathcal{P} \tag{5}$$

liczby rzeczywistej $\gamma \neq 0$ i liczby rozmytej $\mathcal{P}$ jest liczbą rozmytą reprezentowaną przez swą funkcję przynależności

$$\mu_{\mathcal{R}}(x) = \mu_{\mathcal{P}}\left(\frac{x}{\gamma}\right) \tag{6}$$

Każda z liczb rozmytych jest obrazem nieprecyzyjnego oszacowania rozważanej wartości rzeczywistej. Rozważając pojęcie nieprecyzji, możemy za: [Klir, 1993] wyróżnić niejednoznaczność informacji oraz nierozróżnialność informacji.

Niejednoznaczność informacji interpretujemy jako brak jednoznacznego wyróżnienia pomiędzy wieloma wskazanymi alternatywami. Niejednoznaczność ta zostanie tutaj scharakteryzowana za pomocą miary energii zastosowanej w: [Piasecki, 2011b]. Dla dowolnej liczby rozmytej $\mathcal{R}$ miara ta jest równa wartości:

$$\delta = \lim_{y\to+\infty}\frac{\int_{-y}^{y}\mu_{\mathcal{R}}(x)dx}{1+\int_{-y}^{y}\mu_{\mathcal{R}}(x)dx} \tag{7}$$

Niewyraźność informacji to brak jednoznacznego rozróżnienia pomiędzy daną informacją i jej zaprzeczeniem. Niewyraźność ta zostanie scharakteryzowana za pomocą miary entropii zastosowanej w: [Piasecki, 2011b, 2011c]. Dla dowolnej liczby rozmytej $\mathcal{R}$ miara ta jest równa wartości:

$$\mathcal{E} = \lim_{y\to+\infty}\frac{\int_{-y}^{y}min\{\mu_{\mathcal{R}}(x),1-\mu_{\mathcal{R}}(x)\}dx}{1+\int_{-y}^{y}min\{\mu_{\mathcal{R}}(x),1-\mu_{\mathcal{R}}(x)\}dx} \tag{8}$$

Szczególnym przypadkiem liczby rozmytej jest trójkątna liczba rozmyta. Dla dowolnych $a \le b \le c$ trójkątna liczba rozmyta $T(a,b,c)$ jest zdefiniowana przez swą funkcję przynależności $\mu(\cdot\,|a,b,c)$: $\mathbb{R} \to [0,1]$, określoną następująco:

$$\mu(x|a,b,c) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, dla\ a \le x < b \\ 1, dla\ x = b \\ \frac{x-c}{b-c}, dla\ b < x \le c \end{cases} \tag{9}$$

Zgodnie z zasadą rozszerzalności Zadeha, suma dowolnych trójkątnych liczb rozmytych $T(a_1,b_1,c_1)$ oraz $T(a_2,b_2,c_2)$ jest liczbą trójkątną:

$$T(a_1+a_2, b_1+b_2, c_1+c_2) = T(a_1,b_1,c_1) \oplus T(a_2,b_2,c_2) \tag{10}$$

2. Stopa zwrotu z instrumentu finansowego

Zaproponowany przez Piaseckiego [2011b] model nieprecyzyjnej stopy zwrotu opiera się na następujących założeniach:

– stopa zwrotu
$$r_t = r(V_0, V_t) \tag{11}$$
jest malejącą funkcją wartości początkowej V_0 i rosnącą funkcją wartości przyszłej V_t,
– wartość przyszła jest zmienną losową $\tilde{V}_t\colon \Omega = \{\omega\} \to \mathbb{R}$,
– wartość bieżąca jest reprezentowana przez liczbę rozmytą.

W: [Piasecki, 2011b, 2011c] pokazano, że skonstruowane w ten sposób stopy zwrotu są rozmytymi zbiorami probabilistycznymi [Hiroto, 1981]. Możliwości zastosowania opisanych w ten sposób stóp zwrotu do podejmowania decyzji inwestycyjnych opisano w: [Piasecki, 2011b, 2011c, 2014]. Wskazano tam m.in. na celowość równoczesnej minimalizacji miar energii i entropii oczekiwanej stopy zwrotu.

W niniejszym artykule przyjęto następujące dodatkowe założenia:

– stopa zwrotu jest dana jako prosta stopa zwrotu:
$$r_t = \frac{V_t - V_0}{V_0} \tag{12}$$
– wartość przyszła jest zmienną losową $\tilde{V}_t\colon \Omega = \{\omega\} \to \mathbb{R}$ o rozkładzie normalnym $N(\mathcal{V}, \sigma)$,
– wartość bieżąca dana jest jako trójkątna liczba rozmyta $T(a, b, c)$ reprezentowana funkcją przynależności $\mu(\cdot\,|a, b, c)\colon \mathbb{R} \to [0,1]$.

Dwa pierwsze z warunków zostały zaproponowane w oryginalnej pracy [Markowitz, 1952]. Ostatnie z ograniczeń zostało zaproponowane przez D. Kuchtę [2000].

Parametry liczby trójkątnej $T(a, b, c)$ są interpretowane w ten sposób, że:

– a jest maksymalnym dolnym oszacowaniem wartości bieżącej,
– b zgodnie z sugestią daną w: [Piasecki, 2011a] jest bieżącą ceną rynkową instrumentu finansowego,
– c jest minimalnym górnym oszacowaniem wartości bieżącej.

Tym samym, parametry *a, b, c*, jako oszacowania wartości instrumentu, są zawsze nieujemne.

Zgodnie z zasadą rozszerzenia Zadeha, dla ustalonego zdarzenia $\omega \in \Omega$ funkcja przynależności stopy zwrotu $\rho(\cdot, \omega)\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ dana jest za pomocą tożsamości:
$$\rho(r, \omega) = \sup\left\{\mu(x|a, b, c)\colon r = \frac{V_t(\omega) - x}{x}\right\} = \mu\left(\frac{V_t(\omega)}{1 + r}\middle|\, a, b, c\right) \tag{13}$$

Zgodnie z (9) powyższa funkcja przynależności przyjmuje postać:

$$\rho(r,\omega)=\begin{cases}\frac{\frac{V_t(\omega)}{1+r}-a}{b-a}, dla\ a\le\frac{V_t(\omega)}{1+r}<b\\ 1, dla\ \frac{V_t(\omega)}{1+r}=b\\ \frac{\frac{V(\omega)}{1+r}-c}{b-c}, dla\ b<\frac{V_t(\omega)}{1+r}\le c\end{cases} \tag{14}$$

co w równoważnej postaci możemy zapisać jako:

$$\rho(r,\omega)=\begin{cases}\frac{\frac{V_t(\omega)}{1+r}-a}{b-a}, dla\ \frac{V_t(\omega)}{a}-1\ge r>\frac{V_t(\omega)}{b}-1\\ 1, dla\ r=\frac{V_t(\omega)}{b}-1\\ \frac{\frac{V_t(\omega)}{1+r}-c}{b-c}, dla\ \frac{V_t(\omega)}{b}-1>r\ge\frac{V_t(\omega)}{c}-1\end{cases} \tag{15}$$

W tej sytuacji oczekiwana stopa zwrotu jest liczbą rozmytą daną za pomocą swej funkcji przynależności $\rho(\cdot\ |a,b,c,\mathcal{V})\colon\mathbb{R}\to[0,1]$ określonej przez tożsamość:

$$\rho(r|a,b,c,\mathcal{V})=\begin{cases}\frac{\frac{\mathcal{V}}{1+r}-a}{b-a}, dla\ \frac{\mathcal{V}}{a}-1\ge r>\frac{\mathcal{V}}{b}-1\\ 1, dla\ r=\frac{\mathcal{V}}{b}-1\\ \frac{\frac{\mathcal{V}}{1+r}-c}{b-c}, dla\ \frac{\mathcal{V}}{b}-1>r\ge\frac{\mathcal{V}}{c}-1\end{cases} \tag{16}$$

Łatwo można dostrzec, że wyznaczona powyżej oczekiwana stopa zwrotu nie jest rozmytą liczbą trójkątną.

Rozkład losowy wartości przyszłej na ogół nie jest stacjonarny. Z tej przyczyny, dla przypadku kiedy wartość bieżąca instrumentu podana jest jako liczba rzeczywista, informacje o ryzyku niepewności zapisujemy przy pomocy rozkładu stopy zwrotu:

$$r(\omega)=\frac{V_t(\omega)-b}{b} \tag{17}$$

Tak określoną stopę zwrotu, w przeciwieństwie do stopy zwrotu traktowanej jako liczba rozmyta, będziemy nazywać konwencjonalną stopą zwrotu.

Rozkład ten jest określany jako rozkład normalny $\mathrm{N}(\varrho,\varsigma)$, gdzie:

- ϱ jest oczekiwaną konwencjonalną stopą zwrotu,
- ς jest odchyleniem standardowym konwencjonalnej stopy zwrotu.

Z właściwości rozkładu normalnego mamy wtedy:

$$\mathcal{V}=(1+\varrho)\cdot b \tag{18}$$

$$\sigma=|b|\cdot\varsigma \tag{19}$$

Należy tutaj też pamiętać, że wartość wariancji ς^2 stanowi ocenę ryzyka niepewności obarczającego stopę zwrotu z instrumentu finansowego.

Miary energii i entropii oczekiwanej stopy zwrotu z instrumentu finansowego określonej za pomocą funkcji przynależności $\rho(\cdot\,|a,b,c,\mathcal{V})\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ przyjmują teraz wartości:

$$\delta(a,b,c,\mathcal{V}) = \frac{\frac{\mathcal{V}}{b-c}ln\frac{c}{b}+\frac{\mathcal{V}}{b-a}ln\frac{b}{a}}{1+\frac{\mathcal{V}}{b-c}ln\frac{c}{b}+\frac{\mathcal{V}}{b-a}ln\frac{b}{a}} \tag{20}$$

$$\mathcal{E}(a,b,c,\mathcal{V}) = \frac{\frac{\mathcal{V}}{b-c}ln\frac{4bc}{(b+c)^2}+\frac{\mathcal{V}}{b-a}ln\frac{4ab}{(b+a)^2}+\frac{\mathcal{V}(b-a)}{ab}}{1+\frac{\mathcal{V}}{b-c}ln\frac{4bc}{(b+c)^2}+\frac{\mathcal{V}}{b-a}ln\frac{4ab}{(b+a)^2}+\frac{\mathcal{V}(b-a)}{ab}} \tag{21}$$

Prowadząc dalsze badania, warto sprawdzić, jak ryzyka nieprecyzji zmieniają się podczas tworzenia portfela złożonego z dwóch instrumentów finansowych.

3. Portfel dwuskładnikowy

Poprzez portfel będziemy rozumieć dowolny, skończenie elementowy zbiór instrumentów finansowych. Każdy z tych instrumentów finansowych jest charakteryzowany przez swą oszacowaną wartość bieżącą i przewidywaną wartość przyszłą.

Rozważmy teraz przypadek portfela dwuskładnikowego, złożonego z instrumentów finansowych A_1 i A_2. Wartość bieżąca instrumentu A_i jest określona jako trójkątna liczba rozmyta $T(a_i, b_i, c_i), i = 1{,}2$. Zgodnie ze wzorem (10) wartość bieżąca tak określonego portfela jest opisana jako trójkątna liczba rozmyta:

$$T(a,b,c) = T(a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2) \tag{22}$$

Wartość przyszła instrumentu A_i określona jest jako zmienna losowa $\tilde{V}_t^i$. Załóżmy, że dwuwymiarowa zmienna losowa $(\tilde{V}_t^1, \tilde{V}_t^2)$ ma dwuwymiarowy rozkład normalny $N((\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)^{\mathrm{T}}, \mathbf{\Sigma})$, gdzie macierz kowariancji przyjmuje postać:

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & cov_{12} \\ cov_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \tag{23}$$

Oczekiwana wartość przyszła portfela wyniesie tutaj:

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 \tag{24}$$

Funkcję przynależności $\rho(\cdot\,|\mathrm{a,b,c},\mathcal{V})$ oczekiwanej stopy z portfela wyznaczamy, korzystając ze wzoru:

$$\rho(r|a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2) =$$

$$= \begin{cases} \frac{\frac{\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2}{1+r} - a_1 + a_2}{b_1+b_2-a_1+a_2}, dla\ \frac{\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2}{a_1+a_2} - 1 \geq r > \frac{\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2}{b_1+b_2} - 1 \\ 1, dla\ r = \frac{\mathcal{V}}{b_1+b_2} - 1 \\ \frac{\frac{\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2}{1+r} - c_1 + c_2}{b_1+b_2-c_1+c_2}, dla\ \frac{\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2}{b_1+b_2} - 1 > r \geq \frac{\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2}{c_1+c_2} - 1 \end{cases} \tag{25}$$

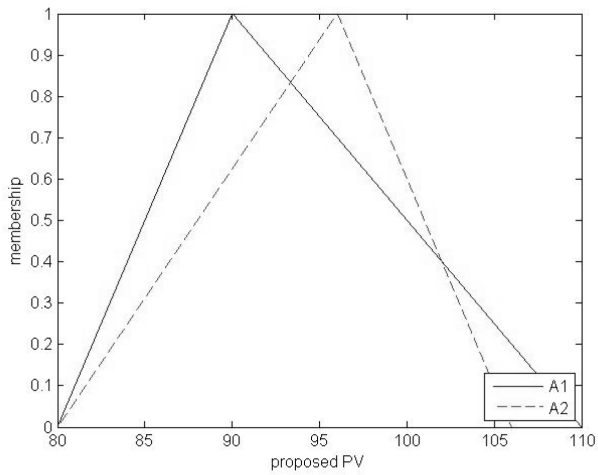
Wartości miar energii $\delta(a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2)$ i entropii $\mathcal{E}(a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2)$ wyznaczamy, korzystając odpowiednio z (20) i (21).

Zgodnie z (19) ryzyko niepewności obarczającej oczekiwaną stopę zwrotu z portfela oceniamy za pomocą wariancji tej stopy:

$$\varsigma^2 = \frac{\sigma_1{}^2 + \sigma_2{}^2 + 2\mathrm{cov}_{1,2}}{(b_1+b_2)^2}. \tag{26}$$

4. Studium przypadku

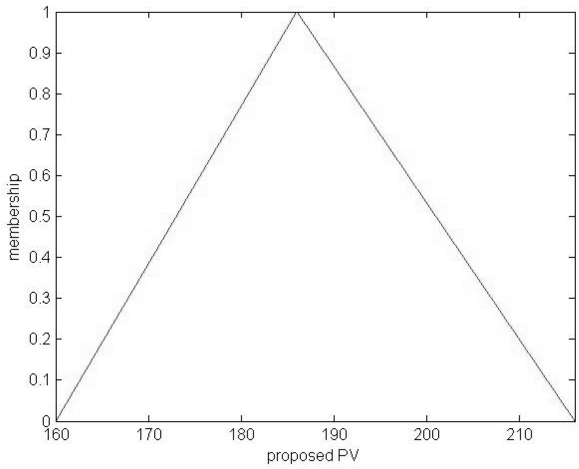
Załóżmy, że mamy instrument A_1 z wartością bieżącą określoną trójkątną liczbą rozmytą $T(80; 90; 110)$ oraz instrument A_2 z wartością bieżącą równą $T(80; 96; 106)$. Wykresy funkcji przynależności tych liczb zostały przedstawione na rys. 1.



Rys. 1. Funkcje przynależności dla proponowanych wartości bieżących instrumentów A_1 i A_2

Tworzymy portfel złożony z instrumentów A_1 i A_2, o udziałach odpowiednio x_1, x_2. Tym samym, wartość bieżąca portfela złożonego z obu tych instrumentów wynosi:

$$PV = T(80+80; 90+96; \ 110+106) = T(160; 186; 216) \tag{27}$$



Rys. 2. Funkcja przynależności proponowanej PV portfela złożonego z instrumentów A_1 i A_2

Załóżmy teraz, że dana jest dwuwymiarowa zmienna losowa $(\tilde{V}_t^1, \tilde{V}_t^2)$ o rozkładzie łącznym $N((110{,}118)^T, \mathbf{\Sigma})$. Macierz kowariancji tej zmiennej ma postać:

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} 25 & 2 \\ 2 & 16 \end{pmatrix} \tag{28}$$

Zgodnie z (24) oczekiwana wartość przyszła portfela wynosi $\mathcal{V} = 228$. Dzięki (19) wariancje oczekiwanych stóp zwrotu z instrumentów przyjmują wartości $\varsigma_1^2 = 0{,}0031$ oraz $\varsigma_2^2 = 0{,}0174$, natomiast wariancja oczekiwanej stopy zwrotu z portfela przyjmuje wartość ς^2 =0,0013.

Dla podanych instrumentów i zbudowanego z nich portfela możemy teraz, korzystając z (16) i (25), wyznaczyć oczekiwane stopy zwrotu. Są one liczbami rozmytymi $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}$, określonymi przez swoje funkcje przynależności: $\rho(r|80{,}90{,}110{,}110)$, $\rho(r|80{,}96{,}106{,}118)$, oraz $\rho(r|160{,}186{,}216{,}228)$.

Sprawdźmy teraz, czy dla tak określonych oczekiwanych stóp zwrotu zachodzi warunek teorii portfela:

$$x_1\mathcal{R}_1 + x_2\mathcal{R}_2 = \mathcal{R} \tag{29}$$

Udziały poszczególnych instrumentów w portfelu określone są następująco:

$$x_1 = \frac{b_1}{b_1+b_2} = \frac{90}{186}, x_2 = \frac{b_2}{b_1+b_2} = \frac{96}{186} \tag{30}$$

Zgodnie z (4) i (6) możemy teraz obliczyć wielkość udziału oczekiwanych stóp zwrotu z instrumentu A_i w kombinacji liniowej. Wtedy przynależność proponowanej stopy zwrotu do liniowej kombinacji stóp zwrotu z dwóch instrumentów finansowych obliczymy przy pomocy:

$$\rho_{(x_1\mathcal{R}_1+x_2\mathcal{R}_2)}(r) = sup_x\left\{\min\left\{\rho_{\mathcal{R}_1}\left(\frac{x}{x_1}\right), \rho_{\mathcal{R}_2}\left(r-\frac{x}{x_2}\right)\right\}\right\} \tag{31}$$

Uwzględniając dane zadania, otrzymujemy, że wartość funkcji przynależności przykładowej proponowanej stopy zwrotu $r = 0{,}2$, obliczana jako kombinacja liniowa stóp zwrotu, wynosi $\rho = 0{,}8667$. Natomiast wartość funkcji przynależności oczekiwanej stopy zwrotu z portfela, obliczanej przy pomocy (25), wynosi $\rho = 0{,}9175$. Oznacza to, że zbiory rozmyte odpowiadające portfelowi dwuskładnikowemu oraz kombinacji liniowej składników portfela nie są sobie równe. Tym samym, nie jest spełniony podstawowy warunek analizy portfelowej.

Korzystając z (20), wyznaczmy teraz miary energii dla oczekiwanego zwrotu z każdego z instrumentów osobno oraz z portfela:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \delta(80; 90; 110; 110) = 0{,}1610 \\ \delta_2 &= \delta(80; 96; 106; 118) = 0{,}1492 \\ \delta &= \delta(160; 186; 216; 228) = 0{,}1554 \end{aligned} \tag{32}$$

Kolejno, korzystając z (21), wyznaczamy miary entropii dla oczekiwanego zwrotu z każdego z instrumentów oraz z portfela:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \varepsilon(80; 90; 110; 110) = 0{,}1452 \\ \varepsilon_2 &= \varepsilon(80; 96; 106; 118) = 0{,}1760 \\ \varepsilon &= \varepsilon(160; 186; 216; 228) = 0{,}1611 \end{aligned} \tag{33}$$

Tym samym, otrzymujemy, że dla rozważanego przypadku mamy:

$$\begin{aligned} &\varsigma^2 < \varsigma_2^2 < \varsigma_1^2 \\ &\delta_1 > \delta > \delta_2 \\ &\varepsilon_1 < \varepsilon < \varepsilon_2 \end{aligned} \tag{34}$$

Wartości wariancji zachowały się w sposób przewidywany przez zasadę dywersyfikacji ryzyka. Wariancja stopy zwrotu z portfela jest mniejsza od wariancji stóp zwrotu z poszczególnych składników portfela. W odmienny sposób zachowują się pozostałe miary. Wartości miary energii i entropii oczekiwanej stopy zwrotu z portfela są uśrednionymi wartościami tych miar, wyznaczonych dla poszczególnych składników tego portfela.

Podsumowanie

Przeprowadzone badania wskazują na fakt, że dla portfela dwuskładnikowego, uwzględniającego nieprecyzję wyznaczenia wartości bieżącej, nie zachodzi podstawowy warunek teorii portfelowej. Tym samym, niecelowe jest uwzględnianie poszczególnych udziałów instrumentów finansowych w portfelu inwestycyjnym. Z przeprowadzonych obliczeń wynika ponadto, że ryzyko obarczające portfel nie może być traktowane jako zjawisko jednorodne. Przedstawiony przykład numeryczny pokazuje, iż pomimo że dywersyfikacja portfela pozwala na zmniejszenie ryzyka niepewności, otwartym problemem pozostaje wtedy zmniejszenie ryzyka wyboru nieoptymalnej alternatywy oraz niemożność wskazania jednoznacznej rekomendacji pomiędzy alternatywami. Istotnym problemem jest tutaj wysoce skomplikowana postać analityczna zależności (20) i (21), określających miary energii i entropii oczekiwanej stopy zwrotu. Podstawową przyczyną tych trudności jest fakt, że oczekiwana stopa zwrotu nie jest trójkątną liczbą rozmytą. Z drugiej strony można dostrzec, że oczekiwany czynnik dyskontujący posiada już tę własność. Stąd można przypuszczać, że w analizowanym tutaj przypadku, konsekwentne zastąpienie oczekiwanej stopy zwrotu poprzez oczekiwany czynnik dyskontujący pozwoli na ujawnienie prostych relacji pomiędzy miarami energii i entropii. Umożliwi to zarządzanie ryzykiem nieprecyzji. Budowa postulowanego modelu powinna stanowić kolejny etap zainicjowanych w tym artykule rozważań.

Sugerowanym kierunkiem przyszłych badań może być uogólnienie przedstawienia wartości bieżącej na przypadek rozmytej liczby trapezoidalnej. Celowe jest również kontynuowanie tych badań dla przypadku portfela dwuskładnikowego. Stosując indukcję matematyczną, wszystkie uzyskiwane tą drogą wyniki będzie można uogólnić do przypadku portfela *n*-składnikowego.

Literatura

Buckley I.J. (1987), *The Fuzzy Mathematics of Finance*, „Fuzzy Sets and Systems", Vol. 21(3).

Buckley I.J. (1992), *Solving Fuzzy Equations in Economics and Finance*, „Fuzzy Sets and Systems", Vol. 48.

Calzi M.L. (1990), *Towards a General Setting for the Fuzzy Mathematics of Finance*, „Fuzzy Sets and Systems", Vol. 35(3).

Dubois D., Prade H. (1980), *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*, „Mathematics in Science and Engineering", Vol. 144.

Greenhut J.G., Norman G., Temponi C.T. (1995), *Towards a Fuzzy Theory of Oligopolistic Competition*, IEEE Proceedings of ISUMA-NAFIPS, College Park, IEEE, s. 286-291.

Gutierrez I. (1989), *Fuzzy Numbers and Net Present Value*, „Scandinavian Journal of Management", Vol. 5(2).

Hiroto K. (1981), *Concepts of Probabilistic Sets*, „Fuzzy Sets and Systems", Vol. 5.

Huang X. (2007), *Two New Models for Portfolio Selection with Stochastic Returns Taking Fuzzy Information*, „European Journal of Operational Research", Vol. 180(1).

Klir G.J. (1993), *Developments in Uncertainty-based Information* [w:] M. Yovits (ed.), „Advances in Computers", Vol. 36, Academic Press, San Diego.

Kuchta D. (2000), *Fuzzy Capital Budgeting*, „Fuzzy Sets and Systems", Vol. 111.

Lesage C. (2001), *Discounted Cash-flows Analysis. An Interactive Fuzzy Arithmetic Approach*, „European Journal of Economic and Social Systems", Vol. 15(2).

Markowitz H.S.M. (1952), *Portfolio Selection*, „Journal of Finance", Vol. 7, No. 1.

Piasecki K. (2011a), *Behavioural Present Value*, „SSRN Electronic Journal", No. 1, DOI: 10.2139/ssrn.1729351.

Piasecki K. (2011b), *Effectiveness of Securities with Fuzzy Probabilistic Return*, „Operations Research and Decisions", No. 21(2).

Piasecki K. (2011c), *Rozmyte zbiory probabilistyczne, jako narzędzie finansów behawioralnych*, Wyd. UE, Poznań, DOI: 10.13140/2.1.2506.6567.

Piasecki K. (2014), *On Imprecise Investment Recommendations*, „Studies in Logic, Grammar and Rhetoric", No. 37(50), DOI: 10.2478/slrg-2014-0024.

Sheen J.N. (2005), *Fuzzy Financial Profitability Analyses of Demand Side Management Alternatives from Participant Perspective*, „Information Sciences", Vol. 169.

Tsao C.-T. (2005), *Assessing the Probabilistic Fuzzy Net Present Value for a Capital Investment Choice using Fuzzy Arithmetic*, „Journal of Chinese Institute of Industrial Engineers", Vol. 22(2).

Wang S., Zhu S. (2002), *On Fuzzy Portfolio Selection Problems*, „Fuzzy Optimization and Decision Making", Vol. 1.

Ward T.L. (1985), *Discounted Fuzzy Cash Flow Analysis*, Industrial Engineering Conference Proceedings, Berkeley.

Zadeh L.A. (1965), *Fuzzy Sets*, „Information and Control", Vol. 8.

TWO-ASSET PORTFOLIO – CASE STUDY FOR PRESENT VALUE GIVEN AS A TRIANGULAR FUZZY NUMBER

Summary: The main goal of the following article is to present the properties of two-asset portfolio in case of imprecise present value being described as a triangular fuzzy number. Fuzzy expected return rate of the portfolio and assessments of uncertainty and imprecision risk will be appointed. Thus, a problem of revenue maximization will be introduced.

Keywords: two-asset portfolio, present value, fuzzy set.