Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach

Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe
Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach
ISSN 2083-8611 Nr 248 · 2015

Adam Krzemienowski

Politechnika Warszawska
Wydział Elektroniki i Technik Informacyjnych
Instytut Automatyki i Informatyki Stosowanej
a.krzemienowski@elka.pw.edu.pl

ZASTOSOWANIE ROZKŁADU NAJGORSZEGO PRZYPADKU DO KONSTRUKCJI STABILNEGO PORTFELA INWESTYCJI FINANSOWYCH[1]

Streszczenie: Podstawą konstrukcji portfela inwestycji finansowych jest określenie udziałów poszczególnych aktywów (instrumentów inwestycyjnych). Z matematycznego punktu widzenia zagadnienie to sprowadza się do optymalizacji struktury aktywów portfela w warunkach ryzyka. Jest to problem optymalizacyjny typowo rozwiązywany za pomocą metody Markowitza, która maksymalizuje średnią stopę zwrotu przy minimalizacji miary ryzyka. Praca przedstawia koncepcję rozkładu najgorszego przypadku stóp zwrotu aktywów finansowych, który wykorzystany w modelu Markowitza pozwala poza próbą otrzymać wyniki nie gorsze niż w próbie w sensie rozważanych wskaźników jakości. Rozkład najgorszego przypadku jest definiowany w oparciu o relację dominacji stochastycznej pierwszego rzędu. W pracy posłużono się metodą kopuł. Proponowane podejście zostanie zilustrowane wynikami analizy eksperymentalnej dla wybranych akcji notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie.

Słowa kluczowe: portfel inwestycji, optymalizacja, stabilność.

Wprowadzenie

Podstawą konstrukcji portfela inwestycji finansowych jest określenie udziałów poszczególnych aktywów (instrumentów inwestycyjnych). Z matematycznego punktu widzenia zagadnienie to sprowadza się do optymalizacji struktury aktywów portfela w warunkach ryzyka. Jest to problem optymalizacyjny typowo

[1] Praca została sfinansowana ze środków Narodowego Centrum Nauki przyznanych na podstawie decyzji numer DEC-2012/07/B/HS4/03076.

rozwiązywany za pomocą metody Markowitza [1952], która maksymalizuje średnią stopę zwrotu przy minimalizacji miary ryzyka. Stosując model Markowitza przyjmuje się następujące założenia: historyczne wartości szeregu czasowego stanowią dobrą prognozę przyszłych zachowań stóp zwrotu, proces stochastyczny ich jest stacjonarny, mają one wielowymiarowy rozkład normalny. Znalezienie portfeli dających największą stopę zwrotu przy danym ryzyku i gwarantujących równocześnie najmniejsze ryzyko przy ustalonej stopie zwrotu portfela prowadzi do tzw. portfeli efektywnych, spośród których jest wybierany portfel optymalny. Założenia modelu Markowitza powinny gwarantować generowanie portfeli stabilnych w czasie, czyli takich, które charakteryzują się brakiem fluktuacji ryzyka i średniej stopy zwrotu w odniesieniu do tych wyznaczonych na podstawie danych historycznych. W praktyce założenia modelu Markowitza nie są jednak spełnione. Praca przedstawia koncepcję rozkładu najgorszego przypadku stóp zwrotu aktywów finansowych, który wykorzystany w modelu Markowitza pozwala poza próbą otrzymać wyniki nie gorsze niż w próbie w sensie rozważanych wskaźników jakości. Rozkład najgorszego przypadku jest definiowany w oparciu o relację dominacji stochastycznej pierwszego rzędu.

Praca jest zorganizowana w następujący sposób. Punkty 1 i 2 przedstawiają definicje rozkładu najgorszego przypadku stóp zwrotu dla pojedynczego aktywu finansowego i portfela aktywów finansowych. Punkt 3 przedstawia model optymalizacyjny wykorzystany do przeprowadzenia eksperymentów obliczeniowych. Punkt 4 prezentuje wyniki eksperymentów dla wybranych akcji notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie. Ostatni punkt stanowi podsumowanie pracy.

1. Rozkład najgorszego przypadku stóp zwrotu aktywu finansowego

Definicja jednowymiarowego rozkładu najgorszego przypadku stóp zwrotu aktywu finansowego opiera się na relacji dominacji stochastycznej, która jest fundamentalną koncepcją wykorzystywaną w teorii decyzji. Dominacja stochastyczna wywodzi się z teorii majoryzacji [Hardy, Littlewood i Pólya, 1934]. Relacja dominacji stochastycznej została wprowadzona do statystyki przez Manna i Whitney'a [1947] i dalej rozwinięta w kontekście wnioskowania statystycznego przez Blackwella [1953] i Lehmanna [1955].

Mając daną przestrzeń probabilistyczną $(\Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P})$ oraz określoną w niej skalarną zmienną losową R, definiujemy relację dominacji stochastycznej pierwszego rzędu w sposób następujący. Mówimy, że zmienna losowa R_1 słabo dominuje zmienną losową R_2 w relacji dominacji stochastycznej pierwszego rzędu (ang. *first degree stochastic dominance* – FSD), co zapisujemy $R_1 \geq_{FSD} R_2$, wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi

$$\mathrm{E}(u(R_1)) \geq \mathrm{E}(u(R_2))$$

dla każdej niemalejącej funkcji użyteczności u, tj. dla wszystkich preferencji, gdzie większe wartości są preferowane. Możemy alternatywnie scharakteryzować relację FSD z wykorzystaniem dystrybuanty lub funkcji kwantylowej zmiennej losowej. Niech funkcja F o wartościach rzeczywistych oznacza dystrybuantę zmiennej losowej R, tj. $F(\eta) = \mathrm{P}(R \leq \eta)$ dla każdego $\eta \in \mathrm{R}$. Dalej, niech funkcja $F^{(-1)}$ będzie jej lewostronnie ciągłą odwrotnością (funkcją kwantylową), tj. $F^{(-1)}(p) = \inf\{\eta : F(\eta) \geq p\}$ dla $0 < p \leq 1$. Zachodzą następujące relacje:

$$\begin{aligned} R_1 \geq_{FSD} R_2 \quad &\Leftrightarrow \quad F_{R_1}(\eta) \leq F_{R_2}(\eta) \quad \forall \eta \in \mathrm{R}, \\ &\Leftrightarrow \quad F_{R_1}^{(-1)}(p) \geq F_{R_2}^{(-1)}(p) \quad \forall p \in (0;1]. \end{aligned}$$

Dla ciągu niezależnych zmiennych losowych o niejednakowym rozkładzie $(R_t)_{t\in T}$, reprezentujących stopy zwrotu aktywu finansowego z przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P})$, zmienna losowa najgorszego przypadku jest definiowana jako:

$$R^w = \sup\{R : R_t \geq_{FSD} R \quad \forall t \in T\}. \tag{1}$$

We wzorze (1) zmienna losowa R należy do zbioru zmiennych losowych, które są zdominowane przez zmienne losowe $(R_t)_{t\in T}$ w sensie FSD. Ze uwagi na fakt, że relacja FSD indukuje porządek częściowy, w zbiorze tych zmiennych można znaleźć kres górny, analizując dystrybuanty lub funkcje kwantylowe. Dystrybuanta zmiennej losowej R^w przyjmuje postać $F_{R^w}(\eta) = \max(F_{R_t}(\eta) : t \in T)$ dla każdego $\eta \in \mathrm{R}$, nastomiast funkcja kwantylowa $F_{R^w}^{(-1)}(p) = \min(F_{R_t}^{(-1)}(p) : t \in T)$ dla $0 < p \leq 1$. Zgodnie z powyższą definicją, w każdej chwili czasowej t proces stochastyczny $(R_t)_{t\in T}$ daje zwrot z lepszego rozkładu niż rozkład najgorszego przypadku określony dystrybuantą F_{R^w} (lub funkcją kwantylową $F_{R^w}^{(-1)}$) dla wszystkich modeli preferencji, dla których są preferowane większe wartości. W związku z tym rozkład najgorszego przypadku może być traktowany jako rozkład niezmienny w czasie, ograniczający z dołu proces stochastyczny stóp zwrotu. Rozkład najgorszego przypadku może być wyznaczany poprzez estymację rozkładów w procedurze przesuwanego okna czasowego i porównywanie kwantyli.

2. Rozkład najgorszego przypadku stóp zwrotu portfela aktywów finansowych

Rozważmy n-wymiarowy wektor losowy $\boldsymbol{R} = (R_1^w, \ldots, R_n^w)^T$, którego składowe reprezentują zmienne losowe najgorszego przypadku aktywów finansowych. Zakładamy, że zmienne losowe R_i^w zależą od siebie w sensie stochastycznym i ich struktura zależności jest dana kopułą (ang. *copula*) C. W szczególności $H(\xi, \ldots, \zeta) = C(F_{R_1^w}(\xi), \ldots, F_{R_n^w}(\zeta))$, gdzie H jest dystrybuantą łącznego rozkładu wektora losowego $\boldsymbol{R}$.

Tworzenie portfela aktywów finansowych to poszukiwanie optymalnej sumy zmiennych losowych, więc dalej będziemy zainteresowani zdefiniowaniem rozkładu najgorszego przypadku dla sumy zmiennych losowych $S = R_1^w + \ldots + R_n^w$ ze strukturą zależności daną kopułą C. Możemy wyznaczyć dystrybuantę sumy S z wykorzystaniem całek wielowymiarowych:

$$\begin{aligned} F(s) = P(S \le s) &= \int_{A(s)} dC(F_{R_1^w}(r_1), \ldots, F_{R_n^w}(r_n)) \\ &= \int_{B(s)} dC(u_1, \ldots, u_n), \end{aligned} \tag{2}$$

gdzie zbiór A jest definiowany jako $A(s) = \{(r_1, \ldots, r_n) : r_1 + \ldots + r_n \le s\}$, a zbiór B jako $B(s) = \{(u_1, \ldots, u_n) : F_{R_1^w}^{(-1)}(u_1) + \ldots + F_{R_n^w}^{(-1)}(u_n) \le s\}$. Dla ciągu niezależnych zmiennych losowych o niejednakowym rozkładzie $(S_t)_{t \in T}$, reprezentujących sumy stóp zwrotu aktywów finansowych, zmienna losowa najgorszego przypadku jest definiowana jako:

$$S^w = \sup\{S : S_t \ge_{FSD} S \quad \forall t \in T\}.$$

Podobnie jak wyżej, dystrybuanta zmiennej losowej S^w przyjmuje postać $F_{S^w}(s) = \max(F_{S_t}(s) : t \in T)$ dla każdego $s \in \mathbb{R}$, nastomiast funkcja kwantylowa $F_{S^w}^{(-1)}(p) = \min(F_{S_t}^{(-1)}(p) : t \in T)$ dla $0 < p \le 1$.

Wprowadźmy definicję porządku zależności stochastycznej (ang. *concordance ordering*) [Joe, 1997], który ułatwi estymację rozkładu najgorszego przypadku dla sumy zmiennych losowych. Kopuła C może być przedstawiona jako $C(u_1,\ldots,u_n) = \mathrm{P}(U_1 \le u_1,\ldots,U_n \le u_n)$, gdzie $(U_1,\ldots U_n) = (F_1(R_1),\ldots,F_n(R_n))$, podobnie komplementarna kopuła $\overline{C}(u_1,\ldots,u_n) = \mathrm{P}(U_1 > u_1,\ldots,U_n > u_n)$. Mówimy, że kopuła C_1 jest mniejsza lub równa kopule C_2 w porządku zależności stochastycznej, co zapisujemy $C_1 \le_c C_2$, wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi

$$C_1(\boldsymbol{u}) \le C_2(\boldsymbol{u}) \quad \mathrm{i} \quad \overline{C}_1(\boldsymbol{u}) \le \overline{C}_2(\boldsymbol{u}) \qquad \forall \boldsymbol{u} \in [0;1]^n .$$

Następujące twierdzenie jest prawdziwe. Jeżeli zmienna losowa S_1, reprezentująca sumę zmiennych losowych najgorszego przypadku, ma dystrybuantę $F_{S_1}(s) = \int\limits_{r_1+\ldots+r_n \le s} dC_1(F_{R_1^w}(r_1),\ldots,F_{R_n^w}(r_n))$ i podobnie zmienna losowa S_2 ma dystrybuantę $F_{S_2}(s) = \int\limits_{r_1+\ldots+r_n \le s} dC_2(F_{R_1^w}(r_1),\ldots,F_{R_n^w}(r_n))$, to

$$C_1 \le_c C_2 \;\; \Rightarrow \;\; S_1 \ge_{FSD} S_2 . \tag{3}$$

Dowód twierdzenia wynika z definicji porządku zależności stochastycznej i reprezentacji (2).

Opierając się na zależności (3), możemy zdefiniować kopułę najgorszego przypadku, która pozwoli wyznaczyć sumę zmiennych losowych najgorszego przypadku. Mając dany ciąg kopuł $(C_t)_{t \in T}$, kopuła najgorszego przypadku jest definiowana jako:

$$C^w = \inf\{C : C_t \le_c C \quad \forall t \in T\} .$$

Estymacja rozkładu najgorszego przypadku dla sumy zmiennych losowych sprowadza się do estymacji najmniejszej kopuły w porządku zależności stochastycznej, ograniczającej z góry ciąg kopuł. Ta kopuła wraz z jednowymiarowymi rozkładami najgorszego przypadku powinna być użyta jako źródło danych dla modelu optymalizacji portfela.

3. Model optymalizacyjny

W pracy wykorzystano model optymalizacji portfela z warunkową wartością zagrożoną (ang. *Conditional Value-at-Risk* – CVaR) [Rockafellar i Uryasev, 2000] jako miarą ryzyka. CVaR jest miarą koherentną [Pflug, 2000] i liczne badania empiryczne [zob. np. Rockafellar i Uryasev, 2002; Mansini, Ogryczak i Speranza, 2003] potwierdziły jej przydatność w różnych zagadnieniach finansowych. Optymalizowano miarę ryzyka, opierając się na dualnym modelu programowania liniowego, zaproponowanym przez Ogryczaka i Śliwińskiego [2011]. Wykorzystano wariant uwzględniający ograniczenia na średnią stopę zwrotu i wielkość udziałów portfela:

$$\begin{aligned}
&\min_{q,s,u_t,v_j} && q-\mu_0 s+\sum_{j=1}^{n} x^g v_j \\
&\text{p.o.} && q-\mu_j s-\sum_{t=1}^{m} r_{jt}u_t+v_j\ge 0 \quad \text{dla} \quad j=1,\ldots,n, \\
& && \sum_{t=1}^{m} u_t=1, \\
& && s\ge 0, \\
& && 0\le u_t\le p_t/\beta \quad \text{dla} \quad t=1,\ldots,m, \\
& && v\ge 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

W powyższym sformułowaniu r_{jt} oznacza prostą stopę zwrotu j -tego aktywu ($j=1,\ldots,n$) dla realizacji t ($t=1,\ldots,m$) wektora losowego $\boldsymbol{R}=(R_1^w,\ldots,R_n^w)^T$, p_t oznacza prawdopodobieństwo realizacji t, $\beta\in(0;1]$ oznacza poziom tolerancji CVaR. Parametry μ_j oznaczają wartości średnie zmiennych losowych R_j^w, μ_0 oznacza ograniczenie dolne na średnią stopę zwrotu portfela, natomiast x^g reprezentuje ograniczenie górne na udziały portfela. W optimum wartość funkcji celu reprezentuje CVaR, a zmienne dualne ograniczeń (4) reprezentują udziały portfela. Model dualny pozwala uwzględnić istotnie więcej realizacji wektora losowego $\boldsymbol{R}$ niż model prymalny, ponieważ ograniczenia związane z realizacjami wektora $\boldsymbol{R}$ tworzą ograniczenia kostkowe (ang. *simple upper bounds*) i nie wpływają na złożoność obliczeniową problemu.

4. Eksperymenty obliczeniowe

Do eksperymentów obliczeniowych wykorzystano notowania spółek wchodzących w skład indeksów WIG30 i WIG50 Giełdy Papierów Wartościowych w Warszawie. Przyjęto kwartalne stopy zwrotu, okres w próbie 2002-2011 i poza próbą 2012-2014. Dla wszystkich spółek w okresie w próbie przeprowadzono estymację rozkładów najgorszego przypadku w procedurze przesuwanego okna czasowego o długości 8 lat. Tabela 1 przedstawia wstępnie wybrane spółki należące do różnych sektorów i branż, dla których wartość oczekiwana rozkładu najgorszego przypadku była dodatnia.

Tabela 1. Spółki z dodatnią wartością oczekiwaną rozkładu najgorszego przypadku

Firma	Sektor	Branża
Grupa Apator S.A.	Przemysł	Elektromaszyny
Getin Holding S.A.	Finanse	Banki
MCI Management S.A.	Finanse	Inne

W procedurze przesuwanego okna czasowego wyznaczono kopułę t najgorszego przypadku (maksymalną w porządku zależności stochastycznej). Badania empiryczne pokazują, że kopuła t najlepiej dopasowuje się do finansowych stóp zwrotu [zob. np. Fisher i in., 2007]. Kopuła t najgorszego przypadku jest definiowana przez macierz korelacji o maksymalnych wartościach [Müller i Stoyan, 2002] dla zadanej wartości stopni swobody. W procedurze estymacji kopuły otrzymano macierz korelacji

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}82 & 0{,}71 \\ 0{,}82 & 1 & 0{,}73 \\ 0{,}71 & 0{,}73 & 1 \end{bmatrix}.$$

Przyjęto najmniejszą wartość stopni swobody $v = 1{,}5$ w celu uzyskania silnych zależności w ogonach rozkładu.

Zastosowano model optymalizacji portfela (4). Przyjęto $\beta = 0{,}05$, $\mu_0 = 0{,}001$ i $x^g = 0{,}5$. Przeprowadzono optymalizację dla 100 tys. jednakowo prawdopodobnych wektorów stóp zwrotu, wygenerowanych z 3-wymiarowego rozkładu zdefiniowanego przez kopułę t i rozkłady brzegowe najgorszego przypadku. Wykorzystano solver IBM ILOG CPLEX 12.6.1, optymalizacja trwała krócej niż 1 s na komputerze z procesorem 2.67 GHz i 4 GB pamięci RAM. Skład optymalnego portfela przedstawia tabela 2.

Tabela 2. Skład optymalnego portfela

Firma	Udział (%)
Grupa Apator S.A.	50,0
Getin Holding S.A.	11,3
MCI Management S.A.	38,7

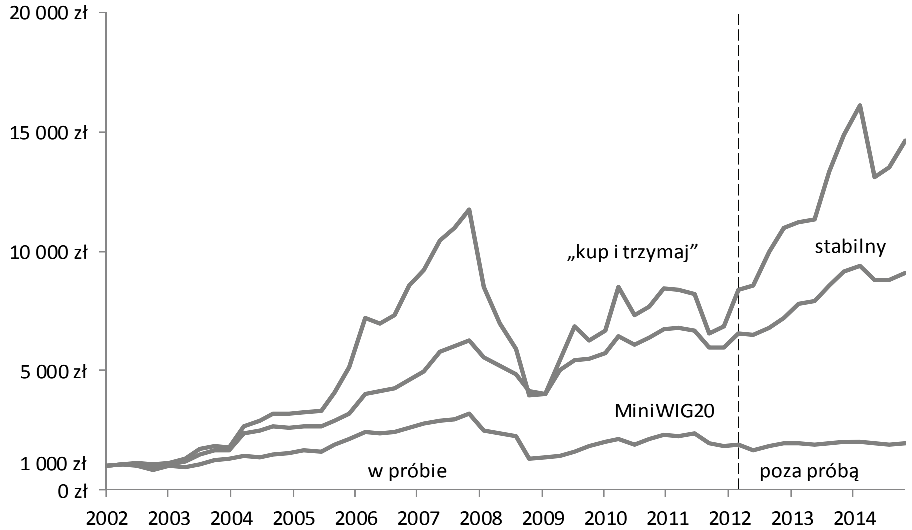
W celu wyznaczenia ilości inwestowanego kapitału w ryzykowne aktywa, która daje maksymalne tempo wzrostu inwestycji, wykorzystano kryterium Kelly'ego [Rotando i Thorp, 1992] w zastosowaniu do rozkładu najgorszego przypadku stóp zwrotu optymalnego portfela. Ilość ta wynosi 39,3%, pozostałą część należy inwestować w instrument wolny od ryzyka. Za instrument wolny od ryzyka przyjęto lokatę opartą na wskaźniku WIBOR 3M. Tak skonstruowany portfel będzie dalej nazywany stabilnym, jego skład przedstawia tabela 3.

Tabela 3. Skład stabilnego portfela

Aktywo	Udział (%)
Akcje firmy Grupa Apator S.A.	19,7
Akcje firmy Getin Holding S.A.	4,4
Akcje firmy MCI Management S.A.	15,2
Lokata oparta na wskaźniku WBIOR 3M	60,7

Portfel stabilny utrzymuje swe własności, jeżeli jego struktura nie zmienia się w czasie. Portfel został wyznaczony na podstawie kwartalnych stóp zwrotu, więc co kwartał powinien być rebalansowany w celu zachowania udziałów określonych w tabeli 3.

Rys. 1 przedstawia krzywe kapitału w próbie i poza próbą dla inwestycji w portfel stabilny, „kup i trzymaj” oraz jednostki indeksowe MiniWIG20, które w badanym okresie pozwalały inwestować w indeks WIG20.



Rys. 1. Krzywe kapitału

Krzywa kapitału portfela „kup i trzymaj” to wynik inwestycji portfela stabilnego bez rebalansowania co kwartał. Początkowa ilość inwestowanego kapitału wynosiła 1000 zł. Uzyskano następujące składanie średnioroczne stopy wzrostu: portfel stabilny – 18,8%, portfel „kup i trzymaj" – 23,2%, jednostki indeksowe MiniWIG20 – 5,5%. Stopy wzrostu nie uwzględniają kosztów transakcyjnych, które są istotne w przypadku portfela stabilnego wymagającego rebalansowania.

Tabela 4 przedstawia statystyki dla okresu 2002-2014 dla kwartalnych stóp zwrotu porównywanych inwestycji. Statystyki dla rozkładu najgorszego przypadku (r.n.p.) stóp zwrotu portfela stabilnego są prezentowane dla okresu w próbie, VaR oznacza wartość zagrożoną (ang. *Value-at-Risk*). Wszystkie statystyki prezentowanie w tabeli 4 są miarami zgodnymi z relacją FSD, tj. dla zmiennych losowych R_1, R_2 i miary ρ zachodzi $R_1 \geq_{FSD} R_2 \Rightarrow \rho(R_1) \geq \rho(R_2)$.

Tabela 4. Statystyki dla kwartalnych stóp zwrotu inwestycji

Miara	Inwestycje		
	Portfel stabilny	**Portfel „kup i trzymaj"**	**Jednostki MiniWIG20**
Średnia (%)	4,7	6,4	2,0
Średnia, r.n.p. w próbie (%)	2,4	–	–
Minimum (%)	-14,7	-33,1	-42,9
Minimum, r.n.p. w próbie (%)	-15,6	–	–
VaR (0,05) (%)	-10,6	-20,0	-17,4
VaR (0,05), r.n.p. w próbie (%)	-12,5	–	–
CVaR (0,05) (%)	-12,5	-27,7	-29,1
CVaR (0,05), r.n.p. w próbie (%)	-14,3	–	–

Z tabeli 4 wynika, że wszystkie analizowane statystyki rozkładu najgorszego przypadku portfela stabilnego utrzymały się w całym okresie inwestycji. Wartości statystyk portfela „kup i trzymaj" świadczą o konieczności rebalansowania w celu utrzymania charakterystyk rozkładu najgorszego przypadku uzyskanych w próbie. Za wyjątkiem średniej, wszystkie inne miary dały od 1,6 do 2,1 razy niższe wartości od tych uzyskanych dla rozkładu najgorszego przypadku. Z kolei wyniki inwestycji w jednostki indeksowe MiniWIG20 pokazują, że inwestowanie w portfel stabilny może dać atrakcyjniejsze zwroty i ryzyko od tych oferowanych przez portfel największych spółek. W tym przypadku dokładne porównanie wyników inwestycji wymaga uwzględnienia kosztów transakcyjnych.

Podsumowanie

W pracy przedstawiono koncepcję rozkładu najgorszego przypadku stóp zwrotu aktywów finansowych, który wykorzystany w modelu Markowitza pozwala poza próbą otrzymać wyniki nie gorsze niż w próbie w sensie rozważanych wskaźników jakości. Rozkład najgorszego przypadku jest definiowany w oparciu o relację dominacji stochastycznej pierwszego rzędu. Zaprezentowane podejście zakłada, że rozkłady w przyszłości nie będą gorsze od rozkładu najgorszego przypadku. W ogólności to założenie nie musi być spełnione, dlatego warto analizować rozkłady najgorszego przypadku w odniesieniu do silnych fundamentalnie spółek z długoterminowym potencjałem wzrostu.

Proponowane podejście zostało zilustrowane wynikami eksperymentów obliczeniowych dla wybranych akcji notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie. Z 80 spółek wyłoniono 3 należące do różnych sektorów i branż z rozkładami najgorszego przypadku o dodatniej wartości oczekiwanej. Niewielka liczba wybranych spółek jest wynikiem konserwatywnego charakteru metody – branie minimów z kwantyli dla odbiegających od siebie rozkładów z dodatnimi wartościami oczekiwanymi może prowadzić do rozkładu z ujemną wartością oczekiwaną. W ramach dalszych badań można rozważać inne, mniej restrykcyjne podejścia do określenia rozkładu stanowiącego ograniczenie z dołu procesu stochastycznego stóp zwrotu.

Literatura

Blackwell D. (1953), *Equivalent comparisons of experiments*, „Annals of Mathematical Statistics" 24, s. 265-272.

Fischer M.J., Köck Ch., Schlüter S., Weigert F. (2007), *Multivariate copula models at work: Outperforming the desert island copula?*, discussion papers, Friedrich-Alexander-University Erlangen-Nuremberg, Chair of Statistics and Econometrics, No. 79/2007, http://EconPapers.repec.org/RePEc:zbw:faucse:792007.

Hardy G.H., Littlewood J.E., Pólya G. (1934), *Inequalities. Cambridge University Press*, Cambridge, MA.

Joe H. (1997), *Multivariate Models and Dependence Concepts*, Boca Raton: Chapman & Hall/CRC.

Lehmann E.L. (1955), *Ordered families of distributions*, „Annals of Mathematical Statistics" 26, s. 399-419.

Mann H.B., Whitney D.R. (1947), *On a test of whether one of two random variables is stochastically larger than the other*, „Annals of Mathematical Statistics" 18, s. 50-60.

Mansini R., Ogryczak W., Speranza M.G. (2003), *LP solvable models for portfolio optimization: A classification and computational comparison*, „IMA Journal of Management Mathematics" 14, s. 187-220.

Markowitz H.M. (1952), *Portfolio selection*, „Journal of Finance" 7, s. 77-91.

Müller A., Stoyan, D. (2002), *Comparison Methods for Stochastic Models and Risks*. Wiley, Chichester.

Ogryczak W., Śliwiński T. (2011), *On solving the dual for portfolio selection by optimizing Conditional Value at Risk*, „Computational Optimization and Applications" 50, s. 591-595.

Pflug G.Ch. (2000), *Some remarks on the Value-at-Risk and the Conditional Value-at-Risk* [w:] S. Uryasev (red.), *Probabilistic Constrained Optimization: Methodology and Applications*, Kluwer A.P., Dordrecht.

Rockafellar R.T., Uryasev S. (2000), *Optimization of Conditional Value-at-Risk*, „Journal of Risk" 2, s. 21-41.

Rockafellar R.T., Uryasev S. (2002), *Conditional Value-at-Risk for general distributions*, „Journal of Banking and Finance" 26, s. 1443-1471.

Rotando L.M, Thorp E.O. (1992), *The Kelly criterion and the stock market*, „The American Mathematical Monthly" 99, s. 922-931.

CONSTRUCTION OF A STABLE PORTFOLIO OF FINANCIAL INVESTMENTS BY MEANS OF THE WORST-CASE DISTRIBUTION

Summary: The basis of the portfolio selection is to determine the share of each financial asset. From a mathematical point of view, this issue boils down to portfolio optimization. This is a typical optimization problem solved by the Markowitz method, which maximizes the expected rate of return and minimizes risk defined as the variance. The assumptions of the Markowitz model should ensure that the optimal portfolios are stable over time, i.e., they should be characterized by the absence of fluctuations in their shares, or in other words, the risk and the expected return should correspond to those estimated from the historical data. In practice, these assumptions are not met. To solve this problem, we define a certain time-invariant distribution bounding portfolio time series of returns from below. This distribution is based on the relation of stochastic dominance and is called the worst-case distribution. We test the validity of this approach by conducting computational experiments on the real-life financial data from the Warsaw Stock Exchange.

Keywords: investment portfolio, optimization, stability.