



Stanisław Heilpern

Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu
Wydział Zarządzania, Informatyki i Finansów
Katedra Statystyki
stanislaw.heilpern@ue.wroc.pl

ZALEŻNY, ZŁOŻONY PROCES POISSONA – WYZNACZANIE FUNKCJONAŁÓW SKŁADEK I MIAR RYZYKA

Streszczenie: Praca poświęcona jest złożonemu procesowi Poissona, w którym dopuszcza się występowanie zależności między okresem poprzedzającym szkodę a wielkością tej szkody. Struktura zależności opisana jest za pomocą funkcji łączącej (ang. *copula*). W pracy wyznaczone zostały w oparciu o dwa pierwsze momenty zagregowanych szkód, wartości składek ubezpieczeniowych. Natomiast miary ryzyka: wartość zagrożona VaR oraz oczekiwany niedobór ES, obliczane są na podstawie znajomości trzech pierwszych momentów. Wielkości te wyznaczone za pomocą dokładnych wzorów, w sposób przybliżony oraz za pomocą symulacji. Wykorzystano również transformaty Laplace'a. Rozpatrywano szkody o rozkładzie wykładniczym oraz Pareta.

Słowa kluczowe: złożony proces Poissona, zależność, funkcje łączące, składki, miary ryzyka.

Wprowadzenie

W klasycznym złożonym procesie Poissona, będącym podstawą modelu kolektywnego ryzyka czy zagadnień dotyczących ruiny, zakłada się niezależność wszystkich występujących procesów i zmiennych losowych [Ostasiewicz (red.), 2000; Rolski i in., 1999]. W niniejszej pracy dopuszczono występowanie zależności między okresem poprzedzającym szkodę a jej wielkością. Założenie to, będące osłabieniem warunku niezależności, jest bardziej realistyczne. Umożliwia m.in. modelowanie procesów ubezpieczeniowych, dotyczących szkód katastroficznych, występujących przykładowo podczas trzęsień ziemi [Boudreault i in., 2006; Cossete, Marceau, Mari, 2008].

W artykule rozpatrzono proces określony formułą:

$$S(t) = X_1 + X_2 + \dots + X_{N(t)}$$

gdzie szkody $X_n > 0$, a $N(t)$ jest procesem Poissona liczącym szkody. Zmienną losową $S(t)$ możemy wtedy interpretować jako zagregowaną szkodę zaobserwowaną do momentu t . Niech T_n będą momentami wystąpienia szkód. Wtedy zmienne losowe $W_1 = T_1$ oraz $W_n = T_n - T_{n-1}$ dla $n > 1$, przedstawiają okresy między szkodami, a proces liczący szkody określony jest wzorem $N(t) = \sup\{n: T_n \leq t\}$. Natomiast okresy między szkodami W_n są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z dystrybuantą $F_W(w) = 1 - e^{-\lambda w}$.

Przyjęto, iż szkody X_n są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie, wartości oczekiwanej m_1 i dystrybuancie $F_X(x)$. Wektory losowe (W_n, X_n) są wtedy niezależne, ale w odróżnieniu od klasycznego złożonego procesu Poissona dopuszczono zależność zmiennych losowych W_n i X_n . Symbolem $F(w, x)$ będziemy oznaczać łączną dystrybuantę tych zmiennych losowych.

Praca jest kontynuacją artykułów [Heilpern, 2012; Heilpern, 2014]. W rozdziale 1 przedstawione zostały podstawowe wiadomości, dotyczące funkcji łączących oraz funkcje łączące wykorzystywane w dalszej części pracy. W następnym rozdziale wyznaczono funkcjonały składki ubezpieczeniowej oparte na dwóch pierwszych momentach zagregowanej szkody. Natomiast ostatni rozdział poświęcony został miarom ryzyka VaR i ES zagregowanej szkody. Podano w nim dwa sposoby ich wyznaczania. Jeden oparty na aproksymacji bazującej na trzech momentach, drugi – wykorzystuje symulację wartości zagregowanej szkody.

1. Funkcje łączące

Jeśli dopuszczamy zależność okresu między szkodami W_n a wielkością następną szkodą X_n , to strukturę zależności tych zmiennych losowych możemy opisać funkcją łączącą (ang. *copula*) $C(u, v)$. Spełnia ona wtedy następujący warunek [Heilpern, 2007; Nelsen, 1999]:

$$F(w, x) = C(F_W(w), F_X(x))$$

Funkcję łączącą możemy również traktować jako dwuwymiarową dystrybuantę zmiennych losowych o rozkładzie jednostajnym na odcinku $[0, 1]$.

Gdy zmienne losowe są niezależne, wtedy odpowiadająca im funkcja łącząca przyjmuje prostą postać:

$$\Pi(u, v) = uv$$

Drugim, skrajnym przypadkiem są współmonotoniczne zmienne losowe z funkcją łączącą równą [Heilpern, 2007; Nelsen, 1999]:

$$M(u, v) = \min\{u, v\}$$

Zmienne losowe są wtedy ściśle zależne. Zachodzi bowiem między nimi funkcyjna zależność:

$$X = l(W)$$

gdzie $l(w) = F_X^{-1}(F_W(w))$ jest funkcją rosnącą. Funkcja łącząca M jest dystrybuantą łącznego rozkładu zmiennych losowych o rozkładzie jednostajnym na $[0, 1]$, skupionego na przekątnej kwadratu $[0, 1]^2$. Natomiast łączny rozkład współmonotonicznych zmiennych losowych W oraz X jest rozkładem syngularnym skupionym na krzywej $D = \{(x, t): x = l(t)\}$.

Funkcja łącząca Spearmana C_θ^S [Heilpern, 2007; Hürlimann, 2004], będąca kombinacją wypukłą funkcji łączącej niezależności Π i współmonotoniczności M :

$$C_\theta^S(u, v) = (1 - \theta)\Pi(u, v) + \theta M(u, v)$$

gdzie $0 \leq \theta \leq 1$, umożliwia modelowanie całej gamy dodatnich zależności między zmiennymi losowymi. Współczynnik kombinacji θ oddaje stopień zależności między zmiennymi losowymi. Jest on bowiem równy współczynnikowi korelacji Spearmana. Dla $\theta = 0$ mamy niezależność, a dla $\theta = 1$ ścisłą, dodatnią zależność, czyli współmonotoniczność. Funkcja łącząca Spearmana umożliwia m.in. badanie zależności wartości charakterystyk zagregowanej szkody $S(t)$ od stopnia zależności zmiennych losowych W oraz X . Łączna dystrybuanta zmiennych W i X jest wtedy równa:

$$F(w, x) = (1 - \theta)\Pi(F_W(w), F_X(x)) + \theta M(F_W(w), F_X(x))$$

Inną funkcją łączącą o tej własności jest funkcja łącząca Clayтона [Heilpern, 2007; Nelsen, 1999] określona wzorem:

$$C_\theta^C(u_1, u_2) = (u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}$$

gdzie $\theta > 0$. I w tym przypadku parametr θ oddaje stopień zależności między zmiennymi losowymi. Współczynnik korelacji Kendala τ jest wtedy równy $\tau = \theta/(\theta + 2)$. Graniczna wartość $\theta = 0$ odpowiada niezależności, a nieskończoność ścisłej zależności.

Natomiast modelowanie małych stopni zależności zarówno dodatnich, jak i ujemnych, umożliwia funkcja łącząca Farlie-Gumbel-Morgensterna (FGM):

$$C_\theta^F(u_1, u_2) = u_1 u_2 + \theta u_1 u_2 (1 - u_1)(1 - u_2)$$

gdzie $-1 \leq \theta \leq 1$. Współczynnik korelacji Spearmana ρ jest wtedy równy $\rho = \theta/3$, czyli zachodzi zależność $-1/3 \leq \rho \leq 1/3$.

Znajomość funkcji łączącej C umożliwi nam wygenerowanie losowych wartości dwuwymiarowego wektora losowego (W, X) , potrzebnych do symulacji wartości zmiennej losowej $S(t)$. Symulację wartości pary zmiennych losowych (W, X) , której struktura zależności opisana jest funkcją łączącą C , można przeprowadzić na podstawie algorytmów, o których mówią R.B. Nelsen [1999] oraz S. Heilpern [2007]. Natomiast symulacja wartości zmiennej losowej $S(t)$ polega na wygenerowaniu niezależnie m par wartości (w_i, x_i) , gdzie $i = 1, 2, \dots, n$, takich, że $T_n = \sum_{i=1}^n w_i \leq t$, a $T_{n+1} > t$. Wtedy $s = \sum_{i=1}^n x_i$ możemy traktować jako realizację zmiennej $S(t)$. Powtarzając tę procedurę m razy dla ustalonej wartości t , otrzymujemy m wartości s_j wygenerowanych z rozkładu zmiennej $S(t)$.

2. Wyznaczanie funkcjonalów składki ubezpieczeniowej

Przedstawimy teraz podstawowe składki ubezpieczeniowe, oparte na momentach zmiennej losowej $S(t)$, przedstawiającej zagregowaną stratę do momentu t . Składki te przyjmować będą postać [Ostasiewicz (red.), 2000; Rolski i in., 1999]:

$$\pi(t) = E(S(t)) + L(t)$$

Wartość oczekiwana $E(S(t))$ jest traktowana jako tzw. składka netto, a funkcja $L(t)$ jako obciążenie ryzykiem.

Rozpatrzmy w pracy trzy postaci obciążenia ryzykiem, oparte na pierwszych momentach zagregowanej straty:

$$L_E(t) = cE(S(t)), \quad L_V(t) = cV(S(t)), \quad L_\sigma(t) = c\sqrt{V(S(t))}$$

gdzie $c \geq 0$ jest współczynnikiem bezpieczeństwa, a $V(X)$ wariancją zmiennej losowej X . W ten sposób określone zostały trzy podstawowe rodzaje składek: zasadę wartości oczekiwanej $\pi_E(t)$, wariancji $\pi_V(t)$ oraz odchylenia standardowego $\pi_\sigma(t)$.

Chcąc wyznaczyć wspomniane powyżej składki ubezpieczeniowe, należy znać dwa pierwsze momenty zmiennej losowej $S(t)$. W niektórych przypadkach, dla wybranych funkcji łączących i rozkładów wielkości szkód X , możemy podać dokładne wzory [Barges i in., 2011; Heilpern, 2014]. W pozostałych sytuacjach należy zastosować metody symulacyjne.

W pracy [Barges i in., 2011] wprowadzone zostały wzory na momenty zdyskontowanej, zagregowanej szkody $S_\delta(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} e^{-\delta W_n} X_n$. Wartość oczekiwana zagregowanej, niezdykontowanej szkody ($\delta = 0$), gdy struktura zależności opisana jest funkcją łączącą FGM dana jest wzorem:

$$\mu_1(t) = \lambda m_1 t - 0,5\theta(1 - e^{-2\lambda t})(E_1 - m_1)$$

gdzie $E_1 = \int_0^\infty (1 - F_X(x))^2 dx$. Natomiast drugi moment wynosi:

$$\begin{aligned}\mu_2(t) &= \frac{\theta}{2}(E_2 - m_2 + (E_1 - m_1)(\theta E_1 - m_1(2 + \theta))) + \lambda t(m_2 + 2(E_1 - m_1)m_1\theta) \\ &+ (m_1\lambda t)^2 - \frac{\theta}{2}e^{-2\lambda t}(E_2 - m_2 + (E_1 - m_1)(\theta E_1(1 + 2\lambda t) - m_1(2 + \theta + 2\theta\lambda t)))\end{aligned}$$

gdzie $E_2 = \int_0^\infty 2x(1 - F_X(x))^2 dx$

Dla wykładniczych szkód X o dystrybuancie $F_X(x) = 1 - e^{-\beta x}$, otrzymujemy: $m_1 = 1/\beta$, $m_2 = 2/\beta^2$, $E_1 = 1/(2\beta)$ oraz $E_2 = 1/(4\beta^2)$. Natomiast dla szkód o rozkładzie Pareta z parametrami a i b , tzn. gdy:

$$\begin{aligned}F_X(x) &= 1 - (b/(x + b))^a, \text{ mamy } m_1 = b/(a - 1), m_2 = 2b^2/((a - 1)(a - 2)), \\ E_1 &= b/(2a - 1) \text{ oraz } E_2 = b^2/(1 - 3a + 2a^2).\end{aligned}$$

W przypadku struktury zależności opisanej funkcją łączącą Spearmana pierwszy moment wynosi [Heilpern, 2014]:

$$\mu_1(t) = (1 - \theta)\lambda m_1 t + \theta\lambda \int_0^t e^{-\lambda w}(1 + (t - w)\lambda)l(w)dw$$

a transformata Laplace'a drugiego momentu jest równa:

$$\begin{aligned}(\mu_2)^*(p) &= \frac{\lambda}{p^2}((1 - \theta)m_2 + \theta(p + \lambda)(l^2)^*(p + \lambda)) \\ &+ \frac{2\lambda}{p}((1 - \theta)m_1 + \theta(p + \lambda)l^*(p + \lambda))^2\end{aligned}$$

Chcąc znaleźć dokładną wartość drugiego momentu, należy znać funkcję $l(w)$, czyli rozkład szkód X oraz odwrócić transformatę Lapalce'a. Dla szkód wykładniczych: $m_1 = 1/\beta$, $m_2 = 2/\beta^2$, $l(w) = \lambda w/\beta$, $l^*(p) = \lambda/(\beta p^2)$ oraz $(l^2)^*(p) = 2\lambda^2/(\beta^2 p^3)$. Natomiast dla szkód o rozkładzie Pareto otrzymujemy: $m_1 = b/(a - 1)$, $m_2 = 2b^2/((a - 1)(a - 2))$, $l(w) = b(e^{\lambda w/a} - 1)$, $l^*(p) = \lambda b/(p(ap - \lambda))$ oraz $(l^2)^*(p) = 2(\lambda b)^2/(p((ap)^2 - 3\lambda ap + 2\lambda^2))$.

Dla pozostałych funkcji łączących, m.in. funkcji łączącej Claytona, chcąc znaleźć dwa pierwsze momenty zagregowanej straty $S(t)$, należy skorzystać z metod symulacyjnych.

Przykład 1. Załóżmy, że $\lambda = 5$, $t = 2$ oraz $c = 0,2$.

1. Niech szkody mają rozkład wykładniczy z parametrem $\beta = 0,03$, a struktura zależności opisana jest funkcją łączącą Spearmana. W tabeli 1 podane są wartości oczekiwane zagregowanej szkody $S(t)$, jej wariancje oraz składki wyznaczone zgodnie z zasadami wartości oczekiwanej oraz odchylenia standardowego dla różnych wartości parametru θ . Wartość oczekiwana i wariancja zagregowanej straty opisane są następującymi funkcjami:

$$E(S(t)) = 333,333 - 8,3333\theta$$

$$V(S(t)) = 22222,22 - 5972,222\theta + 69,4444\theta^2$$

Tabela 1. Wartości wybranych składek dla szkód o rozkładzie wykładniczym i Pareta oraz funkcji łączącej Spearmana

θ	Wykładniczy				Pareta			
	$E(S(t))$	$V(S(t))$	w. oczek.	od. st.	$E(S(t))$	$V(S(t))$	w. oczek.	od. st.
0	333,333	22222,22	400	363,148	333,333	33333,33	400	369,848
0,2	326,667	17822,18	392,000	353,367	324,449	26865,61	389,339	357,231
0,4	320,001	13510,95	384,001	343,248	315,565	20554,59	378,679	344,239
0,6	313,334	9288,53	376,001	332,610	306,681	14400,29	368,018	330,682
0,8	306,668	5154,91	368,001	321,027	297,797	8402,71	357,36	316,131
1	300,002	1110,10	360,002	306,665	288,914	2561,83	346,70	299,036

2. Załóżmy teraz, że szkody mają rozkład Pareta z parametrami $a = 4$ i $b = 100$, czyli mają tę samą wartość oczekiwaną jak szkody w a), a struktura zależności opisana jest również funkcją łączącą Spearmana. Otrzymane wartości składek podane są w tab. 1.
3. Rozpatrzmy funkcję łączącą FGM oraz wykładnicze szkody z punktu a). Wartości składek podane są w tab. 2.
4. Niech struktura zależności scharakteryzowana jest funkcją łączącą Claytona, a szkody mają rozkład wykładniczy z punktu a). Tabela 2 zawiera wartości składek otrzymanych na podstawie momentów uzyskanych metodą symulacyjną. W tym przypadku stopień zależności opisany jest współczynnikiem korelacji τ Kendala.

Tabela 2. Wartości wybranych składek dla szkód o rozkładzie wykładniczym i funkcji łączącej FGM oraz Claytona

θ	FGM				τ	Clayton			
	$E(S(t))$	$V(S(t))$	w. oczek.	od. st.		$E(S(t))$	$V(S(t))$	w. oczek.	od. st.
-1/3	336,111	24220,68	403,333	367,237	0	333,310	22124,50	399,972	363,0586
-0,2	335,000	23419,44	402,000	365,607	0,2	327,599	18114,40	393,119	354,5169
-0,1	334,167	22820,14	401,000	364,379	0,4	321,899	14191,40	386,279	345,7245
0	333,333	22222,22	400,000	363,148	0,6	315,869	9920,19	379,043	335,789
0,1	332,500	21625,69	399,000	361,911	0,8	308,501	5486,32	370,201	323,3149
0,2	331,667	21030,56	398,000	360,671	1	300,199	1096,81	360,239	306,8226
1/3	330,556	20239,20	396,667	359,009					

We wszystkich przypadkach otrzymane wartości składek, jak i parametrów zagregowanej straty maleją wraz ze wzrostem stopnia zależności między zmiennymi losowymi W i X .

3. Miary ryzyka

Oprócz funkcjonalów składek ubezpieczeniowych interesować nas będą miary ryzyka, oparte na wartości zagrożonej (ang. *Value at Risk* – VaR). Wartość zagrożona na poziomie istotności α określona jest wzorem:

$$\text{VaR}_\alpha = \inf\{x: F_{S(t)}(x) \geq \alpha\} = F_{S(t)}^{-1}(\alpha)$$

Innymi słowy jest to kwantyl rozkładu zagregowanej straty $S(t)$.

Wartość zagrożona jest popularną miarą ryzyka, często stosowaną w finansach i ubezpieczeniach. Jednak nie jest tzw. koherentną miarą ryzyka [McNeil, Frey, Embrechts, 2005], nie spełnia warunku subaddytywności, ważnego w zagadnieniach dotyczących dywersyfikacji.

Oczekiwany niedobór (ang. *expected shortfall*) określony dla ciągłych zmiennych losowych wzorem:

$$\text{ES}_\alpha = E(S(t) | S(t) > \text{VaR}_\alpha)$$

jest już koherentną miarą ryzyka. Jest to oczekiwana zagregowana szkoda wyznaczona pod warunkiem, że jest ona większa niż wartość zagrożona.

Podstawowe miary ryzyka: wartość zagrożona VaR i oczekiwany niedobór ES wyznaczymy stosując dwie metody. Pierwsza z nich wykorzystuje symulację rozkładu zmiennej losowej $S(t)$, a druga aproksymację opartą na trzech pierwszych momentach tej zmiennej.

Rozkład zmiennej losowej $S(t)$ będziemy przybliżać rozkładem innej zmiennej o znanym rozkładzie i tych samych trzech pierwszych momentach. W przypadku szkód o rozkładach z lekkimi ogonami, np. wykładniczymi, przybliżamy mieszkanką dwóch rozkładów Erlanga, a dla rozkładów o ciężkich ogonach, np. Pareto – uogólnionym rozkładem Pareta.

Dwa pierwsze momenty zmiennej $S(t)$ zostały wyznaczone w rozdziale 2 niniejszej pracy. Postać trzeciego momentu $\mu_3(t) = E(S^2(t))$ podamy w przypadku, gdy struktura zależności między zmiennymi W_i oraz X_i opisana jest funkcją łączącą Spearmana. Zastosujemy w tym celu metodę przedstawioną w pracy Heilperna [2014].

$$\begin{aligned} \mu_3(t) &= E(S^3(t)) = E(E((X_1 + S(t-w))^3 | W = w)) = \\ &= \lambda \int_0^t e^{-\lambda w} E(X^3 | W = w) dw + 3\lambda \int_0^t e^{-\lambda w} E(X^2 | W = w) \mu_1(t-w) dw + \\ &+ 3\lambda \int_0^t e^{-\lambda w} E(X | W = w) \mu_2(t-w) dw + \lambda \int_0^t e^{-\lambda w} \mu_3(t-w) dw \end{aligned} \quad (1)$$

Warunkowe wartości oczekiwane $E(X | W = w) = (1 - \theta)m_1 + \theta l(w)$ oraz $E(X^2 | W = w) = (1 - \theta)m_2 + \theta l^2(w)$ zostały wyznaczone w pracy S. Heilperna [2014]. Natomiast:

$$E(X^3 | W = w) = \int_0^{\infty} x^3 dF(x | w) = (1 - \theta) \int_0^{\infty} x^3 dF_{\Pi}(x | w) + \\ + \theta \int_0^{\infty} x^3 dF_M(x | w) = (1 - \theta)m_3 + \theta l^3(w)$$

Następnie obliczamy transformatę Laplace'a z obydwu stron równania (1) i wyznaczamy z otrzymanego równania transformatę trzeciego momentu:

$$\mu_3^*(p) = \frac{\lambda}{p^2} ((1 - \theta)(m_3 + 3p(m_2\mu_1^*(p) + m_1\mu_2^*(p))) + \\ + \theta(p + \lambda)(3p\mu_2^*(p)l^*(p + \lambda) + 3p\mu_1^*(p)(l^2)^*(p + \lambda) + (l^3)^*(p + \lambda)))$$

Znając rozkłady strat X , możemy, po odwróceniu dystrybuanty, otrzymać trzeci moment $\mu_3(t)$ zagregowanej straty. Dla wykładniczych szkód mamy $m_3 = 6/\beta^3$ oraz $(l^3)(p) = 6\lambda^3/(\beta^3 p^4)$, a szkód o rozkładzie Pareta: $m_3 = 6b^3/((a-1)(a-2)(a-3))$ i $(l^3)(p) = 6(\lambda b)^3/(p(ap-\lambda)(ap-2\lambda)(ap-3\lambda))$.

Zmienną losową $S(t)$ przybliżymy mieszkanką Y dwóch zmiennych losowych o rozkładzie Erlanga o dystrybuancie:

$$F_Y(x) = p_1 F_{Y_1}(x) + p_2 F_{Y_2}(x)$$

gdzie $0 \leq p_i$, $p_1 + p_2 = 1$, a Y_i mają rozkład *gamma* $\Gamma(n, l_i)$, n jest liczbą naturalną (rozkłady Erlanga), $i = 1, 2$. Można pokazać [Tijms, 1994], że klasa mieszanek rozkładów Erlanga jest gęsta w zbiorze wszystkich dodatnich rozkładów ciągłych.

Założmy, że pierwsze trzy momenty μ_i zmiennej Y są takie same jak odpowiednie momenty zmiennej $S(t)$, czyli zachodzą zależności $\mu_i = \mu_i(t)$, dla $i = 1, 2, 3$. M.A. Johnson i M.R. Taaffe [1989] wyznaczyli wartości parametrów n , l_i oraz p_i . Wspólny parametr kształtu n jest najmniejszą liczbą całkowitą spełniającą nierówność:

$$n > \max \left\{ \frac{1}{c^2}, \frac{1/c^3 + 1/c + 2c - \gamma}{\gamma - c + 1/c} \right\}$$

gdzie $c = \sqrt{m_2} / \mu_1$ jest współczynnikiem wariacji, $\gamma = m_3 / (m_2)^{3/2}$ – współczynnikiem skośności, m_i – centralnymi momentami zmiennej Y , a parametry skali wynoszą:

$$l_i = \frac{-B + (-1)^i \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

gdzie $A = n(n+2)\mu_1 y$, $B = -(nx + n(n+2)y^2/(n+1) + (n+2)y\mu_1^2)$, $C = \mu_1 x$, $y = \mu_2 - (n+1)\mu_1^2/n$, $x = \mu_1\mu_3 - (n+2)\mu_2^2/(n+1)$. Natomiast współczynniki wyznaczające mieszanę są równe [Barges i in., 2011; Johnson, Taaffe, 1989]:

$$p_1 = 1 - p_2 = \frac{\mu_1/n - 1/\lambda_2}{1/\lambda_1 - 1/\lambda_2}$$

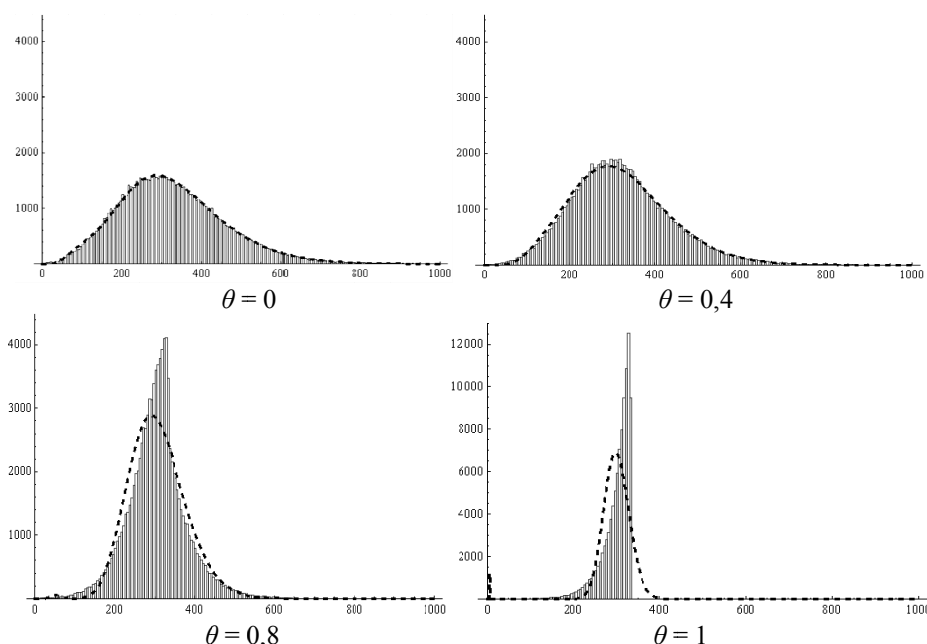
Tabela 3. Wartości miar ryzyka dla szkód o rozkładzie wykładniczym i Pareto

θ	Wykładniczy				Pareto			
	aproxymacja		symulacja		aproxymacja		symulacja	
	VaR	ES	VaR	ES	VaR	ES	VaR	ES
0	753,203	838,208	752,976	831,404	–	–	914,400	1120,940
0,2	698,053	772,592	698,053	768,035	–	–	848,113	1025,100
0,4	638,100	699,226	644,328	708,322	–	–	771,667	930,161
0,6	575,710	625,797	580,095	638,820	653,945	725,812	687,651	849,750
0,8	494,718	528,682	509,628	557,470	568,005	629,515	591,071	716,849
1	372,324	383,834	333,010	333,169	–	–	449,717	530,502

Przykład 2. Załóżmy, że szkody mają rozkład wykładniczy taki jak w przykładzie 1, a struktura zależności opisana jest funkcją łączącą Spearmana. W tabeli 3 podane zostały wartości miar VaR i ES, uzyskane metodą aproksymacyjną i symulacyjną. Przykładowo, dla $\theta = 0,4$ gęstość rozkładu aproksymującego zagregowaną stratę określona jest wzorem:

$$f_{\theta}(x) = 6,8014 \cdot 10^{-18} e^{-0,0534x} x^8 + 1,7773 \cdot 10^{-19} e^{-0,0271x} x^8$$

Na rysunku 1 znajdują się wykresy histogramów rozkładów zagregowanej szkody $S(t)$ otrzymanych metodą symulacyjną dla 100 tys. przebiegów oraz przeskalowanej gęstości rozkładu aproksymacyjnego $f_{\theta}(x)$ dla różnych wartości stopnia zależności θ . Widzimy, że dla małych wartości parametru θ dopasowanie gęstości rozkładu aproksymacyjnego jest lepsze. W przypadku skrajnym, gdy $\theta = 1$, aproksymacji nie należy stosować do wyznaczania tych miar ryzyka. Największa wartość zagregowanej straty nie może przekroczyć wtedy wartości $t\lambda/\beta = 333,333$.



Rys. 1. Histogramy symulowanych i aproksymacyjnych rozkładów $S(t)$

W przypadku, gdy szkody X_i mają rozkład charakteryzujący się ciężkimi ogonami autorzy zastosowali w pracy [Bargers i in., 2011] aproksymację zmiennej $S(t)$ przez uogólniony rozkład Pareta [Bargers i in., 2011; Johnson, Taaffe, 1989]. Jest to rozkład opisany trzema parametrami: $\tau > 0, \gamma > 0, \lambda > 0$ o dystrybuancie:

$$F_Y(y) = \beta\left(\tau, \gamma; \frac{y}{\lambda + y}\right)$$

dla $y > 0$, gdzie $\beta(a, b; x)$ jest niekompletną funkcją *beta* określoną wzorem:

$$\beta(a, b; x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_0^x t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt$$

Parametry tego rozkładu wyznaczamy stosując wzory [Bargers i in., 2011]:

$$\tau = 2 \frac{M_3 - M_2^2}{M_2^2 + M_2 M_3 - 2M_3}, \quad \gamma = \frac{\tau + 1 - 2\tau M_2}{\tau + 1 - \tau M_2}, \quad \lambda = \mu_1 \frac{\alpha - 1}{\tau}$$

gdzie $M_i = \mu_i / \mu_1^i, i = 2, 3$.

Jednak może się zdarzyć, że parametry τ czy γ będą ujemne, wtedy nie można wyznaczyć uogólnionego rozkładu Pareto i zastosować tej aproksymacji. Dzieje się tak w przypadku, gdy rozkład szkód ma rozkład Pareto określony w przykładzie 1b). Jedynie dla $\theta = 0,6$ i $0,8$ można było wyznaczyć ten rozkład, ale i tak aproksymacja nie była zbyt dokładna.

Podsumowanie

W pracy rozpatrywany był złożony proces Poissona, w którym dopuszczono zależność okresu między uszkodzeniami a następną wielkością szkody. Struktura zależności opisana była za pomocą funkcji łączącej. Wyznaczone zostały składki ubezpieczeniowe oparte na momentach zagregowanej szkody oraz podstawowe miary ryzyka: VaR i ES. Wielkości te w zależności od rodzaju funkcji łączącej i rozkładu szkody zostały wyznaczone w sposób dokładny, aproksymacyjny lub symulacyjny.

Literatura

- Barges M., Cossette H., Loisel S., Marceau E. (2011), *On the Moments of Aggregate Discount Claims with Dependence Introduced by FGM Copula*, „ASTIN Bulletin”, No. 41(1).
- Boudreault M., Cossette H., Landiault D., Marceau E. (2006), *On a Risk Model with Dependence Between Interclaim Arrivals and Claim Sizes*, „Scandinavian Actuarial Journal”, No. 5.
- Cossette H., Marceau E., Marri F. (2008), *On the Compound Poisson Risk Model with Dependence Based on a Generalized Farlie-Gumbel-Morgenstern Copula*, „Insurance: Mathematics and Economics”, No. 43.
- Heilpern S. (2007), *Funkcje łączące*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Wrocław.
- Heilpern S. (2012), *Compound Poisson Process with Dependent Interclaim Times and Claim Amounts*, „Śląski Przegląd Statystyczny”, nr 10(16).
- Heilpern S. (2014), *Zależny, złożony proces Poissona – wyznaczanie składek ubezpieczeniowych*, „Śląski Przegląd Statystyczny”, nr 12(18).
- Hürlimann W. (2004), *Multivariate Frechet Copulas and Conditional Value-At-Risk*, „International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences”, No. 7.
- Johnson M.A., Taaffe M.R. (1989), *Matching Moments to Phase Distributions: Mixtures of Erlang Distribution of Common Order*, „Stoch. Models”, No. 5(4).
- McNeil A.J., Frey R., Embrechts P. (2005), *Quantitative Risk Management*, Princeton University Press, Princeton.
- Nelsen R.B. (1999), *An Introduction to Copulas*, Springer, New York.
- Ostasiewicz W. (red.) (2000), *Modele aktuarialne*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Wrocław.
- Rolski T., Schmidli H., Schmidt V., Teugels J. (1999), *Stochastic Processes for Insurance and Finance*, Wiley, New York 1999.
- Tijms H. (1994), *Stochastic Models: An Algorithmic Approach*, Wiley, Chichester.

**DEPENDENT, COMPOUND POISSON PROCESS – COMPUTATION
OF INSURANCE PREMIUMS AND RISK MEASURES**

Summary: The paper is devoted to the compound Poisson process, in which the inter-claim time and the neighboring claim amount may be dependent. The dependent structure is described by the some copulas. The values of the insurance premiums based on the moments of the aggregated claim and basic risk measures: VaR and ES are derived. The exact formulas, approximation and simulations are used to compute these values.

Keywords: compound Poisson process, dependence, copula, insurance premiums, risk measures.