



Witold Rzymowski

Politechnika Lubelska
Wydział Podstaw Techniki
Katedra Matematyki Stosowanej
w.rzymowski@pollub.pl

Agnieszka Surowiec

Politechnika Lubelska
Wydział Zarządzania
Katedra Metod Ilościowych w Zarządzaniu
a.surowiec@pollub.pl

Tomasz Warowny

Politechnika Lubelska
Wydział Zarządzania
Katedra Metod Ilościowych w Zarządzaniu
t.warowny@pollub.pl

PROGNOZOWANIE KURSÓW WALUT ZA POMOCĄ SZARYCH MODELI

Streszczenie: Teoria szarych systemów zaproponowana w 1982 roku przez J. Denga zakłada, że proces modelowania pewnego zjawiska przebiega w warunkach niepełnej (szarej) informacji. Z uwagi na to, że szare modele umożliwiają budowę prognoz na podstawie ultrakrótkich szeregów czasowych, ocena stacjonarności (bądź jej brak) analizowanego szeregu czasowego zmiennej prognozowanej nie jest dokonywana.

W artykule użyto trzech różnych metod estymacji parametrów szarych modeli. Za pomocą uzyskanych modeli dokonano predykcji kursów wybranych walut. Jako miarę użyteczności modelu przyjęto procentowy błąd względny prognoz wygasłych.

Słowa kluczowe: kursy walut, szare modele, estymacja parametrów, predykcja.

JEL Classification: C22, C51, C52, C53, G17.

Wprowadzenie

W ostatnim okresie obserwowana jest duża różnorodność metod w analizie danych finansowych, a w szczególności w analizie finansowych szeregów czasowych. Ukazało się też kilka prac na temat modelowania finansowych szeregów czasowych za pomocą szarych modeli [np. Yue, Wang, 2000; Tsay, 2002; Barczak, 2015; Kayacan, Ulutas, Kaynak, 2010].

Teoria szarych modeli, zapoczątkowana przez J. Denga [1982ab; 1989], jest wykorzystywana przy modelowaniu systemów charakteryzujących się niewielką ilością informacji, tam gdzie informacja jest niepewna lub niekompletna. W klasycznej teorii szeregów czasowych proces modelowania wymaga dostatecznie długich szeregów czasowych. Szare modele (*grey models* – GM) pozwalają formułować prognozy na podstawie bardzo krótkich szeregów czasowych; zakłada się, że wystarczą cztery realizacje [Hsu, Chen, 2003]. Ponadto dane muszą pochodzić z kolejnych okresów o równych długościach. Bardzo ważnym założeniem w modelach GM jest dodatniość prognozowanych zmiennych. Stanowi to ograniczenie, np. dla finansowych szeregów stóp zwrotu. W literaturze przedmiotu zostało przedstawionych wiele propozycji wykorzystania szarych modeli do prognoz, przede wszystkim tzw. modeli pierwszego rzędu z jedną zmienną czasową, oznaczanych symbolem GM(1,1) [Sun, 1991; Tsay, 2002; Hsu, Chen, 2003; Liu, Lin, 2010; Barczak, 2015; Nowak, 2016]. Dla przykładu S. Barczak [2015] przedstawił możliwości zastosowania szarych modeli klasy GM(1,1) w analizie finansowych szeregów czasowych jako alternatywę dla klasycznej teorii szeregów czasowych poprzez pryzmat oceny jakości uzyskiwanych prognoz. Teorię szarych modeli wykorzystali E. Kayacan, B. Ulutas oraz O. Kaynak [2010], dokonując analizy kursu dolara w stosunku do euro i pokazując, że teoria szarych modeli może być z powodzeniem stosowana do celów prognostycznych.

Szare modele klasy GM(1,1) są dwuparametrowymi modelami wykładniczymi. Parametry tych modeli są szacowane zgodnie z metodą zaproponowaną przez J. Denga [1982ab; 1989]. Sposób ten zostanie nazwany **Metoda I**. W niniejszym artykule testowana jest przydatność modeli klasy GM(1,1), których parametry są szacowane prostszymi metodami. Wybrano dwie metody motywowane dwiema obserwacjami.

Rozważmy ciąg wykładniczy $(x_s)_{s=1}^n = (c\lambda^s)_{s=1}^n$, gdzie $c > 0$ i $\lambda > 0$. Wtedy $\frac{x_s}{x_{s-1}} = \lambda$ dla $s = 2, 3, \dots, n$ oraz $c = \frac{x_s}{\lambda^s}$ dla $s = 1, 2, \dots, n$ (obserwacja 1), $\ln x_s = \ln c + (\ln \lambda)s$, $s = 1, 2, \dots, n$ (obserwacja 2).

Rozważmy teraz ciąg $(x_s)_{s=1}^n$ o dodatnich wyrazach. Kierując się powyższymi obserwacjami, tworzymy dwie metody szacowania parametrów modelu wykładniczego ciągu $(x_s)_{s=1}^n$.

Metoda II. Przyjmujemy:

$$\lambda = \frac{1}{n-1} \sum_{s=2}^n \frac{x_s}{x_{s-1}} \text{ oraz } c = \frac{1}{n} \sum_{s=1}^n \frac{x_s}{\lambda^s}.$$

Metoda III. Metodą najmniejszych kwadratów szacujemy parametry a, b modelu liniowego

$$\ln x_s = b + as, s = 1, 2, \dots, n$$

i przyjmujemy: $c = e^b$ oraz $\lambda = e^a$.

Do porównania jakości opisanych trzech metod użyto ciągów średnich dziennych kursów wybranych walut w NBP. W niniejszej pracy analizowane są kursy 13 walut obcych, takich jak: dolar amerykański (USD), dolar australijski (AUD), dolar kanadyjski (CAD), euro (EUR), forint węgierski (HUF), frank szwajcarski (CHF), funt szterling (GBP), jen japoński (JPY), korona czeska (CZK), korona duńska (DKK), korona norweska (NOK), korona szwedzka (SEK) oraz jednostka międzynarodowego funduszu walutowego (XDR) w stosunku do złotego. Dla jena japońskiego oraz forinta węgierskiego analizowany jest kurs 100 jednostek tych walut. W pozostałych przypadkach analizowany jest kurs 1 jednostki danej waluty. Analizy dokonano na podstawie danych z lat 2009-2016. Historyczne dane kursów walut pobrano z archiwum NBP [www 1].

Celem artykułu jest porównanie możliwości modelowania wybranych kursów walut obcych za pomocą szarych modeli przy zastosowaniu trzech różnych metod estymacji parametrów strukturalnych. Budowano i porównywano modele dla różnych długości wektorów danych początkowych i o różnych zasięgach prognoz. Ponadto zbadano, która z przedstawionych metod może być stosowana z większym powodzeniem w prognozowaniu kursów walut.

1. Trzy metody modelowania kursów walut

Niech $(x_t)_{t=1}^N$ oznacza ciąg rzeczywistych liczb dodatnich – kurs wybranej waluty w okresie 2.01.2009 – 30.12.2016.

Ustalamy liczby $n, q \in \mathbb{N}$ spełniające warunki:

$$n \geq 4 \text{ oraz } n + q < N,$$

gdzie:

n – szerokość okna,

q – zasięg prognozy.

Na podstawie przesuwającego się ciągu danych:

$$(x_{t-n+s})_{s=1}^n \text{ dla } t = n, n + 1, \dots, N - q$$

konstruujemy ciąg modeli wykładniczych:

$$x_{t-n+s} = c_{(n,q,t)} \lambda_{(n,q,t)}^s + \varepsilon_{(n,q,t)}(s), s = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

gdzie $t = n, n + 1, \dots, N - q$.

W innym zapisie ten sam przesuwający się ciąg przybiera postać:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n), (x_2, x_3, \dots, x_{n+1}), (x_3, x_4, \dots, x_{n+2}), \dots, \\ (x_{N-q-n+1}, x_{N-q-n+2}, \dots, x_{N-q}).$$

Prognozy obliczamy na podstawie wzoru:

$$\hat{x}_{t+q} = c_{(n,q,t)} \lambda_{(n,q,t)}^{n+q} \text{ dla } t = n, n+1, \dots, N-q.$$

Przechodzimy teraz do opisu każdej z trzech metod szacowania parametrów $c_{(n,q,t)}$, $\lambda_{(n,q,t)}$ modeli wykładniczych (1).

Metoda I to metoda oryginalna, autorstwa J. Denga [1982ab]. Metoda II, najmniej pracochłonna, jest pomysłem autorów niniejszego artykułu. Metoda III jest opisana np. w: [Podgórski, 2001]; nazwano ją tradycyjną.

Metoda I. Model GM(1,1) [Deng, 1989; Hsu, Chen, 2003].

Tworzymy pomocnicze zmienne:

$$z_s(n, q, t) = \frac{1}{2} (\sum_{\sigma=1}^{s-1} x_{t-n+\sigma} + \sum_{\sigma=1}^s x_{t-n+\sigma}), s = 2, 3, \dots, n.$$

Metodą najmniejszych kwadratów szacujemy parametry $a_{(n,q,t)}$, $b_{(n,q,t)}$ modelu liniowego

$$x_s(n, q, t) = a_{(n,q,t)} z_s(n, q, t) + b_{(n,q,t)} + \varepsilon_s(n, q, t), s = 2, 3, \dots, n.$$

Wyznaczamy wartości parametrów $\lambda_{(n,q,t)}$, $c_{(n,q,t)}$:

$$\lambda_{(n,q,t)} = e^{a_{(n,q,t)}} = \exp(a_{(n,q,t)}), \\ c_{(n,q,t)} = \left(x_{t-n+1}(n, q, t) + \frac{b_{(n,q,t)}}{a_{(n,q,t)}} \right) (1 - \lambda_{(n,q,t)}^{-1}) \lambda_{(n,q,t)}^{-1}.$$

Metoda II.

Parametry $\lambda_{(n,q,t)}$, $c_{(n,q,t)}$ wyznaczamy za pomocą wzorów:

$$\lambda_{(n,q,t)} = \frac{1}{n-1} \sum_{s=2}^n \frac{x_{t-n+s}}{x_{t-n+s-1}}, \\ c_{(n,q,t)} = \frac{1}{n} \sum_{s=1}^n x_{t-n+s} \lambda_{(n,q,t)}^{-s}.$$

Metoda III (tradycyjna) [Podgórski, 2001, s. 317].

Szacujemy parametry $a_{(n,q,t)}$, $b_{(n,q,t)}$ modelu

$$\ln x_{t-n+s}(s) = a_{(n,q,t)} s + b_{(n,q,t)} + \varepsilon_s(n, q, t), s = 2, 3, \dots, n$$

i przyjmujemy:

$$\lambda_{(n,q,t)} = e^{a_{(n,q,t)}}, c_{(n,q,t)} = e^{b_{(n,q,t)}}.$$

Uwaga. Modelując ciąg wykładniczy $(c\lambda^s)_{s=1}^n$ metodą II lub III, otrzymamy zawsze (z dokładnością obliczeń numerycznych) wyjściowe parametry c, λ . W przypadku użycia metody I różnice pomiędzy rzeczywistymi parametrami c, λ a ich estymatorami $c_{(n,q,t)}, \lambda_{(n,q,t)}$ mogą być drastyczne.

2. Ocena jakości uzyskanych modeli

- Wyznaczamy procentowy błąd względny prognozy o zasięgu q :

$$\delta_{t+q}(n) = \frac{x_{t+q} - \hat{x}_{t+q}}{x_{t+q}} 100 [\%].$$

- Wyznaczamy wskaźniki:

$$v_k(n), k = 1, 2, 3, 4, 5$$

oraz

$$\xi_k(n) = \frac{v_k(n)}{N-n} 100 [\%], k = 1, 2, 3, 4, 5,$$

gdzie $v_k(n)$ jest liczbą wszystkich błędów $\delta_{t+q}(n)$, $t = n, n+1, \dots, N-q$ spełniających nierówność:

a) $|\delta_{t+q}(n)| < k$ lub

b) $|\delta_{t+q}(n)| \geq k$,

gdzie k jest wyrażone w %.

3. Wyniki

Wybrane wyniki zostały zebrane w tabeli 1 oraz przedstawione na rys. 1, 2, 3. Tabela 1 przedstawia procentowy udział błędów prognoz $\xi_k(n)$ mniejszych niż 1% oraz błędów większych lub równych 5% dla prognozy jednodniowej i dziesięciodniowej na podstawie metod estymacji: I, II i III dla walut USD, AUD, CAD, EUR, HUF, CHF, GBP, JPY, CZK, DKK, NOK, SEK oraz XDR na podstawie danych z okresu 2.01.2009 – 30.12. 2016. Bardziej szczegółowe wyniki analizy zaprezentowano jedynie dla dwóch walut: EUR oraz JPY.

Błędy dla waluty EUR są w wielu przypadkach porównywalne z błędami dla innych walut, zaś kurs JPY jest kursem najmniej przewidywalnym – prognozy są obciążone największymi błędami. Wyniki dotyczą:

1. Badania wpływu szerokości okna na procentowy udział błędów względnych prognoz na podstawie trzech metod: I, II oraz III. Wyniki przedstawiono dla błędów mniejszych niż 1%, uzyskanych dla prognozy jednodniowej. Na rys. 1a wyniki zaprezentowano dla waluty EUR, natomiast na rys. 1b – dla JPY.

- Badania wpływu zasięgu prognozy na procentowy udział błędów względnych prognoz. Wyniki przedstawiono dla błędów mniejszych niż 1%, uzyskanych na podstawie trzech metod: I, II oraz III dla $n = 4$ (rys. 2ab) oraz $n = 25$ (rys. 2cd). Na rys. 2ac wyniki zaprezentowano dla waluty EUR, natomiast na rys. 2bd – dla waluty JPY.
- Badania rozkładu udziału błędów względnych prognoz w zależności od użytej metody estymacji: I, II oraz III. Na rys. 3 wyniki zaprezentowano dla waluty EUR oraz JPY dla zasięgu prognozy $q = 1$, $q = 10$ oraz szerokości okna $n = 4$ i $n = 25$.

Tabela 1. Procentowy udział błędów względnych prognoz $\xi_k(n)$ mniejszych niż 1% oraz błędów równych lub większych niż 5% dla prognozy jednodniowej i 10-dniowej na podstawie metod estymacji: I, II i III dla walut USD, AUD, CAD, EUR, HUF, CHF, GBP, JPY, CZK, DKK, NOK, SEK oraz XDR. Okres analizy 2.01.2009 – 30.12.2016

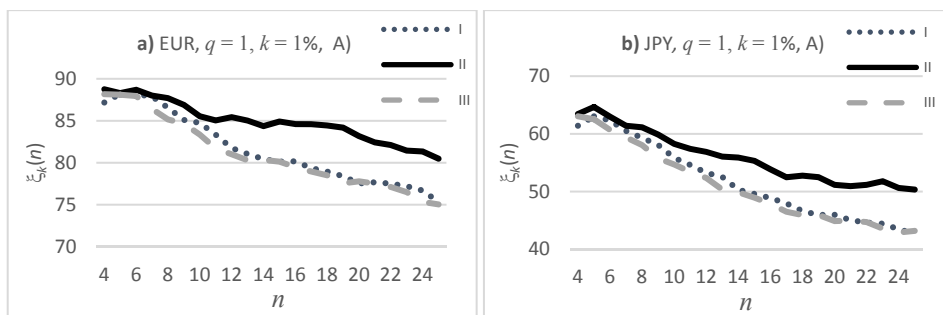
I	2	Zasięg prognozy: 1 dzień						Zasięg prognozy: 10 dni					
		A) $k = 1\%$			B) $k = 5\%$			A) $k = 1\%$			B) $k = 5\%$		
Waluty	n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
		I	II	III	I	II	III	I	II	III	I	II	III
USD	4	67,8	68,8	68,6	0,3	0,2	0,3	15,7	15,7	16,1	41,3	35,0	35,9
	10	62,9	65,3	61,2	0,6	0,3	0,6	20,0	23,6	20,9	24,4	21,5	23,2
	25	47,9	54,0	47,6	1,0	0,5	1,0	23,7	26,8	23,6	17,5	14,4	17,5
AUD	4	75,5	77,0	76,2	0,1	0,1	0,1	15,1	17,0	16,8	35,6	28,2	28,3
	10	70,1	72,1	67,7	0,0	0,0	0,0	23,9	23,2	24,2	17,7	13,3	15,5
	25	53,7	60,7	53,1	0,3	0,0	0,3	25,1	28,4	25,9	12,2	9,0	12,0
CAD	4	73,8	74,9	73,8	0,2	0,1	0,1	15,2	17,9	18,0	36,2	28,1	28,8
	10	67,2	71,0	66,9	0,0	0,0	0,0	21,8	24,6	23,1	17,3	15,2	17,0
	25	52,9	58,9	51,9	0,2	0,1	0,3	23,7	28,5	23,5	11,5	10,2	11,6
EUR	4	87,2	88,8	88,2	0,1	0,1	0,1	25,4	29,7	29,1	18,9	14,6	14,6
	10	84,7	85,5	83,4	0,0	0,0	0,0	36,3	39,0	37,3	6,3	4,0	4,8
	25	75,3	80,5	75,0	0,1	0,1	0,2	40,1	42,2	39,9	2,1	2,5	2,4
HUF	4	89,5	90,5	90,7	0,0	0,0	0,0	24,0	27,7	27,0	16,1	10,7	11,2
	10	86,9	89,0	86,7	0,0	0,0	0,0	34,2	37,4	35,2	5,2	3,5	4,5
	25	73,9	79,5	73,1	0,0	0,0	0,0	43,1	46,4	43,2	3,5	1,6	3,4
CHF	4	78,5	80,2	80,0	0,3	0,7	0,5	19,8	22,9	23,3	30,5	24,2	24,3
	10	75,3	76,2	74,0	0,9	0,6	0,9	28,4	31,0	30,0	14,3	11,3	13,5
	25	64,0	70,0	63,6	1,4	1,1	1,5	31,9	35,1	31,7	7,6	9,0	7,9
GBP	4	75,9	76,4	76,1	0,1	0,1	0,1	15,1	19,1	19,1	35,0	28,6	29,0
	10	69,1	70,8	66,8	0,2	0,0	0,2	24,6	26,6	25,6	17,6	14,8	17,0
	25	55,4	62,0	54,0	0,6	0,4	0,6	27,6	31,1	27,1	10,1	9,3	10,3
JPY	4	61,4	63,4	63,1	0,9	0,7	0,8	11,6	12,8	12,8	48,0	42,1	41,8
	10	55,8	58,3	54,7	1,3	0,9	1,1	16,2	18,2	16,1	31,8	28,6	30,9
	25	42,7	50,4	43,2	2,4	1,4	2,6	21,7	22,8	22,4	22,6	20,3	22,5

cd. tabeli 1

<i>l</i>	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
CZK	4	88,9	90,1	89,8	0,0	0,0	0,0	25,2	29,4	30,0	17,4	11,9	12,3
	10	86,3	88,2	85,0	0,0	0,0	0,0	35,1	39,6	36,2	5,1	3,7	4,5
	25	75,6	80,6	74,3	0,1	0,0	0,1	38,4	43,1	38,6	1,6	1,0	1,6
DKK	4	87,1	88,6	87,9	0,1	0,1	0,1	24,9	29,8	29,4	19,0	14,4	14,6
	10	84,6	85,6	83,4	0,0	0,0	0,0	36,2	39,1	37,1	6,3	3,9	5,0
	25	75,4	80,6	74,9	0,1	0,1	0,2	40,1	42,1	40,3	2,2	2,5	2,5
NOK	4	83,0	83,0	82,4	0,0	0,1	0,1	18,2	21,9	22,1	26,0	20,1	21,0
	10	78,6	80,4	77,4	0,0	0,0	0,1	26,1	30,0	27,5	8,9	7,2	8,1
	25	63,1	69,4	62,5	0,2	0,1	0,2	31,8	34,3	31,4	6,0	4,1	6,0
SEK	4	84,4	86,8	85,8	0,0	0,0	0,0	19,4	24,4	23,4	22,1	16,2	16,7
	10	81,4	84,3	80,9	0,0	0,0	0,0	34,4	34,6	35,7	7,3	5,5	6,5
	25	67,5	73,3	66,7	0,4	0,2	0,4	34,2	35,4	33,7	4,7	2,8	4,5
XDR	4	79,3	80,6	79,7	0,1	0,1	0,1	19,3	20,0	20,4	30,5	24,3	25,2
	10	74,2	75,9	72,7	0,1	0,0	0,2	26,9	29,0	27,8	14,2	10,8	13,1
	25	61,6	68,0	61,1	0,4	0,2	0,4	30,7	35,0	30,7	7,6	6,1	7,5

Objaśnienie:

Zacieniowane komórki odpowiadają udziałom procentowych błędów względnych, w przybliżeniu równym zero.

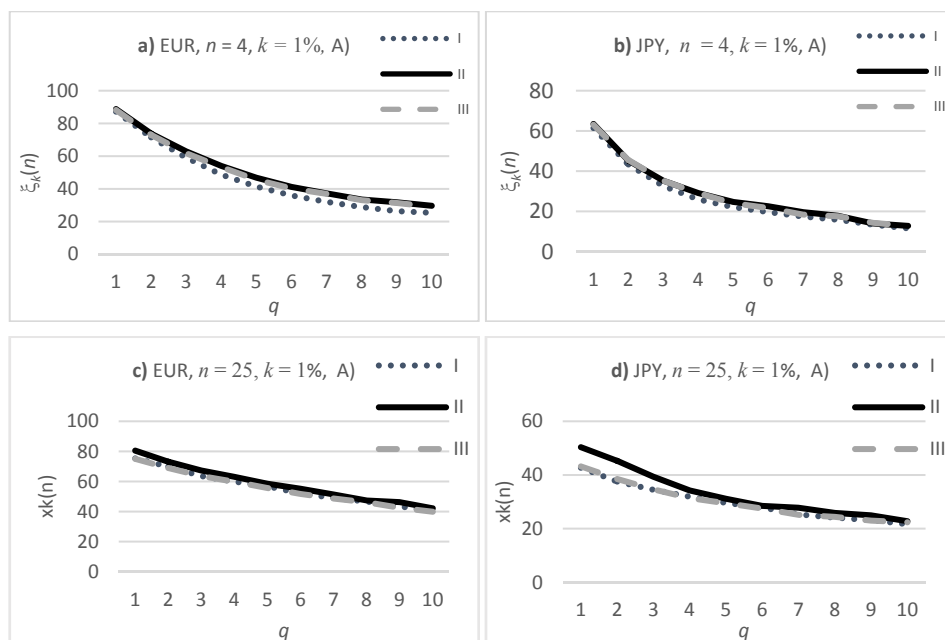


Rys. 1. Procentowy udział błędów względnych prognoz $\xi_k(n)$ mniejszych niż 1% dla prognozy jednodniowej na podstawie metod estymacji I, II i III dla walut EUR oraz JPY w zależności od szerokości okna n . Okres analizy 2.01.2009 – 30.12.2016

Na podstawie tabeli 1 i rys. 1, a także porównując rys. 2a z 2b oraz 2c z 2d, można stwierdzić, że największy udział jednocentowych błędów względnych prognoz dla każdej waluty obserwuje się dla prognozy jednodniowej na podstawie najmniejszej liczby obserwacji ($n = 4$). Im większa liczba obserwacji, na podstawie której budowany jest model szarego szeregu, tym udział błędów względnych prognoz jednodniowych mniejszych niż 1% jest mniejszy.

Analizując udział błędów względnych prognoz jednodniowych równych lub większych niż 5%, można stwierdzić, że jest on niewielki, nieprzekraczający 2,4% dla metody I, 1,4% dla metody II i 2,6% dla metody III. Podane wartości odpowiadają walucie JPY. W przypadku pozostałych walut wartości udziału błędów względnych prognoz jednodniowych równych lub większych niż 5% są mniejsze. W tabeli 1, dla zasięgu prognozy $q = 1$ i $k = 5\%$, zacięniowane komórki odpowiadają udziałom procentowych błędów względnych bliskim zeru, co oznacza, że w danym przypadku nie obserwuje się błędów względnych prognoz jednodniowych równych lub większych niż 5%. Ponadto w tej sytuacji zaobserwowano, że najczęściej wielkość udziału procentowego błędu względnego rośnie wraz ze wzrostem szerokości okna (rys. 3bd).

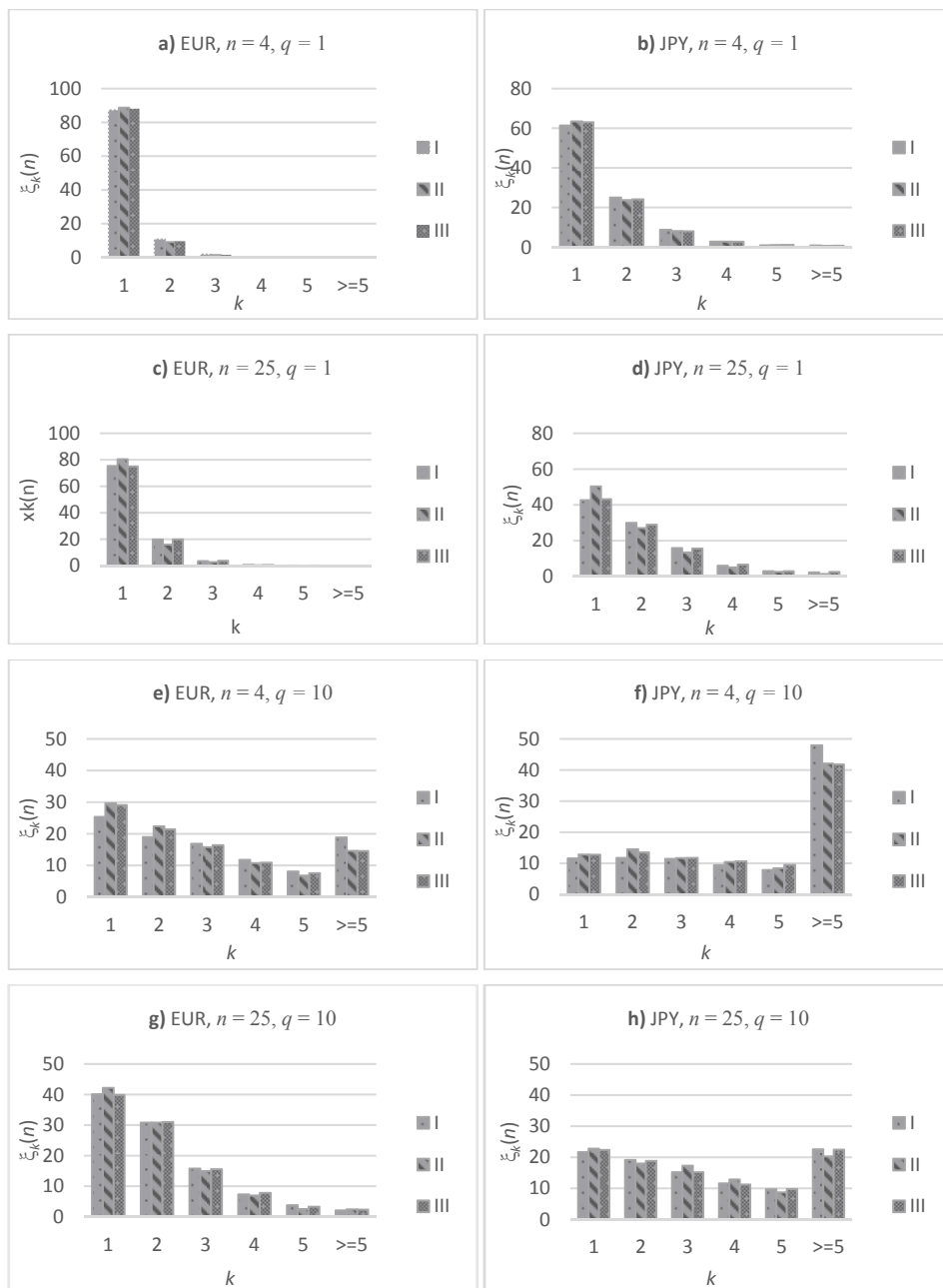
W prognozie o zasięgu dziesięciodniowym procentowy udział błędów względnych prognoz mniejszych niż 1% jest najmniejszy w przypadku szarego modelu uzyskanego na podstawie najmniejszej liczby obserwacji (porównując rys. 3e z 3g oraz rys. 3f z 3h). Tendencja ta jest odwrotna niż w przypadku prognoz o jednodniowym zasięgu. Niestety wartość procentowego udziału błędów względnych prognoz dziesięciodniowych mniejszych niż 1% jest znacząco mniejsza niż w prognozach o jednodniowym zasięgu, zaś wartość procentowego udziału błędów względnych prognoz dziesięciodniowych równych lub większych niż 5% jest znacząco większa niż w przypadku procentowego udziału błędów względnych prognoz jednodniowych (rys. 3). Można zaobserwować, że wraz ze wzrostem liczby obserwacji maleje procentowy udział błędów względnych prognoz dziesięciodniowych większych lub równych 5% (porównując rys. 3e z 3g oraz rys. 3f z 3h). Zestawiając wyniki w tabeli 1 uzyskane dla zasięgu jedno- i dziesięciodniowego z wynikami przedstawionymi na rys. 2, można stwierdzić, że wraz ze wzrostem zasięgu prognozy procentowy udział błędów nieprzekraczających 1% maleje dla każdej waluty niezależnie od metody analizy.



Rys. 2. Procentowy udział błędów względnych prognoz $\xi_k(n)$ mniejszych niż 1% w zależności od zasięgu prognozy dla $n = 4$ oraz dla $n = 25$ na podstawie metod estymacji I, II i III dla walut EUR oraz JPY w zależności od zasięgu prognozy. Okres analizy 2.01. 2009 – 30.12.2016

Opisane powyżej tendencje (zależności wielkości procentowego udziału błędów względnych od n oraz q) są obserwowane dla wszystkich użytych w pracy metod i walut.

Porównując wyniki w tabeli 1, uzyskane na podstawie trzech metod, można zauważyć, że w przypadku niemalże wszystkich walut (wyjątek stanowi waluta HUF), niezależnie od szerokości okna dla zasięgu jednodniowego, najlepsze rezultaty uzyskuje się za pomocą metody II (por. również rys. 1ab oraz rys. 3 abcd) – największy udział błędów nieprzekraczających 1%, najmniejszy udział błędów równych lub większych niż 5%. W prognozach o zasięgu $q = 10$ metoda II również daje najlepsze rezultaty (por. także rys. 3 efg) choć zdarza się, że lepszy wynik otrzymuje się za pomocą metody III.



Rys. 3. Rozkład procentowego udziału błędów względnych prognoz $\xi_k(n)$ w zależności od użytej metody estymacji I, II, III dla walut: EUR oraz JPY dla zasięgu $q = 1$, $q = 10$ i $n = 4$, $n = 25$. Okres analizy 2.01.2009 – 30.12.2016

Udział jednocentowych błędów względnych w prognozie o zasięgu jedno- i dziesięciodniowym, uzyskany na podstawie metod I i III, jest bardzo często porównywalny (rys. 1ab). Dla zasięgu $q = 10$ największy udział błędów względnych większych lub równych niż 5% niemalże dla każdej waluty obserwuje się dla metody I (rys. 3efh).

Analizując wykresy kursów 13 walut w okresie 2.01.2009 – 30.12. 2016, można byłoby podzielić waluty na dwie grupy: te, dla których wykresy charakteryzują się małą zmiennością i te, dla których wykresy wykazują dużą zmienność. Do pierwszej grupy można zaliczyć: EUR, HUF, CZK, DKK, NOK, SEK, natomiast do drugiej: USD, AUD, CAD, CHF, GBP, JPY, XRD. Metoda analizy szarych systemów potwierdza kształt wykresów: udział jednocentowych błędów względnych przekracza 80% dla pierwszej grupy, osiągając największą, ponad 90-proc. wartość, dla waluty HUF dla okna o szerokości $n = 4$. W przypadku drugiej grupy, przy tej samej szerokości okna, najgorszy wynik równy 61,4% osiągany jest dla waluty JPY.

Podsumowanie

Na podstawie uzyskanych wyników można wyciągnąć następujące wnioski:

1. Stosowanie modeli szarych do prognoz kursów walut jest uzasadnione. Można zauważyć, że prognozy są najtrafniejsze dla modeli z oknami o małej szerokości, czyli wystarczy niewielka liczba obserwacji do dokonania predykcji, co więcej, w tym przypadku udział błędów jednocentowych jest największy i dla każdej analizowanej waluty przekracza 60%, niezależnie od wybranej metody estymacji.
2. Błędy prognoz zauważalnie zależą od szerokości okna. Im mniejsze okno, tym mniejsze błędy prognozy jednodniowej. Im większe okno, tym mniejsze błędy prognozy dziesięciodniowej.
3. Najlepsze wyniki można uzyskać metodą II, chociaż różnice w przypadku pozostałych metod nie są bardzo znaczące.
4. Metody II oraz III, podobnie jak metoda I (oryginalna), wykorzystują funkcję wykładniczą. Interesujące może być zastosowanie innych funkcji do konstrukcji szarych modeli.

Literatura

- Barczak S. (2015), *Zastosowania modeli szarych klasy GM(1,1) w analizie finansowych szeregów czasowych. Badania symulacyjne*, „Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego. Finanse, Rynki Finansowe, Ubezpieczenia”, nr 75(862), s. 31-39.
- Deng J. (1982a), *Control Problems of Grey Systems*, “Systems and Control Letters”, Vol. 1, No. 5, s. 288-294.
- Deng J. (1982b), *Grey Control System*, “Journal of Huazhong University of Science and Technology”, Vol. 10, No. 3, s. 9-18.
- Deng J. (1989), *Introduction to Grey System Theory*, “The Journal of Grey System”, Vol. 1, s. 1-24.
- Hsu C.C., Chen C.Y. (2003), *Applications of Improved Grey Prediction Model for Power Demand Forecasting*, “Energy Conversion and Management”, Vol. 44, s. 2241-2249.
- Kayacan E., Ulutas B., Kaynak O. (2010), *Grey System Theory-based Models in Time Series Prediction*, “Expert Systems with Applications”, No. 37, s. 1784-1789.
- Liu S., Lin Y. (2010), *Grey Systems. Theory and Applications*, Springer, Berlin-Heidelberg.
- Nowak M. (2016), *Zastosowanie szarego modelu GM(1,1) w predykcji krótkich szeregów finansowych na przykładzie przedsiębiorstw sektora produkcji materiałów budowlanych*, „Zeszyty Naukowe Politechniki Poznańskiej”, nr 70, s. 155-163.
- Podgórski J. (2001), *Statystyka dla studiów licencjackich*, PWE, Warszawa.
- Sun G. (1991), *Prediction of Vegetable Yields by Grey Model GM(1,1)*, “The Journal of Grey System”, Vol. 2, s. 187-197.
- Tsay R. (2002), *Analysis of Financial Time Series*, Wiley&Sons, Chicago.
- Yue C.L., Wang L. (2000), *Grey-Markov Forecast of the Stock Price*, “System Engineering”, Vol. 16, No. 3, s. 54-59.
- [www 1] http://www.nbp.pl/home.aspx?f=/kursy/arch_a.html (data dostępu: 19.01.2017).

THE APPLICATION OF THE GREY SYSTEMS IN THE PREDICTION OF CURRENCY EXCHANGE RATES

Summary: The purpose of this article is to present the possibilities of using the grey models theory in the prediction of short financial time series on the example of chosen currencies exchange rates. The period of analysis includes data from the years 2009-2016. In the article, three different methods of parameters estimation of grey models are used. On the basis of these three methods the prediction results with an analysis of the relative errors are presented. The influence of the chosen parameters on the prediction result are investigated.

Keywords: exchange rate, grey model, parameter estimation, prediction.