



Monika Miśkiewicz-Nawrocka

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach
Wydział Zarządzania
Katedra Statystyki, Ekonometrii i Matematyki
monika.miskiewicz@ue.katowice.pl

EFEKTYWNOŚĆ PORTFELI INWESTYCYJNYCH ZBUDOWANYCH Z WYKORZYSTANIEM NAJWIĘKSZEGO WYKŁADNIKA LAPUNOWA I WYKŁADNIKA HURSTA

Streszczenie: Badania nad zbudowaniem optymalnego portfela inwestycyjnego, zapoczątkowane w latach 50. ubiegłego wieku przez H. Markowitza, przyczyniły się do istotnego rozwoju dyscypliny naukowej, jaką jest analiza portfelowa. Prowadzone od tamtego czasu badania dostarczyły i wciąż dostarczają nowych narzędzi oraz podejść służących do wyznaczania udziałów instrumentów finansowych w portfelu, np. wskaźniki analizy fundamentalnej czy narzędzia do identyfikacji chaosu deterministycznego. Nowym podejściem zaproponowanym przez autora jest wykorzystanie w budowie portfela optymalnego zmodyfikowanej funkcji celu, zawierającej wariancję portfela i największy wykładnik Lapunowa lub wykładnik Hursta. Celem artykułu jest zbudowanie oraz ocena efektywności portfeli optymalnych wyznaczonych na podstawie zmodyfikowanej postaci funkcji celu.

Słowa kluczowe: analiza portfelowa, największy wykładnik Lapunowa, wykładnik Hursta, szeregi czasowe.

JEL Classification: C3, C8, G11, E4.

Wprowadzenie

Deterministyczne układy o skomplikowanej dynamice, którą dziś nazwano by chaotyczną, były znane już pod koniec XIX w. W latach 1890-1899 J.H. Poincaré, pisząc o mechanice nieba, wprowadził pojęcia punktów homoklinicznych i trajektorii homoklinicznych układu dynamicznego, których istnienie pociąga pojawienie się skomplikowanych struktur geometrycznych oraz bardzo skomplikowanej (chaotycznej) dynamiki układu [Zawadzki, 1996]. Sformułowanie po

raz pierwszy w literaturze przez T.Y. Li i J.A. Yorke'a [1975] definicji deterministycznego chaosu spowodowało intensywny rozwój badań w zakresie nieliniowych układów dynamicznych. Prowadzone przez lata badania ujawniły nowe, nieznane wcześniej własności dynamiki nieliniowej. Wykazano, że proste nieliniowe układy dynamiczne mogą mieć bardzo skomplikowaną i nieregularną dynamikę [Orzeszko, 2005]. Dodatkowo w latach 70. XX teorię chaosu wśród wielu badaczy różnych dyscyplin naukowych spopularyzowało odkrycie E. Lorenza, który w 1963 r. zidentyfikował ważną cechę układów chaotycznych – wrażliwość układu na zmianę warunków początkowych [www 1]. Obecnie narzędzia teorii chaosu stosuje się do identyfikacji chaosu w układach dynamicznych, odróżniania szeregów chaotycznych od losowych, prognozowania dynamiki układów nieliniowych, a w ostatnim okresie również do wyznaczania udziałów instrumentów finansowych w portfelu optymalnym [Miśkiewicz-Nawrocka, 2016; Miśkiewicz-Nawrocka, Zeug-Żebro, 2017ab]. Prowadzone do tej pory badania wykazały, że portfele zbudowane z wykorzystaniem narzędzi teorii chaosu uzyskiwały niejednokrotnie wyższe stopy zwrotu niż portfele zbudowane klasycznymi metodami czy też indeks WIG20.

Nowym podejściem zaproponowanym przez autora jest zastosowanie zmodyfikowanej funkcji celu, zawierającej wariancję portfela i największy wykładnik Lapunowa lub wykładnik Hursta do konstrukcji portfela optymalnego. Wykładniki Lapunowa są miarą wrażliwości układu na zmianę warunków początkowych. Im większa wartość dodatniego wykładnika, tym większa wrażliwość układu na zmianę warunków początkowych, a także większy poziom chaosu. Wykładnik Hursta służy do rozróżniania szeregów losowych (przypadkowych) od szeregów losowych z obciążonym błędzeniem przypadkowym oraz identyfikacji chaosu deterministycznego w szeregach czasowych.

Celem artykułu jest próba dywersyfikacji ryzyka portfeli inwestycyjnych, do budowy których zastosowano największy wykładnik Lapunowa i wykładnik Hursta, a także ocena efektywności otrzymanych portfeli na podstawie ich rzeczywistych stóp zwrotu. W badaniach pod uwagę wzięto spółki wchodzące w skład indeksu WIG20, które w momencie budowania portfela były notowane na GPW w Warszawie przynajmniej od 10 lat. Optymalne portfele zostały zbudowane na koniec każdego roku w okresie od 1.01.2004-30.12.2015.

1. Wykładnik Hursta

Wykładnik Hursta H jest charakterystyką nieliniowych szeregów czasowych, która bada występowanie efektu długiej pamięci. Pozwala na rozróżnienie szeregów losowych (przypadkowych) od szeregów losowych z obciążonym błędzeniem przypadkowym. Przyjmuje wartości z przedziału $[0,1]$. Jeśli szereg ma charakter błędzenia przypadkowego, to $H = 0,5$ (szereg losowy). Wówczas terażniejsze wartości szeregu nie mają wpływu na przyszłe. Wartość wykładnika różna od 0,5 oznacza, że obserwacje nie są niezależne. Każda obserwacja przechowuje pamięć o wcześniejszych zdarzeniach. Jeżeli $0 \leq H < 0,5$, szereg jest antypersystentny (ergodyczny), czyli występują ujemne korelacje pomiędzy kolejnymi wyrazami szeregu. Takie szeregi mają największe prawdopodobieństwo zmian, natomiast ryzyko, jakie niesie za sobą taki szereg, jest największe. Im wykładnik jest bliższy zera, tym zachowanie szeregu jest bardziej chaotyczne. W przypadku szeregu, dla którego $0,5 < H \leq 1$, szereg jest persystentny, czyli wzmacniający trend. Występują dodatnie korelacje pomiędzy kolejnymi obserwacjami szeregu. Siła zachowań wzmacniających trend jest tym większa, im H jest bliższe jedności. Z kolei im H jest bliższe 0,5, tym wyższy poziom szumu w szeregu i tym mniej określony jest trend [Mastalerz-Kodzis, 2003].

Algorytm szacowania wykładnika Hursta jest następujący [Chun, Kim, Kim, 2002]:

Rozważmy szereg czasowy złożony z N obserwacji $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$.

1. Zamieniamy powyższy szereg obserwacji w $M = N - 1$ logarytmicznych stóp zwrotu według wzoru:

$$y_k = \log\left(\frac{x_{k+1}}{x_k}\right), k = 1, 2, \dots, N. \quad (1)$$

2. Dzielimy szereg (1) na m części złożonych z n elementów:

$$m = [M/n],$$

gdzie $[]$ oznacza część całkowitą argumentu.

Jeśli iloraz M/n nie jest liczbą całkowitą, to $mn < M$. W tym przypadku, w dalszej części algorytmu użyjemy wartości y_k dla $k = 1, 2, \dots, mn$.

3. Definiujemy wartość:

$$z_{ij} = y_{ij} - \bar{y}_i,$$

gdzie y_{ij} oznacza j -tą wartość w i -tym przedziale:

$$\bar{y}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_{ij}, i = 1, 2, \dots, m. \quad (2)$$

4. Dla każdego i ciąg sum częściowych z_{ij} wyraża się wzorem:

$$u_{ij} = \sum_{j=1}^i z_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

Zauważmy, że u_{ij} jest skumulowanym odchyleniem od wartości średniej dla pierwszych j wartości w przedziale i .

5. Zakres i -tego przedziału definiujemy jako:

$$R_i = \max_j(u_{ij}) - \min_j(u_{ij}). \quad (4)$$

6. Unormowana wartość zakresu dla i -tego przedziału i częściowego rozmiaru n jest dana wzorem:

$$\rho_{in} = R_i / S_i, \quad (5)$$

gdzie:

$$S_i = \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n z_{ij}^2 \right)^{1/2}. \quad (6)$$

Obliczając średnią ρ_{in} , uzyskamy wynik analizy R/S :

$$\rho_n = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \rho_{in}. \quad (7)$$

7. Następnie powtarzamy obliczenia, zwiększając długość przedziału o jedną jednostkę. Iterację kontynuujemy do momentu, aż n osiągnie górną granicę:

$$n_{\max} = [M/2]. \quad (8)$$

8. Dla każdego n szacujemy $\ln n$ oraz $\ln \rho_n$. Otrzymane wartości przedstawiamy na wykresie zależności $\ln \rho_n$ od $\ln n$, a następnie szacujemy współczynnik kierunkowy prostej regresji $\ln \rho_n$ względem $\ln n$. Nachylenie wykresu logarytmów ρ_n do osi logarytmów n jest szukaną wartością H .

2. Największy wykładnik Lapunowa

Największy wykładnik Lapunowa jest jednym z podstawowych narzędzi teorii nieliniowych układów dynamicznych, służącym do odróżniania szeregów chaotycznych od losowych. Dodatnia wartość największego wykładnika Lapunowa oznacza wrażliwość układu na zmianę warunków początkowych, jednak nie jest warunkiem wystarczającym obecności chaosu w badanym układzie. Oprócz wykładnika Lapunowa do identyfikacji chaosu najczęściej wykorzystuje się wymiar korelacyjny, który weryfikuje obecność determinizmu – kolejnej cechy dynamiki chaotycznej. Jako uzupełnienie stosuje się test BDS, analizę przeskalowanego zakresu R/S , a także entropię.

Układ dynamiczny (X, f) jest wrażliwy na zmianę warunków początkowych, jeżeli istnieje liczba $\varepsilon > 0$ spełniająca warunek, że dla każdego $x \in X$ oraz dla każdego otoczenia U punktu x istnieją $y \in U$ oraz $n \geq 1$, takie że:

$$\|f^n(x) - f^n(y)\| > \varepsilon, \quad (9)$$

gdzie f^n jest n -krotnym złożeniem odwzorowania f [Devaney, 1987; Wiggins, 1990 za: Zawadzki, 1996].

Układ dynamiczny jest zatem wrażliwy na zmianę warunków początkowych, jeżeli po skończonej liczbie kroków odległość pomiędzy dwoma dowolnymi bliskimi punktami $x, y \in S$ zwiększy się o więcej niż ε .

Dla układów dynamicznych z czasem dyskretnym (X, f) , $X \subset \mathbb{R}^m$, $f: X \rightarrow X$ ($m \geq 1$) opisanych za pomocą równań rekurencyjnych pierwszego rzędu postaci:

$$x_{t+1} = f(x_t), \quad t = 0, 1, 2, \dots, \quad (10)$$

gdzie x_t, x_{t+1} oznaczają stan układu w chwilach odpowiednio t i $t + 1$, wykładniki Lapunowa są zdefiniowane jako granice [Zawadzki, 1996]:

$$\lambda_i(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |\mu_i(n, x_0)|, \quad i = 1, \dots, m \text{ dla } m \geq 1, \quad (11)$$

gdzie:

$\mu_i(n, x_0)$ – wartości własne macierzy $Df^n(x_0)$,

$Df^n(x_0)$ – macierz Jacobiego odwzorowania f^n równa:

$$Df^n(x_0) = Df(x_{n-1}) \cdot \dots \cdot Df(x_1) Df(x_0),$$

gdzie:

$$Df(x) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right], \quad f_i - \text{składowe odwzorowania } f,$$

$i, j = 1, 2, \dots, m$.

Wykładniki Lapunowa mierzą średnie tempo rozbieżności trajektorii dwóch początkowo bliskich sobie punktów przestrzeni stanów. Dla m -wymiarowego układu dynamicznego istnieje m wykładników Lapunowa. Największy wykładnik Lapunowa pokazuje w przybliżeniu, ile razy średnio w jednej iteracji zwiększa się lub zmniejsza odległość między sąsiednimi (początkowo bliskimi sobie) trajektoriami. Gdy największy wykładnik Lapunowa jest ujemny i jednakowy dla wszystkich (prawie wszystkich) punktów przestrzeni stanów X , układ dynamiczny generowany przez odwzorowanie f nie jest wrażliwy. Kiedy wykładnik jest dodatni, układ jest wrażliwy na zmianę warunków początkowych.

Dla rzeczywistych szeregów czasowych, gdy nie jest znana funkcja generująca f , oszacowanie największego wykładnika Lapunowa należy poprzedzić rekonstrukcją przestrzeni stanów układu dynamicznego generowanego za pomo-

ca szeregu obserwacji. Jedną z metod rekonstrukcji jest zanurzanie rzeczywistej przestrzeni układu w przestrzeń współrzędnych opóźnionych czasowo – metoda opóźnień [Packard i in., 1980; Takens, 1981]. Rekonstrukcja atraktora polega na zanurzeniu szeregu czasowego w przestrzeń o wyższym wymiarze. Odbywa się to poprzez odtworzenie trajektorii układu w wielowymiarowej przestrzeni wektorowej. Wektorami tej przestrzeni są ciągi kolejnych obserwacji, tzw. d -historie, które powstają w wyniku przesunięcia oryginalnego szeregu czasowego $\{x_1, \dots, x_N\}$ o pewną stałą wartość opóźnienia czasowego τ . Elementami zrekonstruowanej d -wymiarowej przestrzeni stanów są więc d -wymiarowe punkty (d -historie) zwane wektorami opóźnień, dane wzorem:

$$x_i^d = (x_i, x_{i-\tau}, x_{i-2\tau}, \dots, x_{i-(d-1)\tau}).$$

Dla rzeczywistych szeregów czasowych największy wykładnik Lapunowa szacuje się na podstawie zależności [Kantz, Schreiber, 2004]:

$$\Delta_n = \Delta_0 \cdot e^{n\lambda_{\max}}, \tag{12}$$

jako współczynnik kierunkowy równania regresji [Kantz, Schreiber, 2004; Orzeszko, 2005]:

$$\ln \Delta_n = \ln \Delta_0 + \lambda_{\max} n, \tag{13}$$

gdzie:

Δ_0 – odległość (w sensie odległości euklidesowej) pomiędzy dwoma dowolnymi początkowo bliskimi punktami zrekonstruowanej przestrzeni stanów,

Δ_n – odległość pomiędzy tymi samymi punktami po n krokach iteracji,

λ_{\max} – największy wykładnik Lapunowa.

Szczegółowy algorytm przebiega według następujących etapów [Kantz, Schreiber, 2004]:

1. Wyznaczamy zbiory Z_t złożone z K najbliższych sąsiadów $\hat{x}_{t_j}^d$ wektorów opóźnień \hat{x}_t^d , spełniających warunek $|t - t_j| > t^*$, gdzie t^* jest ustaloną liczbą naturalną. Dodany warunek zwiększa prawdopodobieństwo, że znaleziony sąsiad nie będzie należał do trajektorii wektora \hat{x}_t^d .
2. Obliczamy:

$$r_n(t) = \frac{1}{K} \sum_{\hat{x}_{t_j}^d \in Z_t} |x_{t+n} - x_{t_j+n}|, t = 1, 2, \dots, M; n = 0, 1, \dots, n_{\max}, \tag{14}$$

gdzie $M = N - (d - 1)\tau$, n_{\max} jest ustaloną liczbą naturalną, określającą liczbę iteracji.

3. Wyznaczamy średnią z $r_n(i)$ po wszystkich d -historiach:

$$r_n = \frac{1}{M} \sum_{t=1}^M r_n(t). \quad (15)$$

4. Największy wykładnik Lapunowa jest współczynnikiem regresji:

$$\ln(r_n) = \ln(r_0) + \lambda_{\max} n. \quad (16)$$

Dla szeregów chaotycznych nachylenie prostej regresji wykresu ilustrującego zależność $\ln \Delta_n$ od numeru iteracji n w początkowej fazie powinno być dodatnie. λ_{\max} szacuje się z wykorzystaniem zbioru punktów należących do tego obszaru. Zatem oszacowana wartość λ_{\max} zależy nie tylko od wyboru metryki, liczby najbliższych sąsiadów, wymiaru zanurzenia, ale także od ustalonej wartości n_{\max} , dla której współczynnik regresji jest dodatni [Kantz, Schreiber, 2004].

3. Optymalny portfel akcji

Podstawowymi charakterystykami opisującymi portfele akcji są: oczekiwana stopa zwrotu portfela oraz ryzyko portfela, liczone za pomocą wzorów:

$$R_p = \sum_{i=1}^m x_i R_i, \quad (17)$$

$$S_p^2 = \sum_{i=1}^m x_i^2 S_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m x_i x_j S_i S_j \rho_{ij}, \quad (18)$$

gdzie:

R_p – oczekiwana stopa zwrotu portfela m akcji,

s_p – ryzyko portfela m akcji,

R_i – oczekiwana stopa zwrotu i -tej akcji,

S_i – odchylenie standardowe stóp zwrotu akcji i -tej spółki,

ρ_{ij} – współczynnik korelacji i -tej akcji z j -tą akcją,

x_i – udział i -tej akcji w portfelu,

$$\sum_{i=1}^m x_i = 1, \quad x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (19)$$

gdzie:

m – liczba akcji w portfelu.

Udziały akcji w portfelu zazwyczaj wyznacza się na podstawie modelu H. Markowitza [1952], tak aby zminimalizować ryzyko tego portfela. W tym przypadku zadanie optymalizacji jest następującej postaci.

Zadanie 1

$$\min S_p^2 \tag{20}$$

z warunkami ograniczającymi:

$$\begin{aligned} R_p &\geq R_0 \\ \sum_{i=1}^m x_i &= 1 \\ x_i &\geq 0, i = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

gdzie:

R_0 – oczekiwana stopa zwrotu dla spółek (średnia oczekiwanych stóp zwrotu),
pozostałe oznaczenia – jw.

Propozycją autora jest budowa portfeli optymalnych z wykorzystaniem narzędzi teorii nieliniowych układów dynamicznych – największego wykładnika Lapunowa oraz wykładnika Hursta. W tym celu należy rozwiązać następujące zadania optymalizacyjne.

Zadanie 2

$$\min(S_p^2 - \sum_{i=1}^m H_i x_i) \tag{21}$$

z warunkami ograniczającymi:

$$\begin{aligned} R_p &\geq R_0 \\ \sum_{i=1}^m x_i &= 1 \\ x_i &\geq 0, i = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

gdzie:

H_i – wykładnik Hursta dla szeregu czasowego generowanego przez ciąg notowań akcji i -tej spółki,
pozostałe oznaczenia – jw.

Zadanie 3

$$\min(S_p^2 - \sum_{i=1}^m \lambda_{\max i} x_i) \tag{22}$$

z warunkami ograniczającymi:

$$\begin{aligned} R_p &\geq R_0 \\ \sum_{i=1}^m x_i &= 1 \\ x_i &\geq 0, i = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

gdzie:

$\lambda_{\max i}$ – wykładnik Lapunowa dla szeregu czasowego generowanego przez ciąg notowań akcji i -tej spółki,
pozostałe oznaczenia – jw.

Ponadto w artykule zostaną również rozwiązane zadania zaproponowane w pracach autorstwa Miśkiewicz-Nawrockiej i Zeug-Żebro [2017ab]:

Zadanie 4

$$\max \left(\sum_{i=1}^m H_i x_i \right) \quad (23)$$

z warunkami ograniczającymi:

$$\begin{aligned} R_p &\geq R_0 \\ \sum_{i=1}^m S_i x_i &\leq S_0 \\ \sum_{i=1}^m x_i &= 1 \\ x_i &\geq 0, i = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

gdzie:

S_0 – odchylenie standardowe stóp zwrotu dla spółek (średnia odchyłeń standardowych stóp zwrotu),
pozostałe oznaczenia – jw.

Zadanie 5

$$\max \left(\sum_{i=1}^m \lambda_{\max i} x_i \right) \quad (24)$$

z warunkami ograniczającymi:

$$\begin{aligned} R_p &\geq R_0 \\ \sum_{i=1}^m S_i x_i &\leq S_0 \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^m x_i = 1$$
$$x_i \geq 0, i = 1, \dots, m,$$

gdzie:

oznaczenia – jw.

Dodatkowo jako zadanie 6 w analizach pod uwagę wzięto portfele o równych udziałach akcji.

4. Badania empiryczne

W analizie empirycznej wzięto pod uwagę spółki wchodzące w skład indeksu WIG20, które w momencie budowy optymalnego portfela były notowane na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie przynajmniej od 10 lat. Optymalne portfele akcji zostały wyznaczone na koniec każdego roku w okresie 2004-2015, a zatem analizowane szeregi czasowe pochodziły z okresu 1.01.1994-30.12.2015.

W celu wyznaczenia wartości największego wykładnika Lapunowa oraz wykładnika Hursta dla analizowanych spółek uwzględniono szeregi czasowe utworzone z logarytmów dziennych stóp zwrotu cen zamknięcia w okresie 1.01.1994-30.12.2015. Na podstawie przedstawionych powyżej algorytmów za pomocą autorskiego programu napisanego w języku programowania Delphi oszacowano wartości największego wykładnika Lapunowa, a przy użyciu programu GRETl – wartości wykładnika Hursta dla każdego z rozważanych szeregów czasowych.

W kolejnym etapie badania zbudowano 72 optymalne portfele akcji, rozwiązując przedstawione wyżej zadania optymalizacyjne (Zadanie 1 – Zadanie 6) na koniec każdego roku w okresie 2004-2015. Do obliczenia udziałów poszczególnych spółek w portfelu wykorzystano narzędzie *solver* – dodatek do arkusza kalkulacyjnego Excel. Następnie oszacowano stopę zwrotu i ryzyko każdego portfela oraz rzeczywistą roczną stopę zwrotu. Rozwiązania zadań optymalizacyjnych 2 i 3 umieszczono w tabelach 1-2. Na koniec 2005 r. nie utworzono portfela będącego rozwiązaniem Zadania 3, ponieważ dla spółek branych pod uwagę w tym roku wartości największego wykładnika Lapunowa były ujemne. Szczegółowe wyniki rozwiązania zadań 1 i 4-6 można znaleźć w pracach: [Miśkiewicz-Nawrocka, Zeug-Żebro, 2017ab].

Tabela 1. Stopa zwrotu, ryzyko i udziały akcji w wyznaczonych portfelach będących rozwiązaniem Zadania 2

Rok	2004		2005		2006		2007	
	BPH	0,2000	BPH	0,3288	BPH	0,2807	BPH	0,2602
	BZW	0,4000	BZW	0,4000	KTY	0,4000	KGHM	0,4000
	DBC	0,4000	MBK	0,2712	MBK	0,3193	MBK	0,3398
Oczekiwana st. zwrotu	0,000178		-0,001342		-0,001615		0,006364	
St. zwrotu	0,376390		0,376390		0,084759		-0,631280	
Wariancja	0,000109		0,000112		0,000147		0,012790	
Ryzyko	0,010429		0,010605		0,012124		0,113094	
Rok	2008		2009		2010		2011	
	ACP	0,1213	ACP	0,1939	BZW	0,0882	BHW	0,4000
	BZW	0,1749	BZW	0,0625	KGHM	0,4000	KGHM	0,4000
	CERS	0,1072	CERS	0,0172	MBK	0,4000	MBK	0,2000
	KGHM	0,1029	CEZ	0,2173	TPSA	0,1118		
	MBK	0,0011	KGHM	0,0334				
	PEO	0,1299	PEO	0,2591				
	PND	0,1890	TPSA	0,2166				
	TPSA	0,1738						
Oczekiwana st. zwrotu	0,003393		-0,000392		0,110813		0,001486	
St. zwrotu	0,532257		0,054087		-0,191911		0,613140	
Wariancja	0,000178		0,000091		0,000233		0,000444	
Ryzyko	0,013339		0,009518		0,015277		0,021076	
Rok	2012		2013		2014		2015	
	BHW	0,4000	BHW	0,4000	KGHM	0,4000	LTS	0,4000
	BRS	0,4000	KGHM	0,2572	LPP	0,2000	MBK	0,2665
	KGHM	0,0741	MBK	0,3428	MBK	0,4000	PKN	0,3335
	MBK	0,1259						
Oczekiwana st. zwrotu	-0,000816		-0,000181		0,000318		0,333798	
St. zwrotu	0,267511		0,029901		-0,249822		0,143249	
Wariancja	0,000179		0,000260		0,000180		0,000138	
Ryzyko	0,013391		0,016132		0,013401		0,011752	

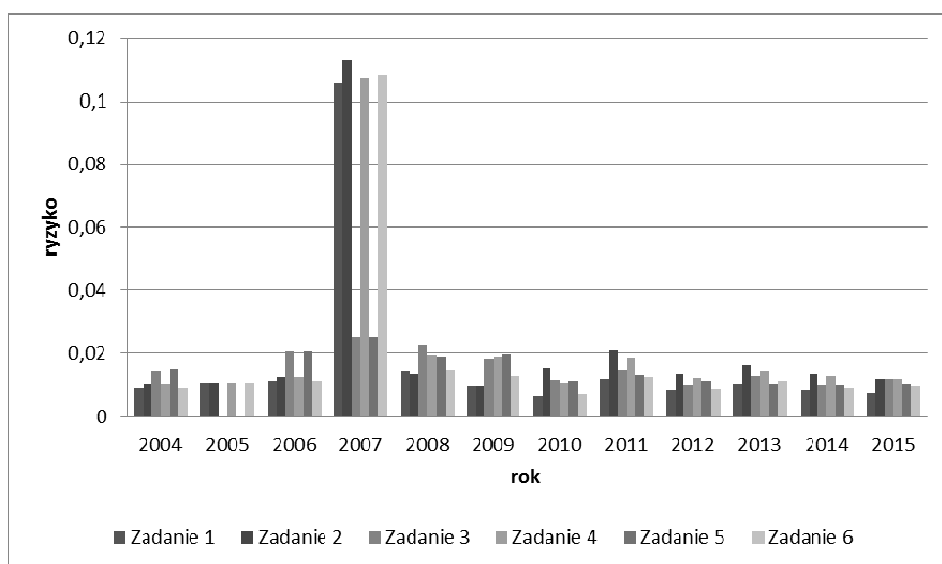
Tabela 2. Stopa zwrotu, ryzyko i udziały akcji w wyznaczonych portfelach będących rozwiązaniem Zadania 3

Rok	2004		2005		2006		2007	
	BPH	0,0508			BPH	1,0000	BZW	1,0000
	BZW	0,9492						
Oczekiwana st. zwrotu	-0,000484				-0,000536		-0,000122	
St. zwrotu	0,463132				-0,001619		-0,550317	
Wariancja	0,000201				0,000425		0,000646	
Ryzyko	0,014192				0,020619		0,025414	
Rok	2008		2009		2010		2011	
	ACP	0,1213	ACP	0,1939	BZW	0,0882	BHW	0,4000
	BZW	0,1749	BZW	0,0625	KGHM	0,4000	KGHM	0,4000
	CERS	0,1072	CERS	0,0172	MBK	0,4000	MBK	0,2000
	KGHM	0,1029	CEZ	0,2173	TPSA	0,1118		
	MBK	0,0011	KGHM	0,0334				
	PEO	0,1299	MBK	0,0000				
	PND	0,1890	PEO	0,2591				
	TPSA	0,1738	PKN	0,0000				
			TPSA	0,2166				
Oczekiwana st. zwrotu	0,004331		-0,000484		-0,000360		0,000906	
St. zwrotu	0,753743		0,243767		-0,164216		0,587425	
Wariancja	0,000512		0,000331		0,000130		0,000215	
Ryzyko	0,022627		0,018201		0,011399		0,014662	
Rok	2012		2013		2014		2015	
	BHW	0,4000	BHW	0,4000	KGHM	0,4000	LPP	-0,2665
	BRS	0,4000	KGHM	0,2572	LPP	0,2000	LTS	0,4000
	KGHM	0,0741	MBK	0,3428	MBK	0,4000	MBK	0,2665
	MBK	0,1259					PKN	0,3335
Oczekiwana st. zwrotu	-0,000465		-0,000377		0,000147		0,000818	
St. zwrotu	0,300249		0,031664		-0,258632		0,091854	
Wariancja	0,000100		0,000156		0,000099		0,000138	
Ryzyko	0,009987		0,012499		0,009930		0,011728	

Na podstawie danych przedstawionych w tabelach 1-2 można stwierdzić, że najwyższe stopy zwrotu R_p dla portfeli będących rozwiązaniem Zadań 2 i 3 uzyskano w latach 2008 i 2011. Portfele otrzymane w wyniku rozwiązania Zadania 3 charakteryzują się większymi rocznymi stopami zwrotu portfela w większości przypadków. Wyjątek stanowią lata: 2006, 2011, 2014 i 2015, gdzie wyższe stopy zwrotu odnotowano dla portfeli będących rozwiązaniem zadania optymalizacyjnego 2. Dla portfeli optymalizacyjnych, będących rozwiązaniem zadań 2 i 3, uzyskano kilkakrotnie wyższe rzeczywiste roczne stopy zwrotu niż oczekiwane stopy zwrotu. Wyjątek stanowią lata: 2007, 2010, 2014 (dla których rze-

czywista stopa zwrotu była ujemna) oraz dla portfela, którego udziały oszacowano na podstawie zadania optymalizacyjnego 2 – 2015 r. Ponadto portfele będące rozwiązaniem Zadań 2 i 3 są obciążone relatywnie niskimi poziomami ryzyka przy osiągniętych rzeczywistych stopach zwrotu. Wyjątek stanowią portfele z lat: 2007, 2010 i 2014, dla których uzyskano ujemne rzeczywiste stopy zwrotu. Najwyższe poziomy ryzyka dla zadań optymalizacyjnych 2 i 3 odnotowano w 2007 r., przy jednoczesnych najniższych ujemnych rzeczywistych rocznych stopach zwrotu. W większości przypadków portfele oszacowane na podstawie Zadania 2 charakteryzowały się wyższym poziomem ryzyka niż portfele uzyskane poprzez rozwiązanie Zadania 3.

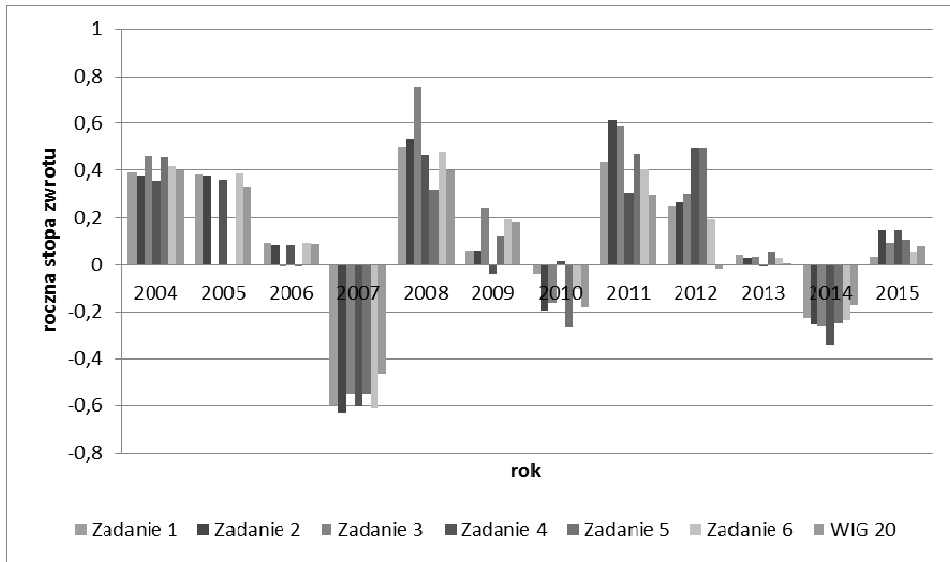
Na rys. 1. przedstawiono ryzyko zbudowanych portfeli w latach 2004-2015.



Rys. 1. Ryzyko zbudowanych portfeli inwestycyjnych w latach 2004-2015

Analizując dane zawarte na rys. 1, można stwierdzić, że w latach: 2007 i 2011-2015 najwyższym poziomem ryzyka charakteryzowały się portfele zbudowane na podstawie zadań optymalizacyjnych 2 oraz 4, natomiast w latach: 2004-2006, 2008-2009 – portfele oszacowane na podstawie Zadań 3 i 5. Największy poziom ryzyka dla wszystkich portfeli odnotowano w 2007 r.

Na rys 2. dokonano porównania rocznych stóp zwrotu zbudowanych portfeli ze stopą zwrotu indeksu giełdowego WIG20 w latach 2004-2015. Dodatkowo oszacowano skumulowane stopy zwrotu dla wszystkich portfeli oraz indeksu WIG20. Wyniki zaprezentowano na rys. 3.



Rys. 2. Roczne stopy zwrotu zbudowanych portfeli oraz indeksu WIG20

Analizując roczne stopy zwrotu dla wyznaczonych portfeli akcji i indeksu WIG20 w latach 2004-2015 (rys. 2), należy zauważyć, że największy zysk można było uzyskać, inwestując w 2008 r. w portfel zbudowany w oparciu o zmodyfikowaną funkcję celu uwzględniającą największy wykładnik Lapunowa (zadanie 3), a następnie w 2011 r., wybierając portfele będące rozwiązaniem Zadań 2 i 3. Warto zwrócić uwagę, że w latach 2010-2015 stopy zysku uzyskane przez portfele, będące rozwiązaniem zadań opartych na największym wykładniku Lapunowa (Zadanie 3 i Zadanie 5) oraz wykładniku Hursta (Zadanie 2 i Zadanie 4) były jednymi z najwyższych. Na podstawie danych zawartych na rys. 1 można zauważyć, że prawie w każdym roku oszacowane portfele optymalne dają wyższe stopy zwrotu niż indeks WIG20. Wyjątek stanowią lata 2007 i 2014, kiedy uzyskano ujemne stopy zwrotu dla każdego z portfeli.

Na podstawie danych zawartych na rys. 3 można zauważyć, że proponowane podejścia wyznaczania portfeli optymalnych oparte na wykładniku Hursta dają lepsze rezultaty na rynku byka (2004-2006, 2009-2014) niż na rynku niedźwiedzia (2008, 2015).



Rys. 3. Skumulowane (10-letnie) stopy zwrotu zbudowanych portfeli oraz indeksu WIG20

Oszacowane 10-letnie stopy zwrotu dla rozpatrywanych strategii pokazały, że najbardziej opłacalne okazało się inwestowanie w portfel będący rozwiązaniem Zadania 3 – zmodyfikowana funkcja celu z wykorzystaniem wykładnika Lapunowa (1,0642), następnie Zadania 1 (0,9011) i Zadania 6 (0,8320). Najgorsze w długim terminie okazały się strategie inwestycyjne oparte na Zadaniu 5 (maksymalizacja największych wykładników Lapunowa) i Zadaniu 4 (maksymalizacja wykładników Hursta), dla których 10-letnie stopy zwrotu wyniły odpowiednio 0,3699 i 0,6561. W tym okresie stopa zwrotu z indeksu WIG20 wyniosła 0,6813.

Podsumowanie

Zastosowanie narzędzi nieliniowych układów dynamicznych, jakimi są: największy wykładnik Lapunowa oraz wykładnik Hursta, wydaje się ważnym elementem badań dotyczących analizy portfelowej. Przeprowadzone analizy pokazały, że zaproponowane zadania optymalizacji oparte na największym wykładniku Lapunowa oraz wykładniku Hursta niejednokrotnie dają lepsze lub tak samo dobre wyniki, jak inne klasyczne metody. Warto zatem przeprowadzić dodatkowe badania analizujące wpływ zastosowania innych miar teorii nieliniowych układów dynamicznych na konstrukcję portfeli optymalnych.

Literatura

- Chun S.H., Kim K.J., Kim S.H. (2002), *Chaotic Analysis of Predictability versus Knowledge Discovery Techniques: Case Study of the Polish Stock Market*, "Expert Systems", Vol. 19, No. 5, s. 264-272.
- Devaney R.L. (1987), *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Addison-Wesley Publishing Company, Redwood City.
- Kantz H., Schreiber T. (2004), *Nonlinear Time Series Analysis*, 2nd edition, Cambridge University Press, Cambridge.
- Li T.Y., Yorke J.A. (1975), *Period Three Implies Chaos*, "The American Mathematical Monthly", Vol. 82, No. 10, s. 985-992.
- Mastalerz-Kodzis A. (2003), *Modelowanie procesów na rynku kapitałowym za pomocą multifraktali*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Katowice.
- Markowitz H. (1952), *Portfolio Selection*, "Journal of Finance", Vol. 7, No. 1, s. 77-91.
- Miśkiewicz-Nawrocka M. (2016), *Efektywność strategii inwestycji w akcje spółek notowanych na GPW w Warszawie z wykorzystaniem największego wykładnika Lapunowa oraz wykładnika Hursta* [w:] J. Mika, M. Miśkiewicz-Nawrocka (red.), *Metody i modele analiz ilościowych w ekonomii i zarządzaniu*, cz. 8, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego, Katowice, s. 46-57.
- Miśkiewicz-Nawrocka M., Zeug-Żebro K. (2017a), *The Efficiency of Stocks Investment Strategy with the Use of Chosen Measures of Deterministic Chaos to Building Optimal Portfolios*, Proceedings of 35th International Conference Mathematical Methods in Economics, Hradec Králové.
- Miśkiewicz-Nawrocka M., Zeug-Żebro K. (2017b), *The Evaluation of The Effectiveness of a Long-term Stocks Investment Strategy Based On the Largest Lyapunov Exponent*, 11th International Scientific Conference on Financial Management of Firms and Financial Institutions, Ostrava.
- Orzeszko W. (2005), *Identyfikacja i prognozowanie chaosu deterministycznego w ekonomicznych szeregach czasowych*, PTE, Warszawa.
- Packard N.H., Crutchfield J.P., Farmer J.D., Shaw R.S. (1980), *Geometry from a Time Series*, "Physical Review Letters", Vol. 45, s. 712-716.
- Takens F. (1981), *Detecting Strange Attractors in Turbulence* [w:] D.A. Rand, L.S. Young (eds.), *Dynamical Systems and Turbulence*, Springer-Verlag, Berlin, s. 366-381.
- Wiggins S. (1990), *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Springer-Verlag, New York.
- Zawadzki H. (1996), *Chaotyczne systemy dynamiczne. Elementy teorii i wybrane zagadnienia ekonomiczne*, Zeszyty Naukowe Akademii Ekonomicznej w Katowicach, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Katowice.
- [www 1] <https://plato.stanford.edu/entries/chaos/#BriHisCha> (dostęp: 1.09.2017).

THE EFFICIENCY OF INVESTMENT PORTFOLIOS BUILT ON THE BASIS OF THE LARGEST LAPUNOV EXPONENT AND HURST EXPONENT

Summary: Initiated in the 1950s of the last century by H. Markowitz research on building the optimal portfolio investment contributed to the significant development of scientific discipline, which is the portfolio analysis. Studies conducted since then have provided and still provide new tools and approaches for determining the shares of financial instruments in the portfolio, eg. indicators of fundamental analysis, or tools for identifying deterministic chaos. The new approach proposed by the author is the use an modified objective function containing a portfolio variance and the largest exponent of Lapunov or the Hurst exponent in the construction of optimal portfolio. The purpose of the article is to build and evaluate the efficiency of optimal portfolios designated on the basis of a modified form of the objective function.

Keywords: portfolio analysis, largest Lyapunov exponent, Hurst exponent, time series.