



Grażyna Trzpiot

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach
Wydział Informatyki i Komunikacji
Katedra Demografii i Statystyki Ekonomicznej
grazyna.trzpiot@ue.katowice.pl

Justyna Majewska

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach
Wydział Informatyki i Komunikacji
Katedra Demografii i Statystyki Ekonomicznej
justyna.majewska@ue.katowice.pl

MODELOWANIE RYZYKA DŁUGOWIECZNOŚCI – UJĘCIE REGIONALNE

Streszczenie: W pracy poruszamy kwestię specyficznego ryzyka długowieczności, które polega na tym, że dana osoba dożyje dłuższego wieku, niż oczekiwała, co spowoduje całkowite lub częściowe wyczerpanie zasobów materialnych, jakie zgromadziła na starość (tzw. bankructwo emerytalne). Wykorzystano koncepcję znaną z nowoczesnych finansów – wartości zagrożonej – do oszacowania prawdopodobieństw bankructw emerytalnych dla wszystkich województw Polski. Do tego celu przedstawiono tablice trwania życia z 2013 r.

Słowa kluczowe: specyficzne ryzyko długowieczności, tablice trwania życia, prawdopodobieństwo ruiny, geometryczny ruch Browna.

Wprowadzenie

Każdy żyjący człowiek zmierzy się z indywidualnym ryzykiem długowieczności – z ryzykiem specyficznym, które może doprowadzić do wyczerpania jego zasobów finansowych i doprowadzić do ruiny, zwanym bankructwem emerytalnym [Milevsky, 2006; Trzpiot i Majewska, 2015]. Projekcje dalszego przeciętnego trwania życia są następujące: „mężczyzna lub kobieta w dowolnym wieku żyjący lub żyjąca obecnie może oczekiwać (...), że przeżyje średnio o 10 lat dłużej niż przeciętnie żył mężczyzna lub żyła kobieta z generacji ich rodziców i o 20 lat dłużej niż przedstawiciele generacji ich dziadków” [prof. dr James W. Vaupel, Max Planck Institute for Demographic Research, Rostock, Germany]. Ryzyko długowieczności stanowi bardzo poważny problem dla polityki społecznej, a zwłaszcza systemów emerytalnych. Celem pracy jest przedstawienie koncepcji wyko-

rzystania wartości zagrożonej do modelowania specyficznego ryzyka długowieczności. W kontekście wypłat emerytur wykorzystujemy VaR jako prawdopodobieństwo zdarzenia, że emeryt zbankrutuje przed śmiercią (takie prawdopodobieństwo nazywamy prawdopodobieństwem ruiny).

1. Przeciętne dalsze trwanie życia w Polsce – zróżnicowanie przestrzenne

Przeciętne dalsze trwanie życia to miara statystyczna służąca do ustalenia liczby miesięcy, w których przeciętnie będzie pobierana emerytura. Średnie dalsze trwanie życia dla wieku emerytalnego jest ustalane wspólnie dla mężczyzn i kobiet i podawane w formie tablic dalszego trwania życia, corocznie przez GUS w terminie do dnia 31 marca. Na podstawie tablic ustalana jest wysokość emerytur na wnioski złożone od dnia 1 kwietnia do dnia 31 marca.

Życie ludzkie wydłuża się znacznie szybciej, niż przewiduje obowiązująca wcześniejsza prognoza demograficzna GUS do 2035 r. W 2012 r. przewidywana długość życia urodzonego Polaka wyniosła 72,7 lat, Polki – 81 lat. Według prognoz demografów, takiego wieku mieli dożywać mężczyźni urodzeni po 2015 r., a kobiety po 2020 r.

Ogłoszona przez GUS w 2014 r. prognoza ludności Polski do 2050 r. zgodna jest z ogólną tendencją światową (tabela 1).

Tabela 1. Oczekiwana długość życia dla kobiet – prognoza na lata 2020-2050

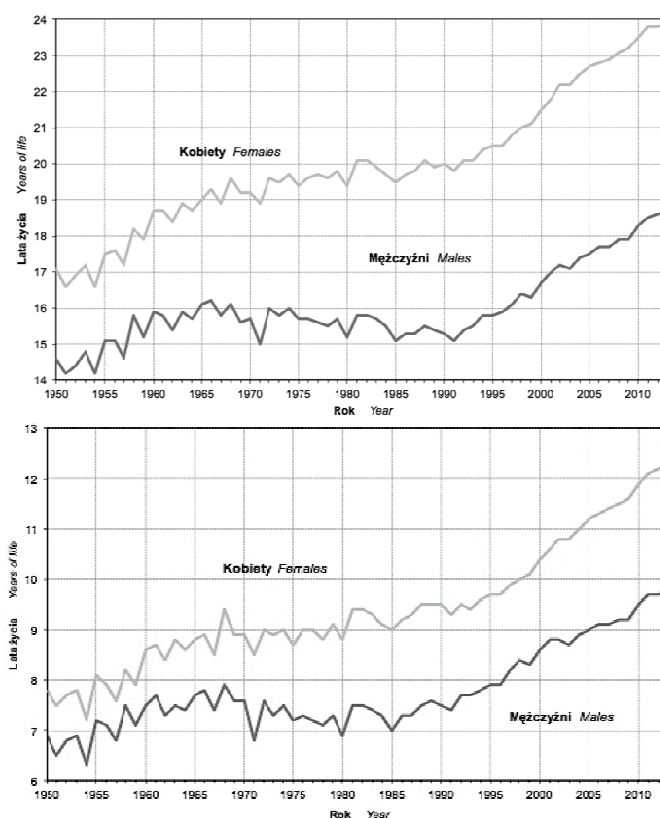
Lata	2020	2025	2030	2035	2040	2045	2050
Mężczyźni	74,6	75,9	77,3	78,4	79,5	80,8	82,1
Kobiety	82,1	83,0	84,0	84,8	85,6	86,5	87,5

Źródło: Opracowanie własne na podstawie Prognoza GUS [2014].

W prognozach demograficznych nie przewidziano tak dynamicznych zmian trendu długowieczności. Jeśli więc na podstawie tablic dalszego trwania życia została niedoszacowana długość życia osób starających się o emeryturę, to będą one pobierać świadczenia dłużej niż przewidywano. To z kolei oznacza, że będziemy potrzebowali na emerytury więcej pieniędzy, niż planuje się w dłuższej perspektywie. Potrzebne będzie więcej zasobów finansowych nie tylko na emerytury, ale także na opiekę nad osobami starszymi czy rozwój domów opieki dla seniorów.

Wydłużanie się życia w Polsce determinuje kilka czynników. Przede wszystkim sprzyja temu rosnące wykształcenie. Zdecydowanie zwiększyła się liczba osób z dyplomem wyższej uczelni. Takie osoby na ogół lepiej dbają o swoje zdrowie.

Polacy żyją dłużej również dzięki postępowi w medycynie oraz dostępności do tych osiągnięć w ramach Unii Europejskiej. W efekcie obecnie przeciętne życie mężczyzn jest o 6,8 lat dłuższe niż w najgorszej pod tym względem dekadzie lat 90. 1991 r. W przypadku kobiet przeciętne życie jest dłuższe o 5,9 lat (zob. rys. 1). W porównaniu z połową ubiegłego stulecia Polacy żyją dziś o 16,6 lat dłużej, a kobiety o 19,3 lat dłużej.



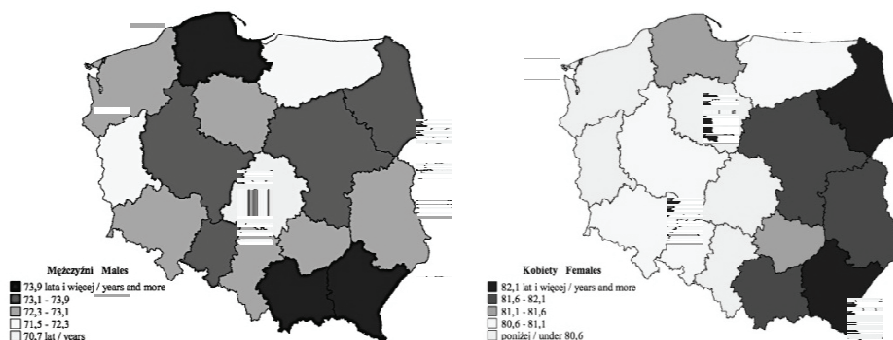
Rys. 1. Przeciętne dalsze trwanie życia osób w wieku 60 lat (góra) oraz w wieku 75 lat (dół)

Źródło: *Trwanie życia w 2013 r.*, GUS.

Notowane w latach 50. wydłużanie się przeciętnego trwania życia mężczyzn w starszym wieku uległo zahamowaniu w latach 60. Ponowny jego wzrost rejestrowano dopiero od połowy lat 80. Tym samym, w latach 1950-2013, dalsze trwanie życia 60-lątka wydłużyło się tylko o 4,1 lat (do 18,7 lat), a 75-lątka o 2,9 lat (do 9,8 lat). Wśród kobiet w tym wieku notowano stałą poprawę parametrów trwania życia. Dalsze trwanie życia 60-letniej kobiety wydłużyło się w latach 1950-2013 o 6,8 lat (do 23,9 lat), natomiast 75-letniej kobiety o 4,5 lat (do 12,3 lat) (por. rys. 1).

W ostatniej dekadzie ubiegłego stulecia obserwowano istotny postęp w wydłużaniu się przeciętnego trwania życia we wszystkich województwach. Ta korzystna tendencja utrzymuje się nadal. Szczególnie dotyczy to mężczyzn zamieszkałych w województwie pomorskim, dla których w latach 1990-2013 średnie trwanie życia wydłużyło się o 8,1. W okresie tym najniższy wzrost notowano w województwie łódzkim (5,4) i lubelskim (5,9). Dla kobiet największy przyrost parametrów trwania życia zanotowano także w województwie pomorskim (6,5), natomiast najmniejszy w województwie lubelskim (5,2) [GUS, 2014].

W Polsce występuje duże zróżnicowanie przeciętnego trwania życia w przekroju wojewódzkim. W 2013 r. rozpiętość między najwyższym a najniższym wskaźnikiem wśród 16 województw wynosiła dla mężczyzn 4,1 lat. Najkrócej żyli mężczyźni mieszkający na terenie województwa łódzkiego (70,7 lat), natomiast najdłużej w województwie podkarpackim i małopolskim (74,8 lat). Wśród kobiet zróżnicowanie jest mniejsze i wynosi 2,3 roku. Kobiety żyją najkrócej w województwie lubuskim, łódzkim i śląskim (80,1 lat). Kobiety w województwach podkarpackim i podlaskim dożywają wieku ponad 82,2 lat. Ogólnie można stwierdzić, że we wszystkich województwach leżących na terenach Polski wschodniej i południowo-wschodniej przeciętne trwanie życia kobiet jest wyższe od średniej krajowej (rys. 2).



Rys. 2. Przeciętne trwanie życia w wieku 60 lat według województw w 2013 r.

Źródło: *Trwanie życia w 2013 r.*, GUS.

2. Specyficzne ryzyko długowieczności

Ze względu na niepewność co do przyszłego spadku śmiertelności i zwiększania się przewidywanej długości życia, fundusze emerytalne i instytucje wypłacające dożywotnie emerytury kapitałowe są narażone na ryzyko długowiecz-

ności, w zmieniających się warunkach demograficznych muszą zapewnić kolejnym rocznikom wypłatę świadczeń dożywotnich po zakończeniu aktywności zawodowej. Aby ograniczyć ryzyko niespodziewanego wzrostu wysokości zobowiązań, organy regulacyjne i decydenci powinni zadbać, aby fundusze emerytalne i instytucje wypłacające dożywotnie emerytury kapitałowe korzystały z regularnie uaktualnianych tabel umieralności uwzględniających przyszły spadek śmiertelności i zwiększanie się przewidywanej długości życia [OECD Pension Outlook, 2014].

Według Międzynarodowego Stowarzyszenia Nadzorów Ubezpieczeniowych IAIS (2014) ponoszący ryzyko długowieczności – rządy państw, fundusze emerytalne i ubezpieczyciele na życie – będą musieli płacić dodatkowo od 450 mln do 1 mld USD łącznie za każdy rok niedoszacowania długowieczności.

Ryzyko długowieczności dotyczy zarówno jednostek, jak i całych roczników demograficznych. Indywidualne, specyficzne ryzyko długowieczności polega na tym, że dana osoba dożyje dłuższego wieku niż oczekiwała, co spowoduje całkowite lub częściowe wyczerpanie zasobów materialnych, jakie zgromadziła na starość [Pitacco i in., 2009]. W tym przypadku możemy co najwyżej mówić o ryzyku w znaczeniu neutralnym (możliwość osiągnięcia wyniku różnego od zamierzonego). Istnieje też zagregowane ryzyko długowieczności polegające na tym, że w danym roczniku (kohorcie) średnia długość życia będzie dłuższa niż przewidywano. Inaczej mówiąc, jest to ryzyko niewłaściwego oszacowania przyszłego trendu współczynnika śmiertelności [Bartkowiak, 2011; Trzpiot, Majewska, 2015]. Łącznie indywidualne i zagregowane ryzyko długowieczności stanowi całkowite ryzyko długowieczności [por. Blake i in., 2010].

Indywidualne ryzyko długowieczności, którego realizacja może przynieść dotkliwe negatywne następstwa dla poszczególnych jednostek, nie stanowi jednak zagrożenia dla stabilności finansowej systemów emerytalnych.

3. Finansowy plan emerytalny a prawdopodobieństwo ruiny

W finansowych planach systemu emerytalnego pojawiają się dwa zasadnicze pytania: ile zaoszczędzić podczas fazy akumulacji kapitału emerytalnego i ile wydawać rocznie w fazie dekulacji?

Biorąc pod uwagę losowe aspekty przedstawionego problemu, analogiczne podejście znajdujemy na rynku kapitałowym – wartość narażona na ryzyko, *Value at Risk*. VaR wyznacza stratę, która może się pojawić przy zadanym prawdopodobieństwie (poziomie tolerancji). W kontekście wypłat emerytur spojrzenie to może być wykorzystane jako prawdopodobieństwo zdarzenia, że emeryt-uczestnik umrze przed wyczerpaniem środków (takie prawdopodobieństwo nazywamy prawdopodobieństwem ruiny).

Zakładamy, że plan emerytalny jest stochastycznym procesem – geometrycznym ruchem Browna B_t z dryfem μ oraz zmiennością σ (np. Malliaris and Brock, 1982). Wysokość kapitału S_t w czasie t

$$S_t = S_0 \cdot e^{B_t(\mu, \sigma)} = S_0 \cdot e^{\mu t + \sigma B_t} \quad (1)$$

W szczególności rozkład S_t jest log-normalny.

Drugim aspektem losowości planu emerytalnego jest liczba lat, jaką mają do przeżycia w ciągu roku osoby w wieku x ukończonych lat (oznaczana przez T_x), którą w najprostszy sposób modeluje się przy założeniu, że natężenie umieralności λ_x jest funkcją wykładniczą:

$${}_t p_x = \exp\left\{-\int_x^{x+t} \lambda_x ds\right\} = e^{-\lambda_x t} \quad (2)$$

${}_t p_x$ jest prawdopodobieństwem przeżycia roku przez osobę w wieku x ukończonych lat. Przeciętne dalsze trwanie życia osoby w wieku x ukończonych lat zapisujemy jako:

$$e_x = E(T_x) = \frac{1}{\lambda_x} \quad (3)$$

Z (1) i (2) otrzymujemy bieżącą wysokość świadczenia emerytalnego PV_x

$$PV_x = \int_0^{T_x} e^{-(\mu t + \sigma B_t)} dt \quad (4)$$

Ostatecznie, zapisujemy prawdopodobieństwo ruiny [Dufresne, 1990; Milevsky, 1997; Milevsky, 2006] jako

$$P(PV_x > w) = P\left(\int_0^{T_x} e^{-(\mu t + \sigma B_t)} dt > w\right) \quad (5)$$

Na potrzebę oszacowania prawdopodobieństwa ruiny stosuje się następujące przybliżenie

$$P(PV_x > w) \sim \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^{1/w} z^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{z}{\beta}\right) dz = 1 - \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^w y^{-(\alpha+1)} \exp\left(-\frac{1}{\beta y}\right) dy$$

gdzie $\alpha = \frac{2\mu + 4\lambda_x}{\sigma^2 + \lambda_x} - 1$, $\beta = \frac{\sigma^2 + \lambda_x}{2}$ oraz $\Gamma(\alpha)$ jest funkcją gamma

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} z^{\alpha-1} e^{-z} dz.$$

4. Analiza symulacyjna prawdopodobieństwa ruiny – zróżnicowanie regionalne

Proces stochastyczny opisany w rozdz. 3 stanowi podstawę do oszacowania prawdopodobieństw ruiny dla województw w Polsce. Dysponujemy dwoma rodzajami danych:

- dane finansowe: techniczna stopa procentowa, która decyduje o wysokości składki netto na ubezpieczenie (inaczej zysk, jaki towarzystwa zakładają, że osiągnie z inwestycji), w badaniu określamy stopę techniczną na poziomie 2,25%,
- tablice trwania życia w poszczególnych województwach Polski w 2013 r. w podziale na kobiety i mężczyzn (na podstawie www.stat.gov.pl).

Wyznaczono prawdopodobieństwa ruiny dla osób w wieku 60 lat w zależności od założonych poziomów wydatkowania emerytury l/w (tj. 0,01; 0,02; 0,03; ...; 0,1), gdzie w oznacza zgromadzone środki w momencie przejścia na emeryturę w wieku x . Dla przykładu poziom 0,06 oznacza, że przy zgromadzonej kwocie 500 000 zł wysokość miesięczna emerytury będzie wynosić 2500 zł. Rozważamy trzy scenariusze strategii inwestycyjnych w zależności od poziomu parametru dryfu i parametru zmienności [za Cipra, 2010]:

$\mu = 1\%$ $\sigma = 5\%$ – strategia konserwatywna inwestycyjna,

$\mu = 2,25\%$ $\sigma = 5\%$ – strategia legislacyjna inwestycyjna,

$\mu = 5\%$ $\sigma = 10\%$ – strategia efektywna inwestycyjna.

Wyniki oszacowań prawdopodobieństw ruiny w podziale na płeć oraz strategię inwestycyjne przedstawiają tabele 2-6.

Przy założeniu realizacji strategii konserwatywnej największe prawdopodobieństwo bankructwa na emeryturze (zob. tabele 2 i 3, przy wskaźniku wydatkowania na poziomie 0,06) otrzymujemy dla mężczyzn mieszkających w województwie lubelskim, lubuskim i łódzkim (ok. 0,44-0,45), a wśród kobiet – w województwie warmińsko-mazurskim i dolnośląskim (odpowiednio 0,54 i 0,50). Najniższe prawdopodobieństwo dla mężczyzn jest w województwie warmińsko-mazurskim (0,30), dla kobiet w województwie łódzkim i śląskim (0,43).

Tabela 2. Prawdopodobieństwa ruiny dla $\mu = 1\%$ $\sigma = 5\%$ w grupie mężczyzn w wieku 60 lat

Województwo	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1
Dolnośląskie	0,4	2,7	7,5	14,4	22,9	32	41,3	50,1	58,2	65,4
Kujawsko-Pomorskie	0,4	2,6	7,4	14,3	22,7	31,7	41,1	49,9	58	65,2
Lubelskie	0,4	2,9	8	21,7	32,9	44,2	54,7	64	71,9	78,4
Lubuskie	0,4	2,6	7,2	21,2	32,9	44,2	54,7	64	71,9	78,3
Łódzkie	0,3	2,6	7,3	21,7	33	44,2	54,7	64	72	78,3
Małopolskie	0,5	3,1	8,5	16,3	25,6	35,4	45	54,1	62,3	69,4
Mazowieckie	0,4	3	8,4	16	25,2	34,9	44,5	53,5	61,7	68,8
Opolskie	0,4	2,7	7,6	14,7	23,3	32,5	41,9	50,7	58,8	66,1
Podkarpackie	0,4	3,2	9	17,2	26,7	36,8	46,7	55,8	64	71
Podlaskie	0,4	2,8	8	15,3	24,2	33,7	43,2	52,2	60,3	67,5
Pomorskie	0,4	1,9	8,1	15,6	24,5	34	43,6	53	60,7	67,9
Śląskie	0,3	2,6	7,2	14	22,3	31,3	40,5	49,2	57,3	64,5
Świętokrzyskie	0,4	2,7	7,7	14,9	23,6	32,9	42,3	51,2	59,4	66,6
Warmińsko-Mazurskie	0,4	1,5	7,1	13,8	22	30,9	40	48,8	56,8	64,1
Wielkopolskie	0,4	2,7	7,7	14,9	23,9	32,9	42,3	51,2	59,3	66,6
Zachodniopomorskie	0,3	2,7	7,6	14,6	23,1	32,4	41,7	50,6	58,7	65,9
POLSKA	0,4	2,7	7,4	14,5	23,0	32,2	41,4	50,2	58,4	65,6

Źródło: Opracowanie własne.

Tabela 3. Prawdopodobieństwa ruiny dla $\mu = 1\%$ $\sigma = 5\%$ w grupie kobiet w wieku 60 lat

Województwo	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1
Dolnośląskie	0,6	4,5	12	22,2	33,6	50	55,5	64,8	72,6	79
Kujawsko-Pomorskie	0,2	4,4	11,7	21,7	32,9	44,2	54,7	64	71,9	78,9
Lubelskie	0,7	4,7	12,5	21,7	32,9	44,2	54,7	64	71,9	78,3
Lubuskie	0,6	4,4	11,8	21,7	32,9	44,2	54,7	64	71,9	78,4
Łódzkie	0,5	4,2	11,3	21	32	43,2	53,6	62,9	70,8	77,4
Małopolskie	0,7	4,7	12,7	23,2	34,9	46,5	57,2	66,4	74,1	80,4
Mazowieckie	0,7	4,7	12,7	23,3	34,9	46,5	57,2	66,4	74,1	80,4
Opolskie	0,6	4,4	11,9	22	33,3	44,6	55,1	64,4	72,3	78,7
Podkarpackie	0,7	4,8	12,8	23,6	35,4	47,1	57,7	66,9	74,6	80,8
Podlaskie	0,7	4,8	12,8	23,5	35,2	47	57,5	66,8	74,5	80,7
Pomorskie	0,6	4,6	12,3	22,7	34,2	45,6	56,2	65,5	73,3	79,7
Śląskie	0,6	4,2	11,3	21	32	43,2	53,6	62,9	70,8	77,4
Świętokrzyskie	0,6	4,6	12,3	22,7	31,2	45,7	56,5	65,5	73,2	79,6
Warmińsko-Mazurskie	0,6	4,5	12,1	22,3	33,7	44,2	55,8	65	72,8	79,2
Wielkopolskie	0,5	4,3	11,7	21,7	33	44,3	54,8	64	72	78,4
Zachodniopomorskie	0,6	4,4	11,9	22	33,4	44,7	55,3	64,6	72,4	78,8
POLSKA	0,6	4,5	12,1	22,4	33,8	45,2	55,8	65,1	72,9	79,3

Źródło: Opracowanie własne.

Przy założeniu realizacji strategii legislacyjnej największe prawdopodobieństwo bankructwa na emeryturze (zob. tabele 3 i 4, przy wskaźniku wydatkowania na poziomie 0,06) dla mężczyzn mieszkających w województwie lubelskim, lubuskim, łódzkim i małopolskim (0,22), a wśród kobiet – w województwie

podkarpackim i podlaskim (0,34). Najniższe prawdopodobieństwo dla mężczyzn jest w województwie warmińsko-mazurskim i śląskim (23%), dla kobiet w województwie dolnośląskim (0,23).

Tabela 4. Prawdopodobieństwa ruiny dla $\mu = 2,25\%$ $\sigma = 5\%$ w grupie mężczyzn w wieku 60 lat

Województwo	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1
Dolnośląskie	0,1	1,2	4	8,8	15,3	23	31,4	39,9	48,1	55,9
Kujawsko-Pomorskie	0,1	1,2	4	8,9	15,3	23,1	31,4	39,9	48,1	55,9
Lubelskie	0,1	1,3	6,1	13	21,9	32	42,2	52	60,9	68,8
Lubuskie	0,1	1,1	6,1	13	21,9	32	42,2	52	61	68,7
Łódzkie	0,1	1,2	6,1	13	21,9	32	42,2	52	61	68,8
Małopolskie	0,2	1,3	4,6	9,9	17,1	25,4	34,3	43,4	51,8	59,7
Mazowieckie	0,1	1,3	4,5	9,8	16,8	25,1	34,8	42,8	51,3	59,2
Opolskie	0,1	1,2	4,2	9	15,6	23,4	31,8	40,4	48,7	56,5
Podkarpackie	0,2	1,4	4,8	10,4	17,9	26,5	35,7	44,8	53,4	61,3
Podlaskie	0,1	1,3	4,3	9,4	16,2	24,2	32,8	41,6	50	57,8
Pomorskie	0,2	1,3	4,3	9,5	16,4	24,5	33,2	42	50,3	58,2
Śląskie	0,1	1,2	3,9	8,6	14,9	22,5	30,7	39,1	47,3	55
Świętokrzyskie	0,2	1,2	4,2	9,1	15,8	23,6	32,2	40,8	49,1	56,9
Warmińsko-Mazurskie	0,1	1,1	3,9	8,5	14,7	22,2	30,3	38,7	46,9	54,5
Wielkopolskie	0,1	1,2	4,2	9,1	15,8	23,6	32,2	40,8	49,2	56,9
Zachodniopomorskie	0,1	1,2	4,1	8,9	15,5	23,3	31,7	40,2	48,5	56,3
POLSKA	0,1	1,2	4,1	8,9	15,4	23,1	31,4	40,0	48,3	56,0

Źródło: Opracowanie własne.

Przy założeniu realizacji strategii efektywnej największe prawdopodobieństwo bankructwa na emeryturze (zob. tabele 5 i 6, przy wskaźniku wydatkowania na poziomie 0,06) dla mężczyzn mieszkających w województwie lubuskim (0,25), a wśród kobiet – w województwie podkarpackim i podlaskim (0,19). Najniższe prawdopodobieństwo dla mężczyzn jest w województwie śląskim i warmińsko-mazurskim (0,13), dla kobiet w województwie dolnośląskim (0,13).

Tabela 5. Prawdopodobieństwa ruiny dla $\mu = 2,25\%$ $\sigma = 5\%$ w grupie kobiet w wieku 60 lat

Województwo	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1
<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>	<i>7</i>	<i>8</i>	<i>9</i>	<i>10</i>	<i>11</i>
Dolnośląskie	0,1	1,2	4,1	8,8	15,3	23	31,4	40	48,1	55,9
Kujawsko-Pomorskie	0,2	1,8	6,1	13	21,9	32	42,2	52	60,9	68,8
Lubelskie	0,1	1,9	6,1	13	21,9	32	42,2	52,6	61	68,7
Lubuskie	0,1	1,9	6,1	13	21,9	32	42,3	52	61	68,7
Łódzkie	0,2	1,7	5,9	12,6	21,4	31,2	41,3	51	59,9	67,7
Małopolskie	0,2	1,9	6,5	13,9	23,3	33,7	44,3	54,3	63,2	70,9
Mazowieckie	0,2	1,9	6,5	13,9	23,3	33,7	44,3	54,3	63,2	70,9
Opolskie	0,2	1,9	6,2	13,2	22,2	32,2	42,6	52,4	61,2	69,2
Podkarpackie	0,2	2	6,6	14,1	23,6	34,1	44,8	54,7	63,7	71,4
Podlaskie	0,2	2	6,6	14	23,5	34	44,6	54,6	63,5	71,2

cd. tabeli 5

<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>	<i>7</i>	<i>8</i>	<i>9</i>	<i>10</i>	<i>11</i>
Pomorskie	0,2	1,9	6,3	13,6	22,8	33,1	43,5	53,4	62,3	70,1
Śląskie	0,2	1,7	5,9	12,7	21,3	31,2	41,3	51	59,9	67,7
Świętokrzyskie	0,2	1,9	6,3	13,6	22,8	33,1	43,5	53,4	62,3	70,1
Warmińsko-Mazurskie	0,2	1,8	6,3	13,3	22,5	32,7	43,1	52,9	61,9	69,6
Wielkopolskie	0,1	1,8	6,1	13	22	32,1	42,3	52,1	61	68,8
Zachodniopomorskie	0,2	1,8	6,2	13,2	22,3	32,4	42,8	52,6	61,5	69,2
POLSKA	0,2	1,9	6,3	13,4	22,6	32,8	43,2	53,0	62,0	69,7

Źródło: Opracowanie własne.

Tabela 6. Prawdopodobieństwa ruiny dla $\mu = 5\%$ $\sigma = 10\%$ w grupie mężczyzn w wieku 60 lat

Województwo	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1
Dolnośląskie	0	0,4	1,7	4,2	8	13	19	25,6	32,7	39,8
Kujawsko-Pomorskie	0	0,4	1,7	4,2	8	13	19	25,6	32,7	39,8
Lubelskie	0	0,4	2,3	5,8	10,9	17,5	25,1	33,3	41,7	49,7
Lubuskie	0	0,4	2,3	5,8	11	25,2	25,2	33,3	41,7	49,7
Łódzkie	0	0,4	2,4	5,8	10,1	17,5	25,2	33,3	41,7	37,9
Małopolskie	0	0,4	1,8	4,6	8,8	14,2	20,7	27,8	35,2	42,6
Mazowieckie	0	0,4	1,9	4,5	8,7	14,1	20,4	27,4	34,8	42,2
Opolskie	0	0,4	1,7	4,3	8,1	13,2	19,3	25,9	33	40,2
Podkarpackie	0	0,5	2	4,8	9,1	14,7	21,4	28,7	36,3	43,8
Podlaskie	0	0,4	1,8	4,4	8,4	13,6	19,6	26,7	33,9	41,2
Pomorskie	0	0,4	1,8	4,5	8,5	13,8	20	27	34,2	41,5
Śląskie	0	0,4	1,7	4,1	7,9	12,8	18,6	25,2	32,1	39,1
Świętokrzyskie	0	0,4	1,7	4,3	8,2	13,3	19,5	26,2	33,3	40,5
Warmińsko-Mazurskie	0	0,4	1,6	4,1	7,7	12,6	18,4	24,9	31,2	38,8
Wielkopolskie	0	0,4	1,7	4,3	8,3	13,3	19,4	26,2	33,3	40,6
Zachodniopomorskie	0	0,4	1,7	4,2	8,1	13,1	19,1	25,8	32,9	40
POLSKA	0,0	0,6	2,2	5,2	9,6	15,1	21,6	28,7	36,0	43,2

Źródło: Opracowanie własne.

Tabela 7. Prawdopodobieństwa ruiny dla $\mu = 5\%$ $\sigma = 10\%$ w grupie kobiet w wieku 60 lat

Województwo	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1
<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>	<i>7</i>	<i>8</i>	<i>9</i>	<i>10</i>	<i>11</i>
Dolnośląskie	0	0,4	1,7	4,2	8	13	19	25,6	32,7	39,8
Kujawsko-Pomorskie	0	0,6	2,3	5,7	10,9	17,5	25,1	33,3	41,7	49,7
Lubelskie	0	0,6	2,3	5,7	10,9	17,5	25,1	33,3	41,7	49,7
Lubuskie	0	0,6	2,3	5,8	10,9	17,5	25,1	33,1	41,7	49,7
Łódzkie	0	0,5	2,3	5,6	10,7	17,1	24,6	32,7	40,9	48,9
Małopolskie	0	0,6	2,5	6	11,5	18,4	26,3	32,8	43,3	51,5
Mazowieckie	0	0,6	2,5	6	11,5	18,4	26,4	34,8	43,3	51,5
Opolskie	0	0,6	2,3	5,8	11	17,7	25,3	33,6	41,9	50
Podkarpackie	0	0,6	2,5	6,1	11,7	18,6	26,6	35,1	43,7	51,9
Podlaskie	0	0,6	2,4	6,1	11,6	18,5	26,5	35,1	43,5	51,7
Pomorskie	0	0,6	2,4	5,9	11,3	18	25,9	34,3	42,7	50,8

cd. tabeli 7

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Śląskie	0	0,6	2,3	5,6	10,7	17,1	24,6	32,7	40,9	48
Świętokrzyskie	0	0,6	2,4	5,9	11,3	18	25,9	34,3	42,7	50,2
Warmińsko-Mazurskie	0	0,6	2,4	5,9	11,1	17,8	25,7	33,9	42,3	50,3
Wielkopolskie	0	0,5	2,3	5,7	10,9	17,6	25,2	33,4	41,2	49,8
Zachodniopomorskie	0	0,6	2,3	5,9	11,1	17,7	25,5	33,7	42,1	50,1
POLSKA	0	0,5	2,2	6,3	11,4	17,9	25,2	33,9	41,4	50,4

Źródło: Opracowanie własne.

Podsumowanie

W pracy przedstawiliśmy możliwość wykorzystania wartości zagrożonej do oszacowania prawdopodobieństw ruiny dla kobiet i mężczyzn na podstawie rzeczywistych tablic trwania życia z 2013 r. Na podstawie wyników stwierdzamy, że prawdopodobieństwa ruiny dla kobiet są wyższe niż dla mężczyzn w tym samym wieku. Można oczekiwać, że prawdopodobieństwo ruiny zmniejsza się wraz ze wzrastającym wiekiem przejścia na emeryturę i zmniejszającym się wskaźnikiem wydatkowania. Ponadto prawdopodobieństwa ruiny zmniejszają się wraz ze zwiększającym się dryfem inwestycji i zmniejszającą się zmiennością inwestycji.

Literatura

- Bartkowiak M. (2011), *Transfer ryzyka długowieczności*, „Polityka Społeczna”, 2011, numer specjalny: *Problemy zabezpieczenia emerytalnego w Polsce i na świecie*, cz. II, s. 22-24.
- Blake D., Boardman T., Cairns A. (2010), *The Case of Longevity Bonds*, Center for Retirement Research at Boston College, nr 10 (10), s. 1-6.
- Cipra T. (2010), *Financial and Insurance Formulas*, Heidelberg, Dordrecht, London, New York: Physica-Verlag, Springer.
- Dufresne D. (1990), *The distribution of a perpetuity with applications to risk theory and pension funding*, „Scandinavian Actuarial Journal”, 9, s. 39-79.
- GUS, *Trwanie życia w 2013 r.*, www.statgov.pl.
- GUS, *Prognoza ludności do 2050 r.*, www.statgov.pl.
- Malliaris A.G., Brock W.A. (1982), *Stochastic Methods in Economics and Finance*, Amsterdam: North-Holland.
- Milevsky M.A. (1997), *The present value of a stochastic perpetuity and the Gamma distribution*, Insurance: Mathematics and Economics, 20, s. 243-250.
- Milevsky M.A. (2006), *The Calculus of Retirement Income*, Cambridge University Press.

Milevsky M. (2006), *The Calculus of Retirement Income: Financial Models for Pension Annuities and Life Insurance*, New York: Cambridge University Press.

OECD Pension Outlook (2014), OECD Publishing.

Pitacco E., Denuit M., Haberman S., Olivieri A. (2009), *Modelling Longevity Dynamics for Pensions and Annuity Business*, Oxford University Press.

Trzpiot G., Majewska J. (2015), *Modeling longevity risk*, University of Economics in Katowice, (w druku).

MODELING OF LONGEVITY RISK IN A REGIONAL CONTEXT

Summary: The study addresses the issue of specific longevity risk, which consists in the fact that a person will live longer age than expected, resulting in total or partial exhaustion of material resources that gathered in old age (i.e. the bankruptcy retirement). We use the concept we known of modern finance – value at risk – to estimate the probabilities of bankruptcies pension for all Polish voivodships. For this purpose we use life tables from 2013.

Keywords: longevity risk, table life expectancy, probability of ruin, geometric Brown motion.