



Krzysztof Kontek

Szkoła Główna Handlowa w Warszawie
Kolegium Analiz Ekonomicznych (KAE)
krzysztof.kontek@acnet.com.pl

KSZTAŁT KRZYWYCH OBOJĘTNOŚCI W TRÓJKĄCIE MARSCHAKA-MACHINY¹

Streszczenie: Artykuł prezentuje wyniki badania nad krzywymi obojętności w trójkącie Marschaka-Machiny. Przedstawiono w nim nową metodę wyznaczania takich krzywych za pomocą ekwiwalentów pewności loterii. Najbardziej istotną obserwacją wynikającą z danych eksperymentalnych jest obecność skoków krzywych obojętności w pobliżu przyprostokątnych trójkąta. Skoki takie nie występują jednak w okolicy przeciwprostokątnej. Wynik taki świadczy, że zmiana zakresu wypłat loterii powoduje skok w jej wycenie. Ten psychologiczny efekt powinien być uwzględniony w teoriach podejmowania decyzji w warunkach ryzyka.

Słowa kluczowe: trójkąt Marschaka-Machiny, krzywe obojętności, modele podejmowania decyzji w warunkach ryzyka, ekwiwalenty pewności.

JEL Classification: D81.

Wprowadzenie

Trójkąt Marschaka-Machiny [Marschak, 1950; Machina, 1982] jest graficznym narzędziem do teoretycznych i eksperymentalnych rozważań nad podejmowaniem decyzji w warunkach ryzyka. Trójkąt przedstawia zbiór wszystkich loterii² o trzech stałych wypłatach $x_1 < x_2 < x_3$ i o prawdopodobieństwach odpo-

¹ Badanie zostało sfinansowane ze środków grantu przyznanego przez Narodowe Centrum Nauki. Numer grantu: KAE/NCN/2012/07/N/HD4/00272.

² Termin „loteria” (*lottery*) jest powszechnie stosowany w teorii podejmowania decyzji w warunkach ryzyka na oznaczenie ryzykownego projektu, przedsięwzięcia, „perspektywy” (stosowane są też inne angielskie terminy jak *gamble* lub *prospect*). W dziedzinie finansów bardziej powszechny byłby termin „aktywo finansowe” (*asset*). Dla matematyków loteria to zmienna losowa.

wiednio p_1 , p_2 i p_3 . Prawdopodobieństwo p_1 jest przedstawione na osi poziomej, prawdopodobieństwo p_3 na osi pionowej, zaś prawdopodobieństwo p_2 jest resztą z 1 (gdyż $p_1 + p_2 + p_3 = 1$). Każdy punkt trójkąta reprezentuje jakąś loterię: punkt wewnątrz trójkąta reprezentuje loterię z trzema wypłatami, gdyż p_1 , p_2 i p_3 są dodatnie. Punkt na krawędziach trójkąta (ale nie na wierzchołkach) reprezentuje loterię z dwiema wypłatami, gdyż jedno z prawdopodobieństw p_i wynosi zero. Wierzchołki trójkąta reprezentują wypłaty pewne.

Użyteczną metodą wizualizacji przewidywań teorii podejmowania decyzji w warunkach ryzyka jest analiza krzywych obojętności. Krzywe te łączą loterie o tej samej użyteczności. Jeżeli osoba podejmuje ryzykowne decyzje zgodnie z teorią oczekiwanej użyteczności, wtedy jej preferencje są opisane za pomocą krzywych obojętności, które są prostymi, równoległymi liniami. Trójkąt stał się szczególnie popularny, gdy paradoksy teorii oczekiwanej użyteczności zostały wytłumaczone za pomocą hipotezy „fanning-out” [Machina, 1982, 1987]. Zakłada ona, że krzywe obojętności nie są równoległe, lecz rozchodzą się promieniście z punktu położonego na „południowy-zachód” od wierzchołka przy kącie prostym trójkąta; w ogólności, krzywe te mogą być też nieliniowe. Od tej pory przeprowadzono wiele badań na temat kształtu krzywych obojętności. Wiele analiz [Camerer, 1989; Harless, 1992; Harless i Camerer, 1994; Abdellaoui i Munier, 1998; Blavatskyy, 2006; Bardsley i in., 2009] wykazało jednak, że hipoteza „fanning-out” nie opisuje w pełni zachowań ludzi.

Doprowadziło to do rozwoju nowych teorii podejmowania decyzji w warunkach ryzyka. Niektóre teorie przewidują, że krzywe obojętności są liniami prostymi, które rozchodzą się promieniście (zgodnie z hipotezą „fanning-out”) z punktu położonego na „południowy-zachód” od trójkąta [Chew i MacCrimmon, 1979], schodzą się do jednego punktu położonego na „północny-wschód” od przeciwprostokątnej trójkąta (jest to tzw. hipoteza „fanning-in”) [Blavatskyy, 2006], są połączeniem obu wzorów [Gul, 1991; Neilson, 1992; Jia, Dyer i Butler, 2001; Bordalo, Gennaioli i Schleifer, 2012] lub też nie zbiegają się do żadnego szczególnego punktu [Dekel, 1986]. Krzywe obojętności nie muszą być liniami prostymi – mogą być też wklęsłe [Kahneman i Tversky, 1979], wklęsłe lub wypukłe [Becker i Sarin, 1987], lub też i wklęsłe, i wypukłe w różnych częściach trójkąta [Tversky i Kahneman, 1992; Birnbaum, 1997]. Krzywe te mogą być też nieciągłe na wszystkich krawędziach [Kahneman i Tversky, 1979; Viscusi, 1989; Birnbaum, 1997; Bordalo, Gennaioli i Schleifer, 2012] bądź też tylko na przyprostokątnych trójkąta [Cohen, 1992; Kontek i Lewandowski, 2013]. Krzywe obojętności w trójkącie Marschaka-Machiny są zatem bardzo użytecznym narzędziem do rozróżnienia przewidywań różnych modeli podejmowania decyzji w warunkach ryzyka.

Jednocześnie trójkąt ten może być narzędziem do eksperymentalnych badań na temat rzeczywistego kształtu krzywych obojętności. Można wyróżnić dwie metody wyznaczania kształtu tych krzywych. Pierwsza polega na zadawaniu pytań o obojętność pomiędzy loteriami, druga na zadawaniu pytań o preferencje pomiędzy loteriami. W pierwszej metodzie osoby badane wskazują loterie obojętne w stosunku do loterii wstępnie wybranej. Ta procedura pozwala na wyznaczenie krzywych obojętności poprzez połączenie punktów w trójkącie reprezentujących wskazane loterie. Metoda ta jest jednak rzadko stosowana w praktyce ze względu na trudność jej przeprowadzenia. Druga metoda polega na zadawaniu pytań o preferencje dotyczące par loterii. Dokonane wybory można dalej testować na zgodność z hipotezami dotyczącymi kształtu krzywych w całym trójkącie lub w jego fragmentach. Metoda ta nie pozwala jednak na jednoznaczne wyznaczenie kształtu krzywych obojętności.

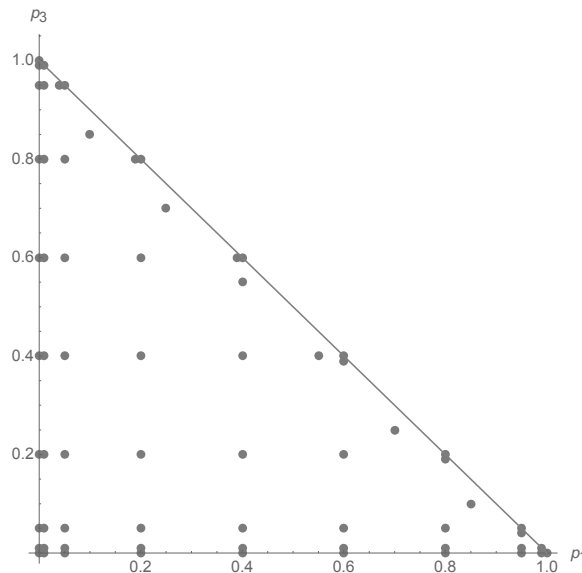
Niniejszy artykuł proponuje nową metodę wyznaczania krzywych obojętności za pomocą ekwiwalentów pewności (*certainty equivalent*, CE). Wyznaczone ekwiwalenty pewności zbioru loterii są wykorzystane do estymacji krzywych obojętności wewnątrz trójkąta. Należy zwrócić uwagę, że wyznaczanie ekwiwalentów pewności loterii jest znaną i często stosowaną metodą estymacji parametrów modeli podejmowania decyzji w warunkach ryzyka [Tversky i Kahneman, 1992; Gonzales i Wu, 1999]. Nieco zaskakująco ekwiwalenty pewności nie były do tej pory stosowane do wyznaczania krzywych obojętności wewnątrz trójkąta Marschaka-Machiny.

Artykuł prezentuje także wyniki badań eksperymentalnych przeprowadzonych za pomocą zaproponowanej metody. Rzucają one nowe światło na kształt krzywych obojętności. W szczególności pokazują obszary zgodności z teorią oczekiwanej użyteczności (w których krzywe obojętności są prostymi równoległymi) oraz obszary zgodności z hipotezami „fanning-out” i „fanning-in” (w których krzywe obojętności rozchodzą się z punktów położonych odpowiednio na „południowy-zachód” bądź na „północny-wschód” od trójkąta). Co najważniejsze jednak, wskazują na istnienie skoków krzywych obojętności wzdłuż przyprostokątnych trójkąta. Skoki takie nie występują jednak w okolicy przeciwprostokątnej. Wyniki te wskazują na nieciągłość wyceny loterii w przypadku zmiany zakresu jej wypłat.

1. Nowa metoda estymacji krzywych obojętności

Nowa metoda estymacji krzywych obojętności w trójkącie Marschaka-Machiny polega na wyznaczaniu ekwiwalentów pewności loterii. Wartości te są następnie wykorzystywane do wyznaczenia dowolnej krzywej obojętności.

W eksperymencie wykorzystano 67 loterii dla każdego z dwóch schematów wypłat: $x_1 = 0$ zł, $x_2 = 150$ zł, $x_3 = 300$ zł (Trójkąt 1) i $x_1 = 0$ zł, $x_2 = 450$ zł i $x_3 = 900$ zł (Trójkąt 2). Wśród tych 67 loterii 3 znajdowały się na wierzchołkach trójkąta, 24 na jego krawędziach, a pozostałe 40 w jego środku. W celu weryfikacji efektów na krawędziach oraz hipotez „fanning-out” i „fanning-in” rozkład loterii w trójkącie był tak wybrany, by były one gęściej rozłożone przy jego krawędziach. Loterie zostały skonstruowane z następującej listy prawdopodobieństw p_1 i p_3 : $\{0, 0.01, 0.05, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 0.95, 0.99, 1\}$. Wszystkie kombinacje $\{p_1, 1 - p_1 - p_3, p_3\}$ takie, że $1 - p_1 - p_3 \geq 0$ dały loterie: $\{0, 1, 0\}$, $\{0, 0.99, 0.01\}$, $\{0, 0.95, 0.05\}$ itd. W celu weryfikacji efektów brzegowych przy przeciwprostokątnej zostały dodane następujące loterie: $\{0.04, 0.01, 0.95\}$, $\{0.19, 0.01, 0.8\}$, $\{0.39, 0.01, 0.6\}$, $\{0.6, 0.01, 0.39\}$, $\{0.8, 0.01, 0.19\}$, $\{0.95, 0.01, 0.04\}$ wszystkie mające $p_2 = 0.01$ oraz $\{0.1, 0.05, 0.85\}$, $\{0.25, 0.05, 0.7\}$, $\{0.4, 0.05, 0.55\}$, $\{0.55, 0.05, 0.4\}$, $\{0.7, 0.05, 0.25\}$ i $\{0.85, 0.05, 0.1\}$, wszystkie mające $p_2 = 0.05$. Uzyskany w ten sposób zbiór loterii jest przedstawiony na rys. 1.



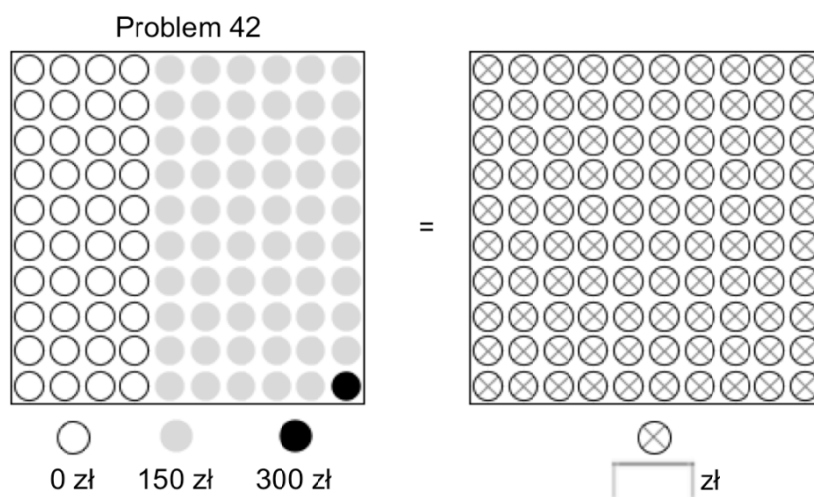
Rys. 1. Trójkąt Marschaka-Machiny z zaznaczonymi loteriami, które były badane w eksperymencie

Źródło: Opracowanie własne.

Dla przypomnienia, tylko loterie znajdujące się wewnątrz trójkąta Marschaka-Machiny mają trzy wypłaty. W omawianym eksperymencie zakres tych wypłat wynosi $[0, 300]$ i $[0, 900]$ odpowiednio dla Trójkąta 1 i Trójkąta 2. Taki sam zakres wypłat mają loterie z dwiema wypłatami położone na przeciwprosto-

kątnej trójkąta. Loterie z dwiema wypłatami położone na poziomej osi mają zakresy wypłat odpowiednio $[0, 150]$ i $[0, 450]$, zaś loterie z dwiema wypłatami położone na pionowej osi mają zakresy wypłat odpowiednio $[150, 300]$ i $[450, 900]$.

Loterie zostały przedstawione uczestnikom eksperymentu w postaci urny zawierającej czarne, szare i białe kule (loterie z mniejszą liczbą wypłat miały odpowiednio mniej kolorów). Po prawej stronie tej urny została przedstawiona druga urna zawierająca tylko kule z krzyżykami. Przykładowy problem jest przedstawiony na rys. 2. W tym przykładowym problemie wartość czarnej kuli wynosi 300 zł, szarej kuli – 150 zł, zaś białej kuli – 0 zł. Uczestnicy eksperymentu mieli podać wartość kuli z krzyżykiem w prawej urnie, przy której byłoby dla nich obojętne, czy mają losować kulę z lewej czy z prawej urny. W ten sposób uczestnicy wyznaczyli ekwiwalenty pewności loterii, chociaż sam termin „ekwiwalent pewności” nie był używany w instrukcji.



Rys. 2. Przykładowy problem z eksperymentu

Źródło: Opracowanie własne.

Eksperyment został przeprowadzony na stronie internetowej: <http://eksperymenty.sgh.waw.pl>. Zostało przygotowanych sześć formularzy HTML (TA1 do TA6). Każdy formularz zawierał 134 problemy, na które składało się 67 loterii dla dwóch schematów płatności. Kolejność problemów w każdym formularzu była losowa. W celu uniknięcia systematycznego błędu, w formularzach TA1-3 maksymalną wypłatę oferowały czarne kule, podczas gdy w formularzach TA4-6 – białe kule. Szare kule oferowały zawsze środkową wypłatę.

Formularze były losowo przydzielane uczestnikom eksperymentu w momencie wybrania eksperymentu. Jak się okazało, formularze TA1 do TA6 zostały przydzielone odpowiednio 15, 4, 13, 17, 10 i 11 osobom.

W eksperymencie wzięło udział 70 osób, z których 34 było studentami podyplomowymi psychologii w SWPS w Warszawie, 30 było studentami ekonomii w SGH w Warszawie, zaś 6 było studentami podyplomowymi analityki biznesowej na Politechnice Warszawskiej. Wiek uczestników mieścił się w zakresie od 20 do 60 lat (17 osób było starszych niż 30 lat), średnia wieku wyniosła 25,3 lat. Kobiety stanowiły 67% całej grupy badanej.

Uczestnictwo w eksperymencie było dobrowolne. Za udział w eksperymencie uczestnicy otrzymali kupon o wartości 12 zł do wykorzystania w kawiarni lub księgarni na terenie uczelni.

Na początku eksperymentu uczestnicy zapoznawali się z instrukcją. Potem mieli do rozwiązania dwa przykładowe problemy. Czas na udzielenie wszystkich odpowiedzi był planowany na 40-50 minut, jakkolwiek uczestnicy byli proszeni o rozwiązywanie problemów w ich własnym tempie. Średni czas udzielenia odpowiedzi wyniósł ok. 50 minut.

2. Wyniki

2.1. Agregacja danych

W niniejszym artykule dane są analizowane na poziomie całej grupy badanych. W tego typu psychologicznych eksperymentach do agregacji jest zazwyczaj stosowana mediana zebranych wartości, gdyż dane zawierają dużo „szumu” i odpowiedzi skrajnych (*outliers*), a ponadto rozkłady odpowiedzi są skośne. Wyznaczając jednak medianę, usuwa się większość zebranych danych. Ponadto badane osoby mają tendencję do zaokrąglania podawanych wartości ekwiwalentów pewności (na przykład 10, 60, 250 czy 700, a nie powiedzmy 9, 62, 253 czy 697), zatem gradacja median ekwiwalentów pewności jest także zgrubna. Aby więc nie stracić pozostałej informacji zawartej w próbce, wykorzystano również średnią obciętą z pozostawieniem 20% środkowych wartości zebranych ekwiwalentów pewności. Ostatecznie do agregacji danych zastosowano średnią z mediany i średniej obciętej. Dało to 134 wartości zagregowanych ekwiwalentów pewności badanych loterii.

Wartości te, dotyczące Trójkąta 1 i Trójkąta 2, zostały dalej zagregowane w celu otrzymania 67 wartości odpowiadających poszczególnym punktom w trójkącie Marschaka-Machiny (rys. 1). Zagregowane dane $CE^{\{\rho_1, \rho_3\}}$ dla poszczególnych punktów $\{\rho_1, \rho_3\}$ zostały policzone według wzoru:

$$CE^{\{\rho_1, \rho_3\}} = \frac{3CE_1^{\{\rho_1, \rho_3\}} + CE_2^{\{\rho_1, \rho_3\}}}{2}$$

to jest jako średnią z potrójnych wartości $CE_1^{\{\rho_1, \rho_3\}}$ dla Trójkąta 1 i pojedynczej wartości $CE_2^{\{\rho_1, \rho_3\}}$ dla Trójkąta 2. Operacja taka ma uzasadnienie teoretyczne przy założeniu, że funkcja użyteczności jest opisana za pomocą funkcji typu CRRA (*Constant Relative Risk Aversion*). Przykładem takiej funkcji jest funkcja potęgowa. Otrzymane w ten sposób wartości ekwiwalentów pewności CE są przedstawione w tabeli 1.

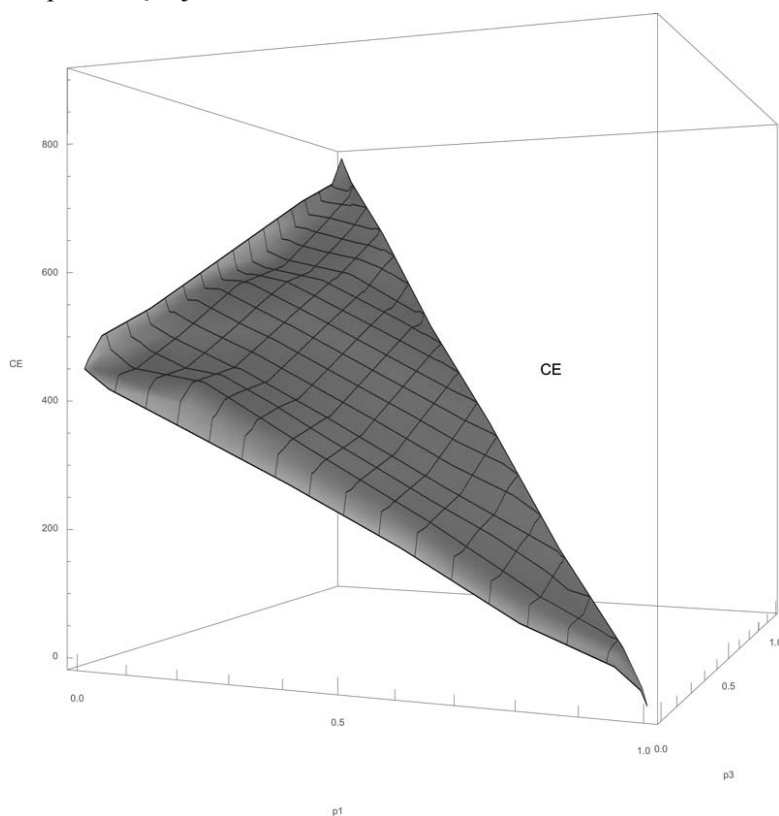
Tabela 1. Zagregowane wartości ekwiwalentów pewności CE łącznie dla Trójkąta 1 i Trójkąta 2

p1	p2	p3	CE	p1	p2	p3	CE	p1	p2	p3	CE
0.	0.	1.	900.0	0.05	0.55	0.4	597.8	0.6	0.35	0.05	244.3
0.	0.01	0.99	887.9	0.05	0.75	0.2	509.7	0.6	0.39	0.01	235.2
0.	0.05	0.95	837.3	0.05	0.9	0.05	450.6	0.6	0.4	0.	200.0
0.	0.2	0.8	780.2	0.05	0.94	0.01	443.8	0.8	0.	0.2	179.3
0.	0.4	0.6	706.8	0.05	0.95	0.	416.6	0.8	0.01	0.19	181.7
0.	0.6	0.4	628.7	0.19	0.01	0.8	713.3	0.8	0.15	0.05	128.9
0.	0.8	0.2	552.7	0.2	0.	0.8	710.4	0.8	0.19	0.01	134.6
0.	0.95	0.05	499.3	0.2	0.2	0.6	616.1	0.8	0.2	0.	103.8
0.	0.99	0.01	463.8	0.2	0.4	0.4	531.8	0.95	0.	0.05	63.9
0.	1.	0.	450.0	0.2	0.6	0.2	463.6	0.95	0.01	0.04	67.0
0.01	0.	0.99	887.2	0.2	0.75	0.05	431.5	0.95	0.04	0.01	58.5
0.01	0.04	0.95	828.3	0.2	0.79	0.01	400.1	0.95	0.05	0.	49.2
0.01	0.19	0.8	749.7	0.2	0.8	0.	358.8	0.99	0.	0.01	21.7
0.01	0.39	0.6	646.3	0.39	0.01	0.6	522.1	0.99	0.01	0.	20.3
0.01	0.59	0.4	598.6	0.4	0.	0.6	525.6	1.	0.	0.	0.0
0.01	0.79	0.2	523.5	0.4	0.2	0.4	445.9	0.1	0.05	0.85	767.9
0.01	0.94	0.05	475.8	0.4	0.4	0.2	363.9	0.25	0.05	0.7	637.7
0.01	0.98	0.01	450.0	0.4	0.55	0.05	333.7	0.4	0.05	0.55	508.7
0.01	0.99	0.	443.8	0.4	0.59	0.01	313.0	0.55	0.05	0.4	380.8
0.04	0.01	0.95	828.0	0.4	0.6	0.	276.9	0.7	0.05	0.25	254.5
0.05	0.	0.95	831.8	0.6	0.	0.4	362.7	0.85	0.05	0.1	111.9
0.05	0.15	0.8	742.4	0.6	0.01	0.39	353.9				
0.05	0.35	0.6	625.6	0.6	0.2	0.2	269.9				

Źródło: Opracowanie własne.

2.2. Wykresy 3D powierzchni ekwiwalentów pewności

Dane zaprezentowane w tabeli 1 zostały przedstawione graficznie na rysunku 3D (patrz rys. 3). Należy zauważyć, że trzy wierzchołki trójkąta przyjmują wartości odpowiednio 0, 450, and 900, gdyż reprezentują one wypłaty pewne. Trzeba także zwrócić uwagę na kształt powierzchni przy krawędziach. Powierzchnie te opadają i podnoszą się nagle przy dochodzeniu z wewnątrz trójkąta do osi p_1 i p_3 . Powierzchnia CE ma jednak stałe nachylenie przy zbliżaniu się do przeciwprostokątnej.



Rys. 3. Rysunek 3D powierzchni ekwiwalentów pewności (dane z tabeli 1)

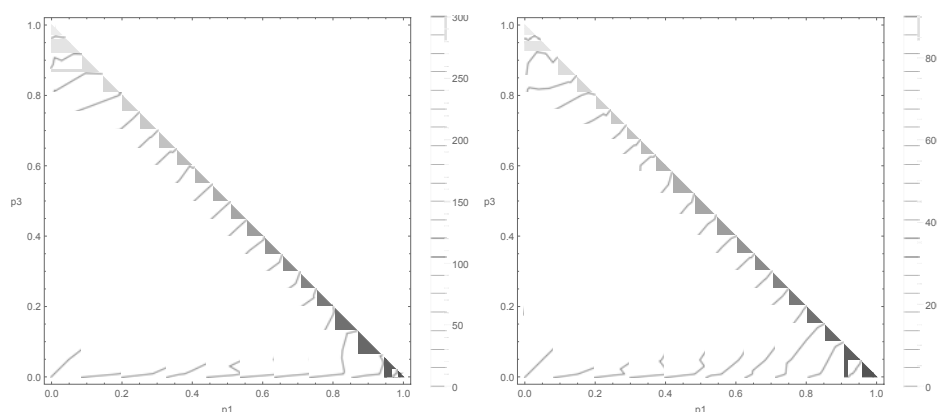
Źródło: Opracowanie własne.

Kształty te mogą być wytłumaczone jako efekt zmiany zakresu wypłat loterii. Zaczynając od loterii z wypłatami x_1 i x_2 i dodając nową (wysoką) wypłatę x_3 (tzn. poruszając się w głąb trójkąta z osi p_1 w kierunku dodatnich wartości p_3), zwiększa się nagle wartość ekwiwalentu pewności. Z drugiej strony, zaczynając od loterii z wypłatami x_2 i x_3 , i wprowadzając nową (niską) wypłatę x_1 (tj. poru-

szając się w głąb trójkąta z osi p_3 w kierunku dodatnich wartości p_1), gwałtownie zmniejsza się wartość ekwiwalentu pewności loterii. Takiej gwałtownej zmiany wartości ekwiwalentu pewności nie obserwuje się, gdy zostaje wprowadzona nowa wypłata x_2 do loterii zawierającej wypłaty x_1 i x_3 (tj. poruszając się w głąb trójkąta z przekątnej sześciąnu). W tym jednak przypadku zakres wypłat loterii pozostaje niezmienny.

2.3. Wykresy krzywych obojętności

Dane eksperymentalne są analizowane i wizualizowane w tym artykule za pomocą programu Wolfram Mathematica. Funkcja ListContourPlot generuje wykres konturowy na podstawie wartości podanych w zdefiniowanych punktach³. Linie konturów są wymaganymi krzywymi obojętności, gdyż łączą one punkty o tej samej wartości ekwiwalentów pewności. Linie te są generowane poprzez liniową interpolację ekwiwalentów pewności pomiędzy sąsiednimi punktami reprezentującymi loterie. Omawiana funkcja pozwala na wyznaczenie dowolnie wybranego konturu. Należy zwrócić uwagę, że krzywe obojętności są rysowane za pomocą pojedynczego rozkazu programu Mathematica. Niepotrzebne jest do tego żadne dedykowane oprogramowanie. Uzyskane w ten sposób krzywe obojętności dla Trójkąta 1 i Trójkąta 2 są przedstawione na rys. 4.



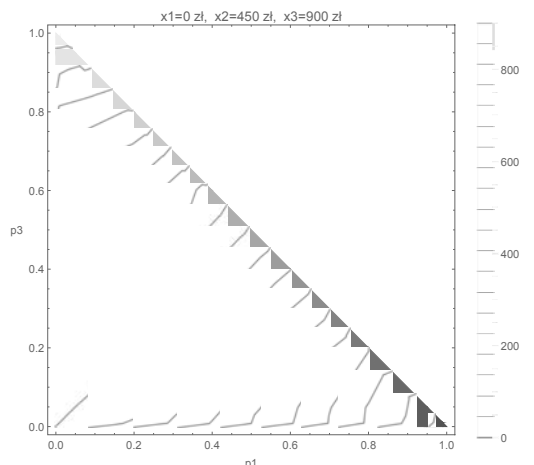
Rys. 4. Krzywe obojętności w dwóch trójkątach Marschaka-Machiny. Na lewo Trójkąt 1 o wypłatach $x_1 = 0$ zł, $x_2 = 150$ zł i $x_3 = 300$ zł. Na prawo Trójkąt 2 o wypłatach $x_1 = 0$ zł, $x_2 = 450$ zł i $x_3 = 900$ zł

Źródło: Opracowanie własne.

³ Podobną funkcjonalność oferują funkcje `'filled.contour'` w programie R albo `'contour'` w programie Matlab.

Interesującą cechą metody jest wyrażenie krzywych obojętności w jednostkach monetarnych, a nie w hipotetycznych „użytkach” (patrz legendy rysunków). Program Mathematica[®] rysuje kolorowe wykresy konturów, zatem obszary o niskiej wartości ekwiwalentów pewności są oznaczone „zimnym” kolorem, zaś obszary o wysokiej wartości konturów są oznaczone „ciepłym” kolorem.

Rys. 5 przedstawia krzywe obojętności dla zagregowanych wartości ekwiwalentów pewności z tabeli 1.



Rys. 5. Krzywe obojętności dla zagregowanych danych z tabeli 1

Źródło: Opracowanie własne.

Krzywe te mają ten sam kształt jak krzywe uzyskane osobno dla Trójkątów 1 i 2, ale jakość rysunku jest o wiele lepsza i krzywe są bardziej wygładzone. Uzasadnia to korzystanie z zagregowanych danych.

2.4. Główne obserwacje

Należy wskazać na kilka głównych wniosków dotyczących kształtu otrzymanych krzywych obojętności.

Po pierwsze, krzywe obojętności są prostymi równoległymi w środkowej części trójkąta. Jest to obszar, w którym badani podejmują ryzykowne decyzje zgodnie z teorią oczekiwanej użyteczności.

Po drugie, im bardziej oddalamy się od wierzchołka przy kącie prostym w kierunku północnym, tym krzywe obojętności stają się coraz mniej strome. Z drugiej strony im bardziej oddalamy się od wierzchołka przy kącie prostym w kierunku wschodnim, tym krzywe obojętności stają się coraz bardziej strome.

Skutkuje to kształtem „fanning-in” w pobliżu obydwu wierzchołków trójkąta. Kształt ten nie tylko zaprzecza przewidywaniom teorii oczekiwanej użyteczności, ale też tym teoriom, które są spójne z hipotezą „fanning-out”. Jednocześnie jednak, zmiany nachylenia krzywych obojętności powodują powstanie kształtu przypominającego „fanning-out” w obszarze w pobliżu kąta prostego trójkąta.

Po trzecie wreszcie, krzywe obojętności mają skoki na przyprostokątnych trójkąta. Jest to obszar, w którym występują efekty brzegowe. Co istotne, skoki te nie występują w pobliżu przeciwprostokątnej trójkąta.

Podsumowanie

W artykule zaprezentowano nową metodę estymacji krzywych obojętności w trójkącie Marschaka-Machiny za pomocą ekwiwalentów pewności. Metoda ta ma kilka zalet w stosunku do metod stosowanych uprzednio. Przede wszystkim pozwala na jednoznaczne wyznaczenie tych krzywych, a nie tylko na testowanie hipotez dotyczących ich kształtu. Ponadto znacznie prościej jest stwierdzić obojętność pomiędzy loterią z wieloma wypłatami a jedną wartością ekwiwalentu pewności, niż pomiędzy dwiema loteriami z wieloma wypłatami. Z tego też względu, w czasie eksperymentu może być zadanych o wiele więcej pytań, dzięki czemu można znacznie dokładniej wyznaczyć kształt krzywych obojętności.

Co istotne, interpolacja wartości ekwiwalentów pewności pomiędzy sąsiednimi punktami pozwala na wyznaczenie dowolnej krzywej obojętności. Specyficzna krzywa obojętności może być wybrana nawet po tym, gdy zostały zebrane już dane eksperymentalne. Oznacza to znaczną zaletę w stosunku do metod, w których eksperymentator jest ograniczony tylko do krzywych obojętności przechodzących przez wstępnie wybrane punkty (loterie). Inną ciekawą cechą jest, że krzywe obojętności są wyrażone w jednostkach monetarnych. Wreszcie, krzywe te mogą być wyznaczone za pomocą pojedynczej instrukcji programu Mathematica.

Co może ważniejsze, artykuł prezentuje istotne wyniki eksperymentalne dotyczące rzeczywistych kształtów krzywych obojętności w trójkącie Marschaka-Machiny. Po pierwsze, krzywe obojętności są prostymi równoległymi w środku trójkąta. Po drugie, krzywe obojętności przyjmują wzór „fanning-out” w pobliżu kąta prostego trójkąta i „fanning-in” w pobliżu pozostałych wierzchołków. Po trzecie, krzywe obojętności mają skoki w kierunku kąta prostego trójkąta wzdłuż przyprostokątnych trójkąta. Efekt taki nie występuje jednak w pobliżu przeciwprostokątnej. Oznacza to, że wycena loterii ulega skokowej zmianie przy zmia-

nie zakresu wypłat loterii. Wniosek ten wynika z faktu, że loterie położone wewnątrz trójkąta mają dodatnie prawdopodobieństwa wszystkich wypłat (zatem ich zakres wynosi $[x_1, x_3]$), zaś loterie położone na osi poziomej i pionowej mają odpowiednio prawdopodobieństwa $p_3 = 0$ oraz $p_1 = 0$ (zatem ich zakres wynosi odpowiednio $[x_1, x_2]$ i $[x_2, x_3]$). Przy przejściu z wewnątrz trójkąta na oś poziomą bądź pionową dochodzi zatem do zmiany zakresu loterii. Nie dochodzi natomiast do takiej zmiany w przypadku przejścia z wewnątrz trójkąta na przeciwprostokątną trójkąta, gdyż loterie w obu tych przypadkach mają dodatnie prawdopodobieństwa p_3 oraz p_1 (zatem ich zakres wynosi zawsze $[x_1, x_3]$).

Skokowa zmiana wyceny loterii przy zmianie zakresu jej wypłat jest psychologicznym efektem, który jest uwzględniony tylko przez dwie teorie podejmowania decyzji w warunkach ryzyka (w tym przez teorię użyteczności decyzyjnej [Kontek i Lewandowski, 2013]). Zakładają one, że pojawienie się nowej wypłaty (poza dotychczasowym zakresem wypłat) może spowodować znaczną i skokową zmianę wyceny loterii, nawet jeżeli ta nowa wypłata jest czysto hipotetyczna, tzn. prawdopodobieństwo jej wystąpienia jest nieskończenie bliskie zeru. Tymczasem zgodnie z teorią oczekiwanej użyteczności wpływ takiej nowej „hipotetycznej” wypłaty na wycenę loterii jest pomijalny. W związku z tym, skoki wycen loterii przy zmianie jej zakresu, stwierdzone w przedstawionym eksperymencie, są istotnym przyczynkiem do lepszego zrozumienia mechanizmów podejmowania decyzji w warunkach ryzyka.

Literatura

- Abdellaoui M., Munier B. (1998), *The Risk-structure Dependence Effect: Experimenting with an Eye to Decision-aiding*, „Annals of Operations Research”, Vol. 80.
- Bardsley N., Cubbit R., Loomes G., Moffat P., Starmer C., Sugden R. (2009), *Experimental Economics: Rethinking the Rules*, Princeton University Press.
- Becker J.L., Sarin R.K. (1987), *Lottery Dependent Utility*, „Management Science”, Vol. 33(11).
- Birnbaum M.H. (1997), *Violations of Monotonicity in Judgment and Decision Making*, [in:] A.A.J. Marley (ed.), *Choice, Decision, and Measurement: Essays in Honor of R. Duncan Luce*, Erlbaum, Mahwah, NJ.
- Blavatskyy P. (2006), *Axiomatization of a Preference for Most Probable Winner*, „Theory and Decision”, Vol. 60.
- Bordalo P., Gennaioli N., Schleifer A. (2012), *Saliency Theory of Choice under Risk*, „The Quarterly Journal of Economics”, Vol. 127(3).

- Camerer C. (1989), *An Experimental Test of Several Generalized Utility Theories*, „Journal of Risk and Uncertainty”, Vol. 2(1).
- Chew S.H., MacCrimmon K. (1979), *Alpha-nu Choice Theory: a Generalization of Expected Utility Theory*, Working paper 669, University of British Columbia.
- Cohen M. (1992), *Security Level, Potential Level, Expected Utility: A Three Criteria Decision Model under Risk*, „Theory and Decision”, Vol. 33(2).
- Dekel E. (1986), *An Axiomatic Characterization of Preferences Under Uncertainty: Weakening the Independence Axiom*, „Journal of Economic Theory”, Vol. 40.
- Gonzales R., Wu G. (1999), *On the Shape of the Probability Weighting Function*, „Cognitive Psychology”, Vol. 38.
- Gul F. (1991), *A Theory of Disappointment Aversion*, „Econometrica”, Vol. 59.
- Harless D. (1992), *Predictions about Indifference Curves Inside the Unit Triangle*, „Journal of Economic Behavior and Organization”, Vol. 18.
- Harless W., Camerer C. (1994), *The Predictive Utility of Generalized Expected Utility Theories*, „Econometrica”, Vol. 62(6).
- Jia J., Dyer J.S., Butler J.C. (2001), *Generalized Disappointment Models*, „Journal of Risk and Uncertainty”, Vol. 22(1).
- Kahneman D., Tversky A. (1979), *Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk*, „Econometrica”, Vol. 47(2).
- Kontek K., Lewandowski M. (2013), *Range-Dependent Decision Utility*, ssrn.com/abstract=2307858.
- Machina M. (1982), *Expected Utility Analysis without the Independence Axiom*, „Econometrica”, Vol. 50.
- Machina M. (1987), *Choice Under Uncertainty: Problems Solved and Unsolved*, „Journal of Economic Perspectives”, Vol. 1(1).
- Marschak J. (1950), *Rational Behavior, Uncertain Prospects, and Measurable Utility*, „Econometrica”, Vol. 18(2).
- Neilson W.S. (1992), *Some Mixed Results on Boundary Effects*, „Economics Letters”, Vol. 39.
- Tversky A., Kahneman D. (1992), *Advances in Prospect Theory: Cumulative Representation of Uncertainty*, „Journal of Risk and Uncertainty”, Vol. 5.
- Viscusi K. (1989), *Prospective Reference Theory: Toward an Explanation of the Paradoxes*, „Journal of Risk and Uncertainty”, Vol. 2.

**THE SHAPE OF INDIFFERENCE CURVES INSIDE
THE MARSCHAK-MACHINA TRIANGLE**

Summary: This paper presents results of a study which shed new light on the shape of indifference curves in the Marschak-Machina triangle. The most important observation concerns (possibly discontinuous) jumps in indifference curves at the triangle legs towards the triangle origin. Such jumps, however, do not appear at the triangle hypotenuse. This points out to discontinuity in the lottery valuation when the range of the lottery outcomes changes. Focusing attention to the range of lottery outcomes appears thus one of the most important factors driving decisions under risk. The study has been made using a novel method of estimating indifference curves, which is based on linear interpolation of certainty equivalent values between adjacent points representing the lotteries under consideration.

Keywords: Marschak-Machina triangle, indifference curves, fanning-out, fanning-in, models of decision-making under risk, certainty equivalents.