



Bogumiła Krzeszowska-Zakrzewska

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach
Wydział Informatyki i Komunikacji
Katedra Badań Operacyjnych
krzeszowskab@o2.pl

WIELOKRYTERIALNE HARMONOGRAMOWANIE PROJEKTU W PRZYPADKU ROZMYTYCH CZASÓW TRWANIA CZYNNOŚCI¹

Streszczenie: W praktyce zarządzania projektami mamy do czynienia z niezwykle dynamiczną dynamiką działań i warunków, które prowadzą do niepewności informacji i danych. Dlatego też stosowanie podejścia opartego na liczbach rozmytych do harmonogramowania projektu zdaje się być zasadne. W artykule tym podejście oparte na liczbach rozmytych zostanie zastosowane do problemu wielokryterialnego harmonogramowania projektu. Celem opracowania jest budowa wielokryterialnego modelu harmonogramowania projektu uwzględniającego dwa kryteria: minimalizacji czasu trwania projektu oraz maksymalizacji zdyskontowanych przepływów pieniężnych. Stosowanym parametrem rozmytym zadania będzie czas trwania czynności, który zostanie przedstawiony jako trapezowa liczba rozmyta. Zaproponowana zostanie adaptacja metody przeszukiwania z tabu celem rozwiązania tak postawionego problemu.

Słowa kluczowe: wielokryterialne podejmowanie decyzji, harmonogramowanie projektów, trapezowa liczba rozmyta.

Wprowadzenie

W zarządzaniu projektami planowanie jest jedną z najważniejszych funkcji. Plan definiuje nie tylko cele, jakie mają zostać osiągnięte, i działania, jakie należy podjąć, ale także ramy czasowe, w których cele te powinny zostać osiągnięte. Aby móc w pełni określić ramy czasowe realizacji celów projektu, należy przygotować jego harmonogram. W praktyce zarządzania projektami mamy do czy-

¹ Projekt został sfinansowany ze środków Narodowego Centrum Nauki przyznanych na podstawie decyzji numer DEC-2012/07/N/HS4/02736.

nienia z niezwykle dynamiką działań i warunków, które prowadzą do niepewności informacji i danych. Dlatego też stosowanie deterministycznego podejścia do harmonogramowania projektu jest obarczone ryzykiem dla terminowości realizacji projektu. Z tej przyczyny zasadne staje się stosowanie podejścia opartego na liczbach rozmytych do harmonogramowania projektu.

W problematyce budowy harmonogramów wyróżniamy dwa podejścia [Lambrechts, Demeulemeester, Herroelen, 2007]: podejście proaktywne oraz podejście reaktywne. Podejście proaktywne zakłada stworzenie harmonogramu odpornego na nieprzewidziane zdarzenie na etapie planowania. Podejście reaktywne zakłada z kolei aktualizacje harmonogramu oraz podejmowanie akcji naprawczych w trakcie realizacji projektu. W niniejszym artykule będzie rozpatrywany problem oparty na proaktywnym podejściu do harmonogramowania projektów.

Stosowanie liczb rozmytych jako miary niepewności w problemach harmonogramowania projektów jest dość powszechne. Jednymi z pierwszych prac, w których czas trwania czynności projektu został przedstawiony w sposób niedeterministyczny, były prace Freemana [Freeman, 1960a, 1960b]. Od tej pory wiele prac rozpatruje problem harmonogramowania projektów z niepewnością nie tylko czasu trwania, ale również innych parametrów, np. dostępności zasobów. Większość tych problemów rozpatruje jednak problem jednokryterialny, w którym celem zadania jest minimalizacja czasu trwania projektu [Soltani, Haji, 2007].

Obecnie powstaje niewiele opracowań dotyczących problemu wielokryterialnego harmonogramowania projektów z zastosowaniem liczb rozmytych. Przykładem takiego opracowania może być artykuł Castro-Lacouture, Süer, Gonzalez-Joaqui, Yates [2009], w którym autorzy rozpatrują problem dwukryterialny poszukiwania kompromisu pomiędzy czasem trwania a kosztem projektu, wykorzystując do rozwiązania problemu symulacje. Podobny problem poszukiwania kompromisu pomiędzy czasem trwania a kosztem projektu rozpatrują Błaszyk, Błaszyk, Kania [2011]. W swojej pracy Klein, Langholz [1998] proponują zastosowanie metody przeszukiwania z tabu oraz metod symulowanego wyżarzania dedykowanych zadaniom z rozmytością parametrów do problemu wielokryterialnego harmonogramowania projektów. Kryteriami stosowanymi przez autorów są: jakość rozwiązania (mierzona jako liczba godzin, jakie pracownicy pracują nad zadaniami, które nie są zgodne z ich profesją), koszt projektu oraz kryterium mierzące liczbę przepracowanych przez pracowników godzin w niedo-
godnym dla nich terminie.

W artykule tym podejście oparte na liczbach rozmytych zostanie zastosowane do problemu proaktywnego, wielokryterialnego harmonogramowania projektu. Celem jest budowa wielokryterialnego modelu harmonogramowania pro-

jektu uwzględniającego dwa kryteria: minimalizacji czasu trwania projektu oraz maksymalizacji NPV. Stosowanym parametrem rozmytym zadania będzie czas trwania czynności.

1. Optymalizacja harmonogramu projektu

Problem optymalizacji harmonogramu projektu można opisać przez cztery główne komponenty:

- zbiór zasobów \mathbf{R} ,
- zbiór czynności \mathbf{A} ,
- zbiór relacji kolejnościowych w zbiorze czynności \mathbf{A} ,
- zbiór \mathbf{C} będący zbiorem miar oceniających harmonogram (celów i kryteriów).

Ogólnie rzecz ujmując, problem harmonogramowania projektu polega na takiej alokacji zasobów ze zbioru \mathbf{R} do czynności ze zbioru \mathbf{A} , aby wszystkie czynności mogły się zakończyć, ograniczenia zostały spełnione oraz osiągnięty został „najlepszy kompromis” pomiędzy kryteriami ze zbioru \mathbf{C} . Powyższy problem należy do problemów klasy NP-trudnych [Hapke, Jaskiewicz, Słowiński, 1988].

Istnieją trzy podstawowe typy kryteriów oceny harmonogramów projektów. Są to kryteria: czasowe, finansowe (lub ekonomiczne) oraz zasobowe. Minimalizacja czasu trwania projektu jest najprawdopodobniej najczęściej badanym i najczęściej stosowanym kryterium w harmonogramowaniu projektów. Innym kryterium czasowym oceny harmonogramu projektu jest minimalizacja czasu trwania czynności projektu lub minimalizacja opóźnień czynności projektu względem czasów wcześniej zaplanowanych. Kryteriami finansowymi optymalizacji harmonogramu są: maksymalizacja zdyskontowanych przepływów pieniężnych netto (NPV) oraz minimalizacja kosztów projektu. Do najrzadziej podejmowanych kryteriów oceny harmonogramu należą kryteria oparte na zasobach. W tym przypadku, oprócz minimalizacji odchyłeń dotyczących wykorzystania zasobów, optymalizacji podlega poziom wykorzystania zasobów w projekcie poprzez minimalizację maksymalnego poziomu wykorzystania zasobów.

2. Liczby rozmyte jako miara niepewności

2.1. Czas trwania czynności jako trapezowa liczba rozmyta

Definicja 1

Niech R będzie przestrzenią liczb rzeczywistych. Zbiór rozmyty \tilde{A} jest zbiorem par uporządkowanych $\{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) \mid x \in R\}$, gdzie $\mu_{\tilde{A}}(x) : R \rightarrow [0,1]$. Funkcję $\mu_{\tilde{A}}(x)$ nazywamy funkcją przynależności zbioru rozmytego.

Definicja 2

Wypukłym zbiorem rozmytym \tilde{A} nazywamy zbiór rozmyty, w którym:

$$\forall x, y \in R, \forall \lambda \in [0,1]$$

$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min[\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{A}}(y)]. \quad (1)$$

Definicja 3

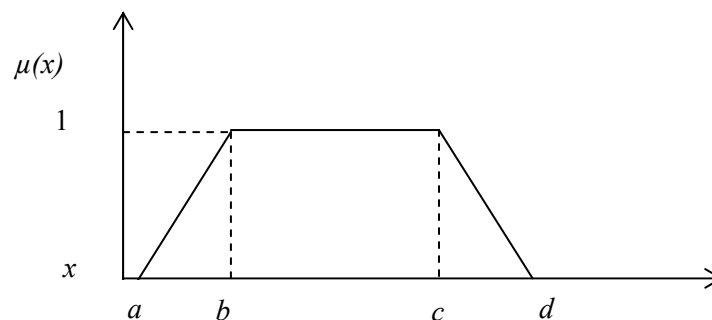
Zbiór rozmyty \tilde{A} jest nazywany pozytywnym, jeżeli funkcja przynależności jest taka, że $\mu_{\tilde{A}}(x) = 0, \forall x \leq 0$.

Definicja 4

Trapezowa liczba rozmyta jest wypukłym zbiorem rozmytym zdefiniowanym następująco: $\tilde{A} = (x, \mu(x))$, gdzie:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & a < x \leq b \\ 1 & b < x \leq c \\ \frac{x-d}{c-d} & c < x \leq d \\ 0 & x > d \end{cases}. \quad (2)$$

Trapezowa liczba rozmyta reprezentowana przez cztery parametry (będące liczbami rzeczywistymi) a, b, c, d , ($a \leq b \leq c \leq d$) jest opisana przez rys. 1:



Rys. 1. Trapezowa liczba rozmyta

Źródło: Soltani, Haji [2007].

Definicja 5

Trapezowa liczba rozmyta $\tilde{A} = (a, b, c, d)$ jest nazywana pozytywną, jeżeli $0 \leq a \leq b \leq c \leq d$.

2.2. Działania na trapezowej liczbie rozmytej

Mamy dane dwie trapezowe liczby rozmyte $\tilde{A} = (a_1, b_1, c_1, d_1)$ oraz $\tilde{B} = (a_2, b_2, c_2, d_2)$, wtedy [Pan, Willis, Yeh, 2001]:

– dodawanie liczb rozmytych:

$$\tilde{A} + \tilde{B} = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2), \quad (3)$$

– odejmowanie liczb rozmytych:

$$\tilde{A} - \tilde{B} = (a_1 - d_2, b_1 - c_2, c_1 - b_2, d_1 - a_2), \quad (4)$$

– maksimum rozmyte:

$$MAX(\tilde{A}, \tilde{B}) = (\max(a_1, a_2), \max(b_1, b_2), \max(c_1, c_2), \max(d_1, d_2)), \quad (5)$$

– minimum rozmyte:

$$MIN(\tilde{A}, \tilde{B}) = (\min(a_1, a_2), \min(b_1, b_2), \min(c_1, c_2), \min(d_1, d_2)), \quad (6)$$

– mnożenie liczby rozmytej przez stałą m :

$$m \otimes \tilde{A} = (ma_1, mb_1, mc_1, md_1), \quad (7)$$

– potęgowanie liczby rozmytej (dla pozytywnej liczby rozmytej) [Bansal, 2011]:

$$\tilde{A}^n = (a_1^n, b_1^n, c_1^n, d_1^n), \quad (8)$$

– potęga liczby rzeczywistej m do liczby rozmytej [Bansal, 2011] $\tilde{A} = (a_1, b_1, c_1, d_1)$:

$$m^{\tilde{A}} = (m^{a_1}, m^{a_2}, m^{a_3}, m^{a_4}), \quad (9)$$

– dzielenie przez liczbę rozmytą [Bansal, 2011]:

$$1/\tilde{A} = (1/d_1, 1/c_1, 1/b_1, 1/a_1). \quad (10)$$

2.3. Metoda ścieżki krytycznej w ujęciu rozmytym

Wykorzystując relacje z metody ścieżki krytycznej w przestrzeni rozmytej, możemy dokonać kalkulacji następujących parametrów [Kulejewski, Ibadov, Zieliński, 2011]:

1. Najwcześniejszy moment rozmyty rozpoczęcia czynności j – \tilde{ES}_j :

$$\tilde{ES}_j = \underset{i \in P(j)}{\text{MAX}} \{ \tilde{ES}_i \oplus \tilde{D}_i \}, \quad (11)$$

gdzie:

\tilde{D}_j – rozmyty czas trwania czynności j ,

$P(j)$ – zbiór poprzedników i czynności j ,

\tilde{ES}_i – najwcześniejszy moment rozmyty rozpoczęcia poprzednika i .

2. Najwcześniejszy moment rozmyty zakończenia czynności j – \tilde{EF}_j :

$$\tilde{EF}_j = \tilde{ES}_j \oplus \tilde{D}_j, \quad (12)$$

gdzie:

\tilde{D}_j – rozmyty czas trwania czynności j ,

\tilde{ES}_i – najwcześniejszy moment rozmyty rozpoczęcia poprzednika i .

3. Rozmyty termin zakończenia realizacji projektu \tilde{T}_F :

$$\tilde{T}_F = \tilde{EF}_j, \quad (13)$$

gdzie:

\tilde{EF}_j – najwcześniejszy moment rozmyty zakończenia czynności j .

4. Najpóźniejszy moment rozmyty zakończenia czynności i – \tilde{LF}_i :

$$\tilde{LF}_i = \begin{cases} \underset{j \in S(i)}{\text{MIN}} \{ \tilde{LF}_j \oplus (-\tilde{D}_j) \} & S(i) \neq \phi, \\ \tilde{T}_F & S(i) = \phi \end{cases}, \quad (14)$$

gdzie:

$S(i)$ – zbiór następników czynności i ,

\tilde{LF}_j – najpóźniejszy moment rozmyty zakończenia czynności j ,

\tilde{D}_j – rozmyty czas trwania czynności j ,

\tilde{T}_F – rozmyty termin zakończenia realizacji projektu.

5. Najpóźniejszy moment rozmyty rozpoczęcia czynności i – \tilde{LS}_i :

$$\tilde{LS}_i = \tilde{LF}_i \oplus (-\tilde{D}_i), \quad (15)$$

gdzie:

\tilde{LF}_i – najpóźniejszy moment rozmyty zakończenia czynności i ,

\tilde{D}_i – rozmyty czas trwania czynności i .

3. Wielokryterialne harmonogramowanie projektu przy rozmytych czasach trwania czynności

3.1. Sformułowanie problemu decyzyjnego

Należy utworzyć harmonogram projektu. Do wykonania projektów są wymagane pewne środki, a relacje kolejnościowe pomiędzy czynnościami zostały ściśle określone. Poziom dostępności zasobów odnawialnych w poszczególnych jednostkach czasu jest ograniczony. Czynności projektów są opisane przez następujące parametry: czas trwania, typy oraz ilości wymaganych zasobów odnawialnych, a także przepływy pieniężne przez nie generowane.

3.2. Opis parametrów zadania

W niniejszym artykule przyjęto, że parametrem rozmytym zadania będzie czas trwania. Czas trwania czynności jest zatem trapezową liczbą rozmytą. Zmiennymi decyzyjnymi zadania będą momenty zakończenia poszczególnych czynności. Oznaczmy czynności jako $j = 1, \dots, J$. Czas trwania czynności j wynosi

$\tilde{D}_j = (d_j^1, d_j^2, d_j^3, d_j^4)$. Przez \tilde{S}_j oznaczamy moment rozpoczęcia czynności j .

Moment zakończenia czynności j wynosi zatem:

$$\tilde{F}_j = \tilde{S}_j + \tilde{D}_j. \quad (16)$$

W niniejszym artykule rozpatrujemy model wielokryterialny, w którym optymalizacji będą podlegać trzy kryteria.

Pierwsze kryterium polega na minimalizacji czasu trwania projektu. Moment zakończenia projektu jest równoznaczny z momentem zakończenia ostatniej jego czynności. Ponieważ nie zawsze możliwe jest jednoznaczne wskazanie ostatniej czynności projektu, będziemy minimalizować maksymalny z momentów zakończenia czynności projektu. Funkcja ta ma zatem postać:

$$\underset{j=1, \dots, J}{MAX}(\tilde{F}_j) \rightarrow \min. \quad (17)$$

Kolejnym kryterium optymalizacji jest maksymalizacja NPV projektu. NPV ma następującą postać:

$$NPV = \sum_{j=1}^J \frac{cf_j}{(1+r)^t} - I_0, \quad (18)$$

gdzie:

cf_t – przepływy pieniężne w momencie t ,

I_0 – nakłady początkowe,

r – stopa dyskontowa.

W zadaniu przyjmujemy założenie, że przepływy pieniężne w projekcie są uzależnione od wykonanych czynności i są generowane w momencie ich zakończenia. Zatem NPV będzie zależne od momentu zakończenia czynności, który jest liczbą rozmytą. W związku z powyższym NPV będzie również liczbą rozmytą i będzie miało następującą postać:

$$\tilde{NPV} = \sum_{j=1}^J \frac{cf_j}{(1+r)^{\tilde{F}_j}} - I_0. \quad (19)$$

Funkcja kryterium maksymalizacji NPV ma zatem postać:

$$\tilde{NPV} \rightarrow \max. \quad (20)$$

Jeżeli przyjmiemy jako:

cf_1, cf_2 – przepływy pieniężne generowane przez czynności 1 oraz 2,

$\tilde{F}_1 = (F_1^1, F_1^2, F_1^3, F_1^4)$, $\tilde{F}_2 = (F_2^1, F_2^2, F_2^3, F_2^4)$ – momenty zakończeń czynności 1 oraz 2,

wówczas mamy:

$$\tilde{NPV} = \frac{cf_1}{(1+r)^{(F_1^1, F_1^2, F_1^3, F_1^4)}} + \frac{cf_2}{(1+r)^{(F_2^1, F_2^2, F_2^3, F_2^4)}} - I_0. \quad (21)$$

Korzystając ze wzoru (9) na potęgę liczby rzeczywistej m do liczby rozmytej, otrzymujemy:

$$\tilde{NPV} = \frac{cf_1}{((1+r)^{F_1^1}, (1+r)^{F_1^2}, (1+r)^{F_1^3}, (1+r)^{F_1^4})} + \frac{cf_2}{((1+r)^{F_2^1}, (1+r)^{F_2^2}, (1+r)^{F_2^3}, (1+r)^{F_2^4})} - I_0. \quad (22)$$

Korzystając ze wzoru (10) na dzielenie przez liczbę rozmytą, otrzymujemy:

$$\tilde{NPV} = \left(\frac{cf_1}{(1+r)^{F_1^4}}, \frac{cf_1}{(1+r)^{F_1^3}}, \frac{cf_1}{(1+r)^{F_1^2}}, \frac{cf_1}{(1+r)^{F_1^1}} \right) + \left(\frac{cf_2}{(1+r)^{F_2^4}}, \frac{cf_2}{(1+r)^{F_2^3}}, \frac{cf_2}{(1+r)^{F_2^2}}, \frac{cf_2}{(1+r)^{F_2^1}} \right) - I_0. \quad (23)$$

Korzystając ze wzoru (3) na dodawanie liczb rozmytych, otrzymujemy:

$$\tilde{NPV} = \left(\frac{cf_1}{(1+r)^{F_1^4}} + \frac{cf_2}{(1+r)^{F_2^4}}, \frac{cf_1}{(1+r)^{F_1^3}} + \frac{cf_2}{(1+r)^{F_2^3}}, \frac{cf_1}{(1+r)^{F_1^2}} + \frac{cf_2}{(1+r)^{F_2^2}}, \frac{cf_1}{(1+r)^{F_1^1}} + \frac{cf_2}{(1+r)^{F_2^1}} \right) - I_0. \quad (24)$$

Odejmując nakłady początkowe, otrzymujemy:

$$\tilde{NPV} = \left(\frac{cf_1}{(1+r)^{F_1^4}} + \frac{cf_2}{(1+r)^{F_2^4}} - I_0, \frac{cf_1}{(1+r)^{F_1^3}} + \frac{cf_2}{(1+r)^{F_2^3}} - I_0, \frac{cf_1}{(1+r)^{F_1^2}} + \frac{cf_2}{(1+r)^{F_2^2}} - I_0, \frac{cf_1}{(1+r)^{F_1^1}} + \frac{cf_2}{(1+r)^{F_2^1}} - I_0 \right). \quad (25)$$

Ze względu na fakt, że przepływy pieniężne mogą być ujemne, uzyskana wartość NPV może nie być pozytywną liczbą trapezową, lecz bliską zeru liczbą trapezową. Wyróżniamy trzy typy takiej liczby [Bansal, 2011]:

- i. $\tilde{A} = (a_1, b_1, c_1, d_1) = 0$ jest nazywaną liczbą trapezową bliską zeru typu N_1 wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 < b_1 \leq c_1 < 0 < d_1$.
- ii. $\tilde{A} = (a_1, b_1, c_1, d_1) = 0$ jest nazywaną liczbą trapezową bliską zeru typu N_2 wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 < b_1 < 0 < c_1 < d_1$.
- iii. $\tilde{A} = (a_1, b_1, c_1, d_1) = 0$ jest nazywaną liczbą trapezową bliską zeru typu N_3 wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 < 0 \leq b_1 \leq c_1 < d_1$.

W artykule przyjmujemy następujące ograniczenia:

- ograniczenie dotyczące relacji kolejnościowych poszczególnych czynności, które jest relacją typu zakończenie-początek i ma następującą postać:

$$\tilde{S}_j = \tilde{F}_i + D_i, \quad (26)$$

- ograniczenie dostępności zasobów odnawialnych (R_k to maksymalna dostępność zasobu k):

$$\sum_{j=1}^J \tilde{r}_k \leq R_k, \quad (27)$$

- ograniczenie zmiennej decyzyjnej co do przyjmowanych wartości:

$$\tilde{F}_j = (F_j^1, F_j^2, F_j^3, F_j^4) \geq (0,0,0,0). \quad (28)$$

3.3. Model matematyczny

Model matematyczny problemu przedstawionego w niniejszym artykule ma zatem postać (kolejno wzory 17, 20, 26, 27, 28):

$$\underset{j=1, \dots, J}{\text{MAX}}(\tilde{F}_j) \rightarrow \min$$

$$\tilde{NPV} \rightarrow \max$$

$$\tilde{S}_j = \tilde{F}_j + D_j$$

$$\sum_{j=1}^J \tilde{r}_k \leq R_k$$

$$\tilde{F}_j = (F_j^1, F_j^2, F_j^3, F_j^4) \geq (0,0,0,0)$$

4. Metoda poszukiwania z tabu dla wielokryterialnych problemów rozmytych

Do rozwiązania problemu przedstawionego powyżej została zastosowana metoda poszukiwania z tabu dostosowana do zagadnienia rozpatrującego liczby rozmyte. W swojej pracy Klein i Langholz [1998] zaproponowali algorytm, który analizuje jednocześnie jedno rozwiązanie, a porównanie rozwiązań przebiega poprzez ważenie kryteriów decyzyjnych. Warto zwrócić uwagę na fakt, że powyższy algorytm przetwarza jednocześnie jedno rozwiązanie, podczas gdy algorytm przeszukiwania z tabu dla wielokryterialnych problemów deterministycznych jest algorytmem populacyjnym rozpatrującym jednocześnie wiele rozwiązań. Dla przedstawionego w tym artykule problemu autorka zapropono-

wała dostosowanie metody przeszukiwania z tabu. W metodzie tej operacje są wykonywane na zbiorze rozwiązań oraz występuje zbiór zewnętrzny zawierający rozwiązania niezdominowane. Idea zbioru zewnętrznego została zaczerpnięta z elitarnych algorytmów ewolucyjnych dla problemów wielokryterialnych. Przeszukiwanie z tabu jest metaheurystyką opartą na iteracyjnym przeszukiwaniu przestrzeni rozwiązań z wykorzystaniem sąsiedztwa pewnych elementów tej przestrzeni oraz zapamiętaniem przy tym przeszukiwaniu ostatniego ruchu, dopóki nie zostanie spełniony warunek końcowy. Ruchy wykonane w danej iteracji celem znalezienia kolejnych rozwiązań są zapisywane na liście tabu. Obecność ruchu na liście tabu jest tymczasowa (na określoną liczbę iteracji) i oznacza, że danego ruchu nie można wykonać (tak długo, jak długo znajduje się on na liście tabu). Lista tabu ma za zadanie zmniejszyć prawdopodobieństwo zapętleń algorytmu. Wyjątkiem, kiedy jest dozwolone wykonanie ruchu znajdującego się na liście tabu, jest spełnienie kryterium aspiracji. Jeżeli rozwiązanie uzyskane poprzez wykonanie ruchu zakazanego będzie najlepszym globalnym (dotychczas znanym) rozwiązaniem, wówczas możliwe jest wykonanie ruchu znajdującego się na liście tabu.

W przypadku algorytmu poszukiwania z tabu są poszukiwane wartości maksymalizujące funkcje celu, dlatego też funkcję minimalizującą moment zakończenia projektu należy przekształcić na funkcję maksymalizującą. Do tego celu należy zastosować następujące działanie arytmetyczne na trapezowej funkcji rozmytej:

$$-\tilde{A} = (-d_1, -c_1, -b_1, -a_1). \quad (29)$$

Dla zadania maksymalizacji zestawu k funkcji celu $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x))$. Rozwiązanie x jest niezdominowane, jeśli nie istnieje dopuszczalne rozwiązanie y nie gorsze od x . Dla każdej funkcji celu $f_i: f_i(x) \geq f_i(y)$.

Dwa rozwiązania $\tilde{A} = (a_1, b_1, c_1, d_1)$ oraz $\tilde{B} = (a_2, b_2, c_2, d_2)$ dla pewnej funkcji f będziemy porównywać w następujący sposób:

$$\tilde{A} \geq \tilde{B} \leftrightarrow (a_1 \geq a_2 \wedge b_1 \geq b_2 \wedge c_1 \geq c_2 \wedge d_1 \geq d_2). \quad (30)$$

W algorytmie zastosowano następujące oznaczenia:

$X_0 = \{x_0^1, \dots, x_0^n\}$ – zbiór rozwiązań początkowych,

$X_i = \{x_i^1, \dots, x_i^n\}$ – zbiór rozwiązań bieżących (w iteracji i),

i – licznik iteracji, przy czym I oznacza maksymalną liczbę iteracji,

ND – zbiór rozwiązań niezdominowanych, w którym może się znajdować maksymalnie m rozwiązań,

Z_T – lista tabu, w której może się znajdować maksymalnie t ruchów zakazanych.

Rozwiązanie zadania tą metodą przebiega w następujących krokach:

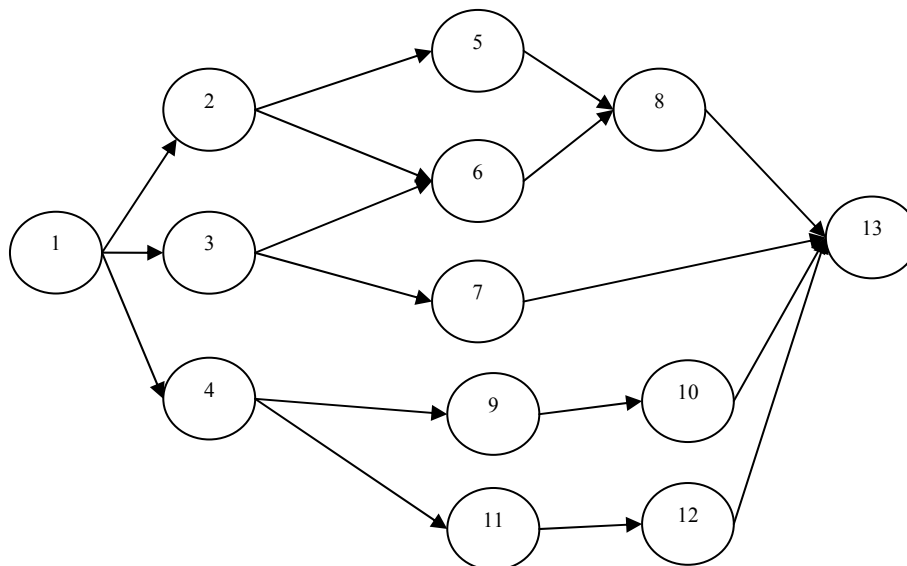
1. Ustaw:
 - $Z_T = \emptyset$ – pustą listę tabu mogącą się składać z maksymalnie t rozwiązań;
 - $ND = \emptyset$ – pusty zbiór zewnętrzny mogący się składać z maksymalnie m rozwiązań;
 - $X_0 = \emptyset$ – pusty zbiór rozwiązań bieżących mieszczący n rozwiązań.
2. $i = 1$.
3. Wygeneruj w sposób losowy zbiór n początkowych rozwiązań dopuszczalnych $X_0 = \{x_0^1, \dots, x_0^n\}$.
4. $X_0 = X$.
5. Oszacuj wartości funkcji kryterialnych dla wszystkich rozwiązań ze zbioru bieżącego.
6. Zidentyfikuj rozwiązania niezdominowane w zbiorze $P_i = X_i + ND_i$ oraz skopiuj je do zbioru ND_i .
 - A. Jeżeli liczba rozwiązań w zbiorze $ND_i < m$, dołóż rozwiązania ze zbioru rozwiązań bieżących.
 - B. Jeżeli liczba rozwiązań w zbiorze $ND_i > m$, wylosuj rozwiązania, które zostaną ze zbioru usunięte.
7. $i = I + i$.
8. Dla każdego rozwiązania ze zbioru ND_i zidentyfikuj rozwiązania sąsiadujące, takie że ruch w kierunku rozwiązania nie znajduje się na liście tabu, oraz umieść rozwiązania w zbiorze X_{i+1} .
9. Uaktualnij listę tabu.
10. Wykonaj kroki 5-9 I razy.

5. Przykład obliczeniowy

Dany jest projekt składający się z 13 czynności. Czasy trwania czynności są dane trapezową liczbą rozmytą. Ponadto dla każdej z czynności zdefiniowano typy oraz ilości wymaganych zasobów oraz generowane przepływy pieniężne (tab. 1). Zakładamy, że przepływy pieniężne są generowane w momencie zakończenia czynności.

Należy utworzyć harmonogram projektu optymalizujący kryteria opisane w punkcie 3 niniejszego artykułu.

Sieć projektu jest dana następującym grafem AON (*Activity on Node*) (rys. 1).



Rys. 2. Sieć projektu

Źródło: Opracowanie własne.

Maksymalny dostępny poziom zasobów odnawialnych w każdej jednostce wynosi 2 dla zasobu R1 oraz 6 dla zasobu R2. Stopa dyskontowa wynosi 0,05.

Tabela 1. Dane do przykładu obliczeniowego

Czynność	Czas trwania	Zasób 1	Zasób 2	Przepływy pieniężne
1	(3,4,5,6)	1	3	-2000
2	(6,9,9,15)	1	2	-1000
3	(10,12,15,20)	0	3	-2000
4	(5,8,10,15)	0	3	-1000
5	(10,13,16,20)	0	2	-2000
6	(8,10,12,15)	1	1	-2000
7	(4,5,7,8)	0	2	2000
8	5	0	3	4000
9	(15,18,20,25)	1	2	6000
10	(18,22,25,30)	1	2	8000
11	(10,15,20,25)	0	2	10000
12	(10,12,15,20)	1	0	12000
13	10	1	5	15000

Rozwiązanie zadania

Krok 1

$$Z_T = \phi$$

$$ND = \phi$$

$$X_0 = \phi$$

Krok 2

$$i = 1$$

Krok 3

Trzeci krok procedury zakłada wygenerowanie rozwiązań w sposób losowy. Do wygenerowania pierwszego zbioru rozwiązań dopuszczalnych zastosowano heurystykę opartą na regułach priorytetu. Zastosowano następujące reguły priorytetu (dla podejścia rozmytego):

- najmniejszy z najwcześniejszych rozmytych momentów rozpoczęcia czynności (\tilde{ES}): $\min_j \tilde{ES}_j$,
- maksymalny rozmyty czas trwania (\tilde{PT}): $\max_j \tilde{d}_j$,
- minimalny rozmyty czas trwania (\tilde{PT}): $\min_j \tilde{d}_j$,
- największe zapotrzebowanie na zasoby (\tilde{GRD}): $\max_j \tilde{d}_j \sum_{k=1}^K r_{jk}$.

Wartość poszczególnych reguł jest następująca (tab. 2):

Tabela 2. Wartości reguł priorytetu stosowanych do wygenerowania pierwszego zbioru rozwiązań

Czynność/ reguła priorytetu	\tilde{ES}	\tilde{PT}	\tilde{GRD}
1	(0,0,0,0)	(3,4,5,6)	(12,16,20,24)
2	(3,4,5,6)	(6,9,9,15)	(18,27,27,45)
3	(3,4,5,6)	(10,12,15,20)	(30,36,45,60)
4	(3,4,5,6)	(5,8,10,15)	(15,24,30,45)
5	(9,13,14,21)	(10,13,16,20)	(20,26,32,40)
6	(13,16,20,26)	(8,10,12,15)	(16,20,24,30)
7	(13,16,20,26)	(4,5,7,8)	(8,10,14,16)
8	(21,26,32,41)	5	15
9	(8,12,15,21)	(15,18,20,25)	(45,54,60,75)
10	(23,30,35,46)	(18,22,25,30)	(54,66,75,90)
11	(8,12,15,21)	(10,15,20,25)	(20,30,40,40)
12	(18,27,35,46)	(10,12,15,20)	(10,12,15,20)
13	(41,52,60,76)	10	60

Zbiór rozwiązań bieżących składa się z następujących rozwiązań (tab. 3):

Tabela 3. Momenty zakończenia czynności projektu uzyskane dzięki zastosowaniu reguł priorytetu

Czynność	$\min_j \tilde{L}F_j$	$\max_j \tilde{d}_j$	$\min_j \tilde{d}_j$	$\max_j \tilde{d}_j \sum_{k=1}^K r_{jk}$
1	(3,4,5,6)	(3,4,5,6)	(3,4,5,6)	(3,4,5,6)
2	(9,13,14,21)	(9,13,14,21)	(9,13,14,21)	(9,13,14,21)
3	(13,16,20,26)	(18,24,30,41)	(18,24,30,41)	(29,38,45,61)
4	(14,21,24,36)	(8,12,15,21)	(8,12,15,21)	(8,12,15,21)
5	(23,29,36,46)	(28,37,46,61)	(19,26,30,41)	(19,26,30,41)
6	(31,39,48,61)	(31,40,47,61)	(26,34,42,56)	(37,48,57,76)
7	(28,41,51,69)	(32,42,53,69)	(22,29,37,49)	(33,43,52,69)
8	(36,44,53,66)	(33,44,55,71)	(31,39,47,61)	(42,53,62,81)
9	(29,39,44,61)	(23,30,35,46)	(46,57,67,86)	(49,61,70,91)
10	(47,61,69,91)	(51,66,80,101)	(64,79,92,116)	(67,83,95,121)
11	(24,36,44,61)	(28,39,50,66)	(34,46,55,71)	(18,27,35,46)
12	(34,48,59,81)	(38,51,65,86)	(44,50,70,91)	(28,39,50,66)
13	(57,71,79,101)	(61,76,90,101)	(74,89,102,126)	(77,93,105,131)

Krok 4

$$X_0 = X_1$$

Krok 5

Oszacowanie wartości funkcji kryterialnych dla wszystkich rozwiązań ze zbioru rozwiązań bieżących (tab. 4).

Tabela 4. Wartości funkcji kryterium dla rozwiązań ze zbioru bieżącego

	x_1^1	x_1^2
f_1	(57,71,79,101)	(61,74,85,106)
f_2	(-1422, -68,1156, 4751)	(-2011,-1354,212,2854)
	x_1^3	x_1^4
f_1	(74,89,102,126)	(77,93,105,131)
f_2	(-1890,-1504,-709,1063)	(-829,214,1820,4680)

Krok 6

Zidentyfikuj rozwiązania niezdominowane w zbiorze $P_1 = X_1 + ND_1$.

Aktualnie zbiór ND_1 jest zbiorem pustym, dlatego rozwiązania będą identyfikowane tylko w zbiorze $P_1 = X_1$.

Analizując rozwiązania, można jednoznacznie stwierdzić, że rozwiązanie x_1^1 dominuje rozwiązania x_1^2 oraz x_1^3 . Nie możemy jednak jednoznacznie stwierdzić, że rozwiązanie x_1^1 jest niezdominowane, ponieważ nie jesteśmy w stanie określić relacji dominacji między rozwiązaniem x_1^1 a x_1^4 . Analizując wartości funkcji kryterium f_1 , można zauważyć, że rozwiązanie x_1^1 ma jednoznacznie lepsze rezultaty od rozwiązania x_1^4 . Jednak nie jesteśmy w stanie jednoznacznie określić, które rozwiązanie jest lepsze ze względu na wartość funkcji kryterium f_2 .

Jeżeli zamienimy liczbę rozmytą reprezentującą wartości funkcji kryterium f_2 dla rozwiązań x_1^1 oraz x_1^4 metodą środka maksimów, to otrzymamy wartości $f_2(x_1^1) = 544$, $f_2(x_1^4) = 1017$. Wówczas rozwiązania x_1^1 oraz x_1^4 uznajemy za rozwiązania niezdominowane w danej iteracji oraz umieszczamy je w zbiorze ND_1 .

Ponieważ liczba rozwiązań w zbiorze $ND_1 < 4$, losujemy brakujące 1 rozwiązanie ze zbioru rozwiązań bieżących. Tym samym aktualnie zbiór ND_1 składa się z rozwiązań: $ND_1 = \{x_1^1, x_1^2, x_1^3, x_1^4\}$.

Krok 7

$$i = 1+i$$

Krok 8

Identyfikujemy rozwiązania w sąsiedztwie rozwiązań znajdujących się w zbiorze ND_1 (tab. 5).

Tabela 5. Rozwiązania sąsiednie do rozwiązań znajdujących się w zbiorze ND_1

Czynność	x_2^1	x_2^2	x_2^3	x_2^4
1	(3,4,5,6)	(3,4,5,6)	(3,4,5,6)	(3,4,5,6)
2	(9,13,14,21)	(19,25,29,41)	(9,13,14,21)	(9,13,14,21)
3	(13,16,20,26)	(13,16,20,26)	(18,24,30,41)	(33,42,50,66)
4	(14,21,24,36)	(8,12,15,21)	(8,12,15,21)	(8,12,15,21)
5	(23,29,36,46)	(28,37,46,61)	(19,26,30,41)	(19,26,30,41)
6	(21,26,32,41)	(31,40,47,61)	(26,34,42,56)	(41,52,67,81)
7	(28,41,51,69)	(32,42,53,69)	(22,29,37,49)	(37,47,62,74)
8	(36,44,53,66)	(33,44,55,71)	(39,51,60,76)	(46,57,72,86)
9	(29,39,44,61)	(23,30,35,46)	(37,47,57,74)	(23,30,35,46)
10	(47,61,69,91)	(51,66,80,101)	(55,69,82,104)	(41,52,60,76)
11	(31,41,52,66)	(28,39,50,66)	(34,46,55,71)	(18,27,35,46)
12	(41,53,67,86)	(38,51,65,86)	(44,58,70,91)	(28,39,50,66)
13	(57,71,79,101)	(61,76,90,101)	(65,79,92,114)	(56,67,82,96)

Krok 9

Uaktualnij listę tabu.

Iteracja 2*Krok 5*

Oszacowanie wartości funkcji kryterialnych dla wszystkich rozwiązań ze zbioru rozwiązań bieżących (tab. 6).

Tabela 6. Wartości funkcji kryterium dla rozwiązań ze zbioru bieżącego

	x_2^1	x_2^2
f_1	(57,71,79,101)	(61,76,90,101)
f_2	(-1751, -891, 268,2916)	(-244, -958,1262,4220)
	x_2^3	x_2^4
f_1	(65,79,92,114)	(56,67,82,96)
f_2	(-1875, -1428, -509,1514)	(25, 1599, 3798,747,)

Krok 6

Zidentyfikuj rozwiązania niezdominowane w zbiorze P_2 :

$$P_2 = X_2 + ND_2 = \{x_2^1, x_2^2, x_2^3, x_2^4, x_1^1, x_1^2, x_1^3, x_1^4\}.$$

Rozwiązaniem niezdominowanym jest rozwiązanie x_2^4 .

Po wykonaniu 20 iteracji w zbiorze ND_{20} znajdują się cztery rozwiązania, przy czym dwa są rozwiązaniami niezdominowanymi. Są to rozwiązania x_2^4 oraz x_{14}^2 (tab. 7).

Tabela 7. Zidentyfikowane rozwiązania niezdominowane po przeprowadzeniu 20 iteracji

Czynność	x_2^4	x_{14}^2
1	(3,4,5,6)	(3,4,5,6)
2	(9,13,14,21)	(14,21,24,36)
3	(33,42,50,66)	(13,16,20,26)
4	(8,12,15,21)	(8,12,15,21)
5	(19,26,30,41)	(24,34,40,56)
6	(41,52,67,81)	(31,41,52,66)
7	(37,47,62,74)	(28,39,47,64)
8	(46,57,72,86)	(36,46,57,71)
9	(23,30,35,46)	(28,34,40,61)
10	(41,52,60,76)	(26,56,65,81)
11	(18,27,35,46)	(23,31,40,51)
12	(28,39,50,66)	(33,43,55,71)
13	(56,67,82,96)	(46,66,75,91)

Funkcje przystosowania przyjmują następujące wartości (tab. 8):

Tabela 8. Wartości funkcji przystawania rozwiązań niezdominowanych po przeprowadzeniu 20 iteracji

	x_2^4	x_{14}^2
f_1	(56,67,82,96)	(46,66,75,91)
f_2	(25, 1599, 3798, 7470)	(-740, 710, 2531,7194)

Warto zwrócić uwagę, że wartości funkcji kryterialnych są znacznie lepsze niż rozwiązań ze zbioru początkowego, co sugeruje, że tak powszechnie stosowane w harmonogramowaniu heurystyki oparte na regułach priorytetu mogą nie dawać satysfakcjonujących rozwiązań i powinny być łączone z innymi metodami.

Podsumowanie

W niniejszym artykule przedstawiono problem wielokryterialnego harmonogramowania projektu z ograniczonymi zasobami przy rozmytych czasach trwania. Kryteriami oceny harmonogramów była minimalizacja czasu trwania projektu oraz maksymalizacja NPV projektu. Powszechnie podejmowany w literaturze jest jednokryterialny problem harmonogramowania projektu z optymalizacją czasu trwania, podczas gdy zaproponowana wielokryterialność zadania pozwala na uwzględnienie nie tylko czasu przy ocenie jakości harmonogramów.

Zaletą podejścia jest możliwość przedstawienia czasu trwania zgodnego z posiadaną na temat danej czynności wiedzą pochodzącą od ekspertów oraz z doświadczeń czerpanych z poprzednich projektów (tzw. *lessons learned*). Podejście pozwala urealnić harmonogram projektu oraz uodpornić go na ryzyko nieprzewidzianych zdarzeń, przez co ogranicza (nie eliminuje) konieczność reaktywnego harmonogramowania projektu.

Wadą podejścia bywa niejednoznaczność rezultatów. W przypadku próby identyfikacji rozwiązań niezdominowanych nie zawsze było możliwe jednoznaczne stwierdzenie, czy dane rozwiązanie jest rozwiązaniem niezdominowanym.

Dalsze badania w tej dziedzinie powinny być prowadzone w kierunku rozwoju metod analizy rozwiązań w celu identyfikacji rozwiązań niezdominowanych przy rozmytych wartościach funkcji kryterium oraz w kierunku porównania rezultatów proponowanego w artykule algorytmu z innymi metodami do rozwiązywania problemów wielokryterialnych przy rozmytych parametrach zadania.

Literatura

- Bansal A. (2011), *Trapezoidal Fuzzy Numbers (a,b,c,d): Arithmetic Behavior*, "International Journal of Physical and Mathematical Sciences", (2)1, s. 39-44.
- Błaszyk P., Błaszyk T., Kania M.B. (2011), *Theoretical Foundations of Fuzzy Bi-criterial Approach to Project Cost and Schedule Buffer Sizing*, Proceedings of the World Congress on Engineering and Computer Science.
- Castro-Lacouture D., Süer G.A., Gonzalez-Joaqui J., Yates J.K. (2009), *Construction Project Scheduling with Time, Cost, and Material Restrictions Using Fuzzy Mathematical Models and Critical Path Method*, "Journal of Construction Engineering and Management", No 135, s. 1096-1104, ASCE.
- Freeman R.J. (1960a), *A Generalized PERT*, "Operations Research", 8, s. 281-286.
- Freeman R.J. (1960b), *A Generalized Network Approach to Project Activity Sequencing*, "IRE Transactions on Engineering Management", 7, s. 103-107.
- Hapke M., Jazskiewicz A., Słowiński R. (1988), *Interactive Analysis of Multiple-criteria Project Scheduling Problems*, "European Journal of Operational Research", 107, s. 315-324.
- Klein Y., Langholz G. (1998), *Multi-Criteria Scheduling Optimization Using Fuzzy Logic. Systems, Man, and Cybernetics*, IEEE International Conference.
- Kulejewski J., Ibadov N., Zieliński B. (2011), *Zastosowanie teorii zbiorów rozmytych w harmonogramowaniu robot budowlanych metodą łańcucha krytycznego*, Budownictwo i Inżynieria Środowiska nr 2(3), Oficyna Wydawnicza Politechniki Białostockiej, s. 331-338.
- Lambrechts O., Demeulemeester E., Herroelen W. (2007), *Proactive and Reactive Strategies for Resource-constrained Project Scheduling with Uncertain Resources Availabilities*, Springer.
- Nematian J., Eshghi K., Eshragh-Jaromi A. (2010), *A Resource-Constrained Project Scheduling Problem with Fuzzy Random Duration*, "Journal of Uncertain Systems".
- Pan H., Willis R.J., Yeh C.H. (2001), *Resource-constrained Project Scheduling with Fuzziness*, Proceedings of 2001 WSES International Conference on Fuzzy Sets and Fuzzy Systems (FSFS '01).
- Soltani A., Haji R. (2007), *Project Scheduling Method Based on Fuzzy Theory*, "Journal of Industrial and Systems Engineering", No 1, s. 70-80.

MULTIPLE CRITERIA PROJECT SCHEDULING WITH ACTIVITY FUZZY DURATION

Summary: Planning is one of the most important aspect in project management. Plan defines goals, activities and timeframe for project realization. To define project timeframe, project schedule needs to be prepared. In real life applications project managers have to deal with dynamic environment and uncertainty. In this situation deterministic approach for project planning brings a risk for project timely completion. This is the reason

for using fuzzy numbers in project scheduling problem. In this paper fuzzy based approach was used for multiple criteria project scheduling problem. The purpose of this paper is to build fuzzy multiple criteria mathematical model with two objectives: project time minimization and NPV maximization. Activities duration will be presented as fuzzy numbers.

Keywords: multiple criteria decision making, project scheduling, trapezoidal fuzzy number.