Uniwersytet
Ekonomiczny
w Katowicach

Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe
Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach
ISSN 2083-8611 Nr 331 · 2017

Krzysztof Piasecki

Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu
Wydział Zarządzania
k.piasecki@ue.poznan.pl

OCZEKIWANA STOPA ZWROTU WYZNACZONA JAKO SKIEROWANA LICZBA ROZMYTA

Streszczenie: Punktem wyjścia do naszych rozważań jest wartość bieżąca (PV) zdefiniowana jako dodatnia L-R liczba rozmyta. W tej pracy informacje opisane za pomocą tak wyznaczonej PV zostały uzupełnione o subiektywną prognozę zwrotu trendu ceny rynkowej. Prognoza ta została implementowana w proponowanym modelu PV jako orientacja liczby rozmytej. W ten sposób PV została przedstawiona jako skierowana rozmyta liczba. Tak określoną PV zastosowano do wyznaczenia stopy zwrotu. Przy oczywistym założeniu, że wartość przyszła jest zmienną losową, wyznaczona stopa zwrotu została opisana jako skierowana zmienna losowa. Na koniec wyznaczono oczekiwaną stopę zwrotu.

Słowa kluczowe: wartość bieżąca, stopa zwrotu, nieprecyzyjność, skierowana liczba rozmyta.

JEL Classification: C02.

Wprowadzenie

Pod pojęciem instrumentu finansowego rozumiemy uprawnienie do przyszłego przychodu finansowego wymagalnego w ściśle określonym terminie wymagalności. Wartość tego przychodu interpretujemy jako antycypowaną wartość przyszłą (w skrócie FV) tego instrumentu. Zgodnie z tezą o niepewności [Mises, 1962; Kaplan, Barish, 1967] każdy przyszły nieznany nam stan rzeczy jest niepewny. Niepewność w ujęciu Misesa i Kaplana jest skutkiem braku naszej wiedzy o przyszłym stanie rzeczy. W rozpatrywanym przypadku można jednak określić ten przyszły moment, w którym rozpatrywany stan rzeczy będzie już nam znany. Ten rodzaj niepewności Misesa-Kaplana nazywamy w skrócie niepewnością. Za [Kolmogorow, 1933, 1956; Mises, 1957; Lambalgen, 1996; Sadowski, 1977, 1980; Czerwiński, 1960, 1969; Caplan, 2001] przyjmujemy, że jest to warunek wystarczający na to, aby modelem niepewności było prawdopodobieństwo. Z tego powodu niepewność nazywamy też niepewnością kwantyfikowalną. Równocześnie warto tutaj zauważyć, że FV nie jest obciążona niepewnością Knighta [1921]. Wszystko to prowadzi do stwierdzenia, że FV jest zmienną losową.

Wartością bieżącą (w skrócie PV) nazywamy wartość teraźniejszego ekwiwalentu płatności dostępnej w ustalonym momencie. Powszechnie jest już akceptowany pogląd, że – z wykluczeniem teorii procentu – PV przyszłych przepływów finansowych może być wartością przybliżoną. Naturalną konsekwencją takiego podejścia jest ocena PV za pomocą liczb rozmytych. Odzwierciedleniem tych poglądów było zdefiniowanie rozmytej PV jako zdyskontowanej rozmytej prognozy wartości przyszłego przepływu finansowego [Ward, 1985]. Koncepcja zastosowania liczb rozmytych w arytmetyce finansowej wywodzi się od Buckleya [1987]. Definicja Warda jest uogólniona w pracy Greenhuta, Normana i Temponi [1995] do przypadku nieprecyzyjnie oszacowanego odroczenia. Sheen [2005] rozwija definicję Warda do przypadku rozmytej stopy nominalnej. Buckley [1987], Gutierrez [1989], Kuchta [2000] i Lesage [2001] dyskutują problemy związane z zastosowaniem rozmytej arytmetyki do wyznaczania rozmytej PV. Huang [2007] rozwija definicję Warda do przypadku, kiedy przyszły przepływ finansowy jest dany jako rozmyta zmienna losowa. Bardziej ogólna definicja rozmytej PV jest proponowana przez Tsao [2005] zakładającego, że przyszły przepływ finansowy jest określony jako rozmyty zbiór probabilistyczny. Wszyscy ci autorzy przedstawiają PV jako dyskonto nieprecyzyjnie oszacowanej wartość przyszłego przepływu finansowego. Odmienne podejście zostało zaprezentowane w pracach Piaseckiego [2011a, 2011b, 2014] oraz Piaseckiego i Siwek [2015], gdzie zaprezentowano behawioralną wartość bieżącą (BPV) zdefiniowaną, jako rozmytą PV ocenioną na podstawie bieżącej ceny rynkowej instrumentu finansowego.

Jednym z istotnych utrudnień do zastosowań pojęcia rozmytej PV były złożone zależności opisujące arytmetykę w przestrzeni liczb rozmytych. W związku z tą trudnością, w pracy Kacprzaka [2012] znajdujemy sugestię zastosowania dla celów analizy rynków finansowych skierowanych liczb rozmytych [Kosiński, Prokopowicz, Ślęzak, 2002a, 2002b, 2003]. Główną przesłanką do takiej modyfikacji była prostota realizacji działań arytmetycznych na w przestrzeni skierowanych liczb rozmytych [Kacprzak, 2012]. Z tej przyczyny w pracy Łyczkowskiej-Hanćkowiak [2017] BPV przedstawiono za pomocą skierowanej liczby rozmytej. Przedmiotem rozważań w tej pracy będzie dowolna rozmyta PV przedstawiona, jako skierowana liczba rozmyta.

Podstawowym narzędziem oceny korzyści płynących z posiadania instrumentu finansowego jest stopa zwrotu zdefiniowana jako malejąca funkcja PV i równocześnie rosnąca funkcja FV. W pracy Piaseckiego [2011b] pokazano, że jeśli PV jest rozmytą liczbą rzeczywistą, to wtedy stopa zwrotu jest rozmytym zbiorem probabilistycznym [Hirota, 1981] identyfikowanym jako rozmyta zmienna losowa [Kwakernaak, 1978]. W pracy Łyczkowskiej-Hanćkowiak [2017] korzyści płynące z posiadania instrumentu finansowego oceniano za pomocą prostej stopy zwrotu. Naturalną konsekwencją przyjętych założeń o BPV był fakt, że stopa ta została wyznaczona jako skierowana rozmyta zmienna losowa. W prezentowanej pracy korzyści płynące z posiadania instrumentu finansowego oceniać będziemy za pomocą dowolnej stopy zwrotu. Z założeń przyjętych o dowolnej rozmytej PV wynika, że także i ta stopa zwrotu jest opisana jako skierowana liczba rozmyta.

Te dwa silne uogólnienia powinny stanowić punkt wyjścia do dalszych badań nad problematyką wykorzystania skierowanych liczb rozmytych do analizy rynków finansowych. Podobnie, jak Kacprzak [2012], autor jest w pełni przekonany, że zastosowanie skierowanych liczb rozmytych ułatwi analizę instrumentów finansowych o nieprecyzyjnie oszacowanych walorach.

1. Istota pojęcia skierowanej liczby rozmytej

Teoria zbiorów rozmytych [Zadeh, 1965] odnosi się do opisu pojęć nieprecyzyjnych składających się z elementów pochodzących z predefiniowanej przestrzeni elementarnej $\mathbb{X}$. Każdy podzbiór rozmyty $A \subset \mathbb{X}$ jest jednoznacznie opisany za pomocą swej funkcji przynależności $\mu_A: \mathbb{X} \to [0; 1]$. W ujęciu logik wielowartościowych wartość $\mu_A(x)$ jest interpretowana jako wartość logiczna zdania $x \in A$. Za pomocą symbolu $\mathcal{F}(\mathbb{X})$ oznaczamy rodzinę wszystkich podzbiorów rozmytych w przestrzeni $\mathbb{X}$.

W tej pracy przedmiotem naszego zainteresowania będą wartości przybliżone. Stąd przestrzeń $\mathbb{X}$ ograniczamy do przypadku przestrzeni liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$. Przybliżeniem dowolnej wartości jest rozmyta liczba rzeczywista $S \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ zdefiniowana w najbardziej ogólny sposób następująco:

Definicja 1 [Dubois, Prade, 1979]: Liczba rozmyta (w skrócie FN) jest to podzbiór rozmyty $S \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ reprezentowany przez swą funkcję przynależności $\mu_S: \mathbb{R} \to [0; 1]$ spełniającą warunki:

$$\exists_{x\in\mathbb{R}}:\ \mu_S(x) = 1; \tag{1}$$

$$\forall_{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3}:\ x \le y \le z \Longrightarrow \mu_S(y) \ge \min\{\mu_S(x), \mu_S(z)\}. \tag{2}$$

Operacje jedno- i dwuargumentowe na liczbach rozmytych zostały zdefiniowane w pracy Dubois i Prade'a [1978] w sposób zgodny z zasadą rozszerzenia Zadeha [1975a, 1975b, 1975c]. Spomiędzy ogółu FN wyróżniamy następujący rodzaj FN.

Definicja 2 [Dubois, Prade, 1980]**:** Dla dowolnej czwórki $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ spełniającej warunek $a < b \le c < d$, FN $S(a, b, c, d)$ typu LR (w skrócie LR-FN) jest opisana przez swą funkcję przynależności $\mu_S \in [0; 1]^{\mathbb{R}}$ zdefiniowaną następująco:

$$\mu_S(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ L_S(x) & a \le x < b \\ 1 & b \le x \le c, \\ R_S(x) & c < x \le d \\ 0 & d < x \end{cases} \tag{3}$$

gdzie lewa funkcja odniesienia $L_S\colon [a, b[\longrightarrow [0,1]$ jest niemalejąca i prawa funkcja odniesienia $R_S\colon]c, d] \longrightarrow [0,1]$ jest nierosnąca.

Zauważmy, że dla dowolnej pary $(a, d) \in \mathbb{R}^2$ mamy

$$[a, a[=]d, d] = \emptyset. \tag{4}$$

Dzięki temu uogólniamy Definicję 2 do przypadku dowolnej czwórki $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ spełniającej nierówność $a \le b \le c \le d$. Wynika stąd, że dowolna FN z ograniczonym nośnikiem może być reprezentowana za pomocą uogólnionej LR-FN (w skrócie g-LR-FN).

Pojęcie skierowanych liczb rozmytych (w skrócie OFN) zostało wprowadzone przez Kosińskiego i współautorów w serii artykułów [Kosiński, Prokopowicz, Ślęzak, 2002a, 2002b, 2003; Kosiński, 2006] jako rozszerzenie pojęcia FN. Stąd dowolna OFN powinna być określona jako taki podzbiór rozmyty przestrzeni liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$, którego funkcja przynależności spełnia warunki (1) i (2). Z drugiej strony, Kosiński zdefiniował OFN jako uporządkowaną parę funkcji przekształcających przedział jednostkowy $[0,1]$ w $\mathbb{R}$. Taka para nie jest podzbiorem rozmytym w $\mathbb{R}$. Oznacza to, że nie możemy zaakceptować oryginalnej terminologii Kosińskiego. Niemniej, intuicyjne podejście Kosińskiego do pojęcia OFN jest bardzo użyteczne. Z tych powodów poniżej zostanie zaprezentowana zmodyfikowana definicja OFN. W tej postaci w pełni będzie odpowiadać intuicyjnemu określeniu OFN sformułowanemu przez Kosińskiego. Pojęcie OFN jest ściśle powiązane z następującą parą uporządkowaną.

Definicja 3. Para Kosińskiego jest to uporządkowana para (f_S, g_S) ciągłych bijekcji lub funkcji stałych $f_S: [0,1] \to UP_S$ i $g_S: [0,1] \to DOWN_S$ spełniających warunki:

$$\big(f_s(1) - f_s(0)\big) \cdot \big(g_s(1) - g_s(0)\big) \leq 0, \tag{5}$$

$$|f_s(1) - g_s(1)| \leq |f_s(0) - g_s(0)|, \tag{6}$$

$$UP_S \cap DOWN_S = \{f_s(1)\} \cap \{g_s(1)\}. \tag{7}$$

Dla dowolnej pary Kosińskiego (f_S, g_S) funkcja $f_S: [0,1] \to UP_S$ jest nazywana funkcją wznoszącą. Wtedy funkcja $g_S: [0,1] \to DOWN_S$ jest nazywana funkcją opadająca. Obie te funkcje mają swoją wspólną nazwę – funkcje Kosińskiego.

Z warunku (5) wynika, że funkcje Kosińskiego nie mogą być równocześnie rosnące lub równocześnie malejące. Korzystając z tego faktu, definiujemy OFN w następujący sposób

Definicja 4. Dla ustalonej pary Kosińskiego (f_S, g_S) OFN $\overleftrightarrow{S}$ jest to para g-LR-FN i orientacji zdefiniowana w następujący sposób:

– jeśli lewa funkcja odniesienia istnieje, to jest ona odwrotnością rosnącej funkcji Kosińskiego;
– jeśli prawa funkcja odniesienia istnieje, to jest ona odwrotnością malejącej funkcji Kosińskiego;
– orientacja jest określona jako wspólny zwrot wszystkich wektorów prowadzących z przeciwdziedziny UP_S funkcji wznoszącej do przeciwdziedziny $DOWN_S$ funkcji opadającej.

Powyższa definicja jest zgodna ze stosowanym przez Kosińskiego intuicyjnym podejściem do pojęcia OFN. Stąd zgadzam się z opinią, że OFN powinny być nazwane liczbami Kosińskiego [Prokopowicz 2015a, Prokopowicz, Pedrycz, 2015b]. Przestrzeń wszystkich OFN oznaczamy za pomocą symbolu $\mathfrak{K}$. Dla dowolnej OFN $\overleftrightarrow{S} \in \mathfrak{K}$ jej funkcja wznosząca jest oznaczona za pomocą symbolu f_S i jej funkcja opadająca oznaczana jest za pomocą symbolu g_S.

Kacprzak [2012] interpretuje dodatnią orientację OFN jako przewidywanie wzrostowego trendu FN. Zaznaczać ją będziemy za pomocą dodatniej orientacji. Przewidywanie spadkowego trendu ceny rynkowej zaznaczać będziemy za pomocą ujemnej orientacji.

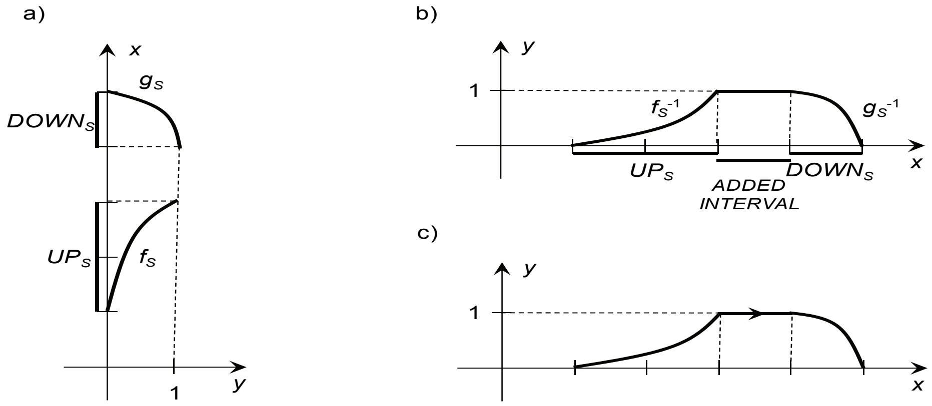
Ciągłość funkcji Kosińskiego powoduje, że UP_S and $DOWN_S$ są przedziałami domkniętymi. Liczby $f_S(0)$ i $f_S(1)$ są granicami przedziału UP_S. Liczby $g_S(0)$ i $g_S(1)$ są granicami przedziału $DOWN_S$. Z tego powodu dowolną OFN $\overleftrightarrow{S}$ z danymi UP_S i $DOWN_S$ oznaczamy za pomocą symbolu

$\overleftrightarrow{S}(f_S(0), f_S(1), g_S(1), g_S(0))$. Warunki (5), (6) i (7) implikują, że ta OFN spełnia dokładnie jeden z poniższych warunków:

$$f_S(0) \leq f_S(1) \leq g_S(1) \leq g_S(0), \tag{8}$$

$$f_S(0) \geq f_S(1) \geq g_S(1) \geq g_S(0), \tag{9}$$

Kiedy $f_S(0) < g_S(0)$, to wtedy warunek (8) opisuje dodatnią orientację OFN. W tym przypadku funkcja wznosząca f_S jest rosnąca lub stała i funkcja opadająca g_S jest malejąca lub stała. Wykresy takich funkcji Kosińskiego zostały przedstawione na rys. 1a.



Rys. 1
a) Dodatnio zorientowana para Kosińskiego
b) Funkcja przynależności FN określona przez dodatnio zorientowaną OFN
c) Strzałka określająca dodatnią orientację OFN

Źródło: Kosiński [2006].

Ponadto dodatnio zorientowana OFN $\overleftrightarrow{S}(f_S(0), f_S(1), g_S(1), g_S(0))$ jednoznacznie determinuje FN $S(f_S(0), f_S(1), g_S(1), g_S(0))$ opisaną przez swą funkcję przynależności $\mu_S: \mathbb{R} \to [0; 1]$ daną następująco:

$$\mu_S(x) = \begin{cases} 0 & x < f_S(0) \\ f_S^{-1}(x) & f_S(0) \leq x < f_S(1) \\ 1 & f_S(1) \leq x \leq g_S(1), \\ g_S^{-1}(x) & g_S(1) < x \leq g_S(0) \\ 0 & g_S(0) < x \end{cases} \tag{10}$$

Wykres powyższej funkcji przynależności jest przedstawiony na rysunku 1b. Wykres funkcji przynależności OFN jest pokazany na rysunku 1c. Ostatni wykres ma dodatkową strzałkę oznaczającą orientację, co stanowi informację uzupełniającą.

Kiedy $f_S(0) > g_S(0)$, to wtedy warunek (9) opisuje ujemną orientację OFN. W tym przypadku funkcja wznosząca f_S jest malejąca lub stała i funkcja opadająca g_S jest rosnąca lub stała. Ujemnie zorientowana OFN $\overleftrightarrow{S}(f_S(0), f_S(1), g_S(1), g_S(0))$ jednoznacznie determinuje FN $S(g_S(0), g_S(1), f_S(1), f_S(0))$ opisaną przez swą funkcję przynależności $\mu_S: \mathbb{R} \to [0; 1]$ daną następująco:

$$\mu_S(x) = \begin{cases} 0 & x < g_S(0) \\ g_S^{-1}(x) & g_S(0) \leq x < g_S(1) \\ 1 & g_S(1) \leq x \leq f_s(1), \\ f_S^{-1}(x) & f_S(1) < x \leq f_S(0) \\ 0 & f_S(0) < x \end{cases} \qquad (11)$$

Na koniec zauważmy, że w przypadku $f_S(0) = g_S(0)$, orientacja OFN jest niezdefiniowana. Wtedy jednak rozpatrujemy liczbę $\overleftrightarrow{S}(f_S(0), f_S(0), f_S(0), f_S(0))$ jako ze swej natury niezorientowaną liczbę rzeczywistą $f_S(0) \in \mathbb{R}$.

Dowolna OFN $\overleftrightarrow{S}(f_S(0), f_S(1), g_S(1), g_S(0))$ jest dodatnia, jeśli spełnia warunek

$$\min\{f_S(0), g_S(0)\} > 0 \qquad (12)$$

Niech $\overleftrightarrow{A}, \overleftrightarrow{B} \in \mathfrak{K}$. Dowolną funkcję monotoniczną $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ można rozszerzyć do funkcji $\overleftrightarrow{h}: \mathfrak{K} \to \mathfrak{K}$ za pomocą tożsamości

$$\overleftrightarrow{B} = \overleftrightarrow{h}(\overleftrightarrow{A}), \qquad (13)$$

gdzie

$$\forall_{x \in [0;1]}: \quad f_B(x) = h(f_A(x)), \qquad (14)$$

$$\forall_{x \in [0;1]}: \quad g_B(x) = h(g_A(x)). \qquad (15)$$

Formalna prostota tego rozszerzenia stanowi istotną zaletę teorii liczb Kosińskiego. Łatwo można sprawdzić, że rezultaty otrzymane przy pomocy powyższych tożsamości są identyczne z rezultatami otrzymanymi przy pomocy operacji jednoargumentowych na liczbach rozmytych zdefiniowanych przez Dubois i Prade'a [1978].

2. Skierowana rozmyta wartość bieżąca

Przyszły przychód z tytułu posiadania instrumentu finansowego jest należnością. W pracy Piaseckiego [2016] przedstawiono aksjomatyczną definicję rozmytej PV. Zgodnie z tą definicją, dla ustalonej wartości nominalnej i ustalonego terminu wymagalności PV należności jest dodatnią FN. W tej sytuacji dla obserwowanej ceny rynkowej $\check{C}$, PV możemy przedstawić jako dodatnią g-LR-FN $Pv(\check{C}_{min}, \check{C}_*, \check{C}^*, \check{C}_{max})$, gdzie

– $0 < \check{C}_{\min}$ jest maksymalnym dolnym oszacowaniem możliwej ceny rynkowej,
– $\check{C}_*$ jest minimalnym górnym oszacowaniem cen zauważalnie mniejszych od obserwowanej ceny rynkowej $\check{C}$ i spełniającym warunek

$$\check{C}_{min} \leq \check{C}_* \leq \check{C}, \tag{16}$$

– $\check{C}^*$ jest maksymalnym dolnym oszacowaniem cen zauważalnie większych od obserwowanej ceny rynkowej $\check{C}$ i spełniającym warunek

$$\check{C} \leq \check{C}^* \leq \check{C}_{max} \tag{17}$$

– $\check{C}_{\max}$ jest minimalnym górnym oszacowaniem możliwej ceny rynkowej.

Dla danych lewej funkcji odniesienia $L_{Pv}: [\check{C}_{min}, \check{C}_*[\longrightarrow [0,1]$ i prawej funkcji odniesienia $R_{Pv}:]\check{C}^*, \check{C}_{max}] \longrightarrow [0,1]$ funkcja przynależności g-LR-FN $Pv(\check{C}_{min}, \check{C}_*, \check{C}^*, \check{C}_{max})$ jest jednoznacznie określona za pomocą tożsamości (3). Informację tę możemy wzbogacić o przewidywanie zwrotu trendu ceny rynkowej $\check{C}$. Zgodnie z sugestiami zawartymi w pracy Kacprzaka [2012], przewidywanie wzrostowego trendu ceny rynkowej zaznaczać będziemy za pomocą dodatniej orientacji. PV będzie wtedy przedstawiona jako OFN $\overleftrightarrow{Pv}(\check{C}_{min}, \check{C}_*, \check{C}^*, \check{C}_{max})$. Przewidywanie spadkowego trendu ceny rynkowej zaznaczać będziemy za pomocą ujemnej orientacji. PV będzie wtedy przedstawiona jako OFN $\overleftrightarrow{Pv}(\check{C}_{max}, \check{C}^*, \check{C}_*, \check{C}_{min.})$. Każda z tych reprezentacji PV jest nazywana dalej zorientowaną rozmytą PV (w skrócie OFPV[1]). Zapisując OFPV o dowolnej orientacji, oznaczać ją będziemy za pomocą symbolu $\overleftrightarrow{Pv}(f_{Pv}(0), f_{Pv}(1), g_{Pv}(1), g_{Pv}(0))$, gdzie uporządkowana para funkcji (f_{Pv}, g_{Pv}) jest parą Kosińskiego.

3. Zorientowana rozmyta stopa zwrotu

Przy ustalonym horyzoncie czasowym $t > 0$ inwestycji każdy instrument finansowy jest określony za pomocą dwóch wartości:

[1] Ang. *Ordered Fuzzy Present Value.*

– $V_t \in \mathbb{R}^+$ – przewidywana FV dla horyzontu czasowego $t > 0$,
– $V_0 \in \mathbb{R}^+$ PV oszacowana wybraną metodą.

Podstawową charakterystyką informującą o korzyściach z posiadania danego papieru wartościowego jest stopa zwrotu r_t zdefiniowana za pomocą tożsamości

$$r_t = r(V_0, V_t). \tag{18}$$

W ogólnym przypadku, jeśli $(V_0, V_t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ to funkcja $r: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ jest dowolną funkcją malejącą PV V_0 i funkcją rosnącą FV V_t.

W klasycznym podejściu do problemu wyznaczenia stopy zwrotu PV instrumentu finansowego jest ona identyfikowana z obserwowaną ceną rynkową $\check{C}$, co zapisujemy

$$V_0 = \check{C}. \tag{19}$$

Stopa zwrotu jest wtedy określona za pomocą zależności

$$r_t = r\left(\check{C}, V_t\right). \tag{20}$$

W szczególnych przypadkach mamy:
– prostą stopę zwrotu

$$R_t = \frac{V_t - \check{C}}{\check{C}}, \tag{21}$$

– logarytmiczną stopę zwrotu

$$\hat{R}_t = \ln\left(\frac{V_t}{\check{C}}\right). \tag{22}$$

Zgodnie z tezą o niepewności [Mises, 1962; Kaplan, Barish, 1967] każda przewidywana FV V_t jest niepewna. Niepewność ta jest skutkiem aktualnego braku naszej wiedzy o przyszłym stanie rzeczy. Dla ustalonego horyzontu czasowego $t > 0$ faktyczna wartość zmiennej V_t będzie już znana. Za Kołmogorowem [1933, 1956], Misesem [1957], Lambalgenem [1996], Sadowskim [1976, 1980], Czerwińskim [1960, 1969] i Caplanem [2001] wnioskujemy, że mamy tutaj do czynienia z niepewnością kwantyfikowalną opisaną za pomocą rozkładu prawdopodobieństwa. Modelem formalnym tej niepewności jest przedstawianie FV jako zmiennej losowej $\tilde{V}_t: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^+$, gdzie zbiór Ω jest zbiorem wszystkich elementarnych stanów ω rynku finansowego. Zgodnie z (20) stopa zwrotu także jest zmienną losową wyznaczoną za pomocą tożsamości

$$\tilde{r}_t(\omega) = r\left(\check{C}, \tilde{V}_t(\omega)\right). \tag{23}$$

Wobec opisanej powyżej monotoniczności funkcji stopy zwrotu istnieje tutaj funkcja odwrotna $r_V^{-1}(\check{C},\cdot):\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ i dzięki temu mamy

$$\tilde{V}_t(\omega)=r_V^{-1}\left(\check{C},\tilde{r}_t(\omega)\right). \tag{24}$$

W praktyce analizy rynków finansowych przyjęto zasadę opisywania niepewności kwantyfikowalnej za pomocą dystrybuanty $F_r:\mathbb{R}\longrightarrow[0;1]$ rozkładu prawdopodobieństwa stopy zwrotu $\tilde{r}_t:\Omega\to\mathbb{R}$, wyznaczonej za pomocą (23). Z drugiej strony, dystrybuanta F_r w jednoznaczny sposób określa rozkład prawdopodobieństwa $P:2^\Omega\supset\tilde{r}^{-1}(\mathcal{B})\longrightarrow[0;1]$, gdzie symbol $\mathcal{B}$ oznacza najmniejsze σ-ciało borelowskie zawierające wszystkie przedziały prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$. Rozkład ten będziemy nazywać normatywnym rozkładem stopy zwrotu. O rozkładzie tym zakładać będziemy, że zawsze istnieje wartość oczekiwana.

Wyznaczając stopę zwrotu, musimy uwzględniać nie tylko naturalną tutaj niepewność obarczającą FV, ale i nieprecyzyjność oszacowania PV. Łyczkowska-Hanćkowiak [2016] podała przykład nieprecyzyjnie oszacowanej PV reprezentowanej przez OFN. Z tego powodu w tym artykule do wyznaczenia stopy zwrotu stosować będziemy OFPV $\overleftrightarrow{Pv}$ reprezentowaną przez parę Kosińskiego (f_{Pv},g_{Pv}). W ten sposób oszacowaną stopę zwrotu nazywamy skierowaną rozmytą stopą zwrotu (w skrócie OFRR[2]).

Dla dowolnego elementarnego stanu rynku finansowego $\omega\in\Omega$, zgodnie z (13), (18) i (24), rozważanemu instrumentowi finansowemu przypisujemy OFRR $\overleftrightarrow{\mathcal{R}}(\omega)$ określoną za pomocą pary Kosińskiego $(f_{\mathcal{R}}(\cdot|\omega),g_{\mathcal{R}}(\cdot|\omega))$. Wymienione tutaj funkcje Kosińskiego są określone za pomocą tożsamości

$$f_{\mathcal{R}}(x|\omega)=r\left(f_{Pv}(x),\tilde{V}_t(\omega)\right)=r\left(f_{Pv}(x),r_V^{-1}\left(\check{C},\tilde{r}_t(\omega)\right)\right), \tag{25}$$

$$g_{\mathcal{R}}(x|\omega)=r\left(g_{Pv}(x),\tilde{V}_t(\omega)\right)=r\left(g_{Pv}(x),r_V^{-1}\left(\check{C},\tilde{r}_t(\omega)\right)\right). \tag{26}$$

Oczekiwana OFRR $\overleftrightarrow{R}$ jest wtedy opisana za pomocą pary Kosińskiego (f_R,g_R) wyznaczonej w następujący sposób

$$\begin{aligned}f_R(x)&=\int_\Omega f_{\mathcal{R}}(\cdot|\omega)\mathrm{d}P=\int_{-\infty}^{+\infty}r\left(f_{Pv}(x),r_V^{-1}(\check{C},y)\right)dF_r(y)=\\&=r\left(f_{Pv}(x),r_V^{-1}(\check{C},\bar{r})\right)\end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}g_R(x)&=\int_\Omega g_{\mathcal{R}}(\cdot|\omega)dP=\int_{-\infty}^{+\infty}r\left(g_{Pv}(x),r_V^{-1}(\check{C},y)\right)dF_r(y)=\\&=r\left(g_{Pv}(x),r_V^{-1}(\check{C},\bar{r})\right),\end{aligned} \tag{28}$$

[2] Ang. *Ordered Fuzzy Return Rate.*

gdzie symbol $\bar{r}$ oznacza wartość oczekiwaną stopy zwrotu (23). Zauważmy, że $r\colon \mathbb{R}^{+} \times \mathbb{R}^{+} \rightarrow \mathbb{R}$ jest malejącą funkcją pierwszego argumentu. Dzięki temu możemy stwierdzić, że dla dowolnego $x \in [0; 1]$ mamy

$$f_R(x) \geq g_R(x) \Leftrightarrow f_{Pv}(x) \leq g_{Pv}(x). \tag{29}$$

Oznacza to, że OFPV i oczekiwana OFRR wyznaczona za jej pomocą mają zawsze przeciwne orientacje. W tej sytuacji możemy twierdzić, że:
- spodziewany wzrost PV pozwala oczekiwać spadku wartości oczekiwanej stopy zwrotu,
- spodziewany spadek PV pozwala oczekiwać wzrostu wartości oczekiwanej stopy zwrotu.

W teorii i praktyce finansów oba powyższe fakty są dobrze znane. Spostrzeżenie to dowodzi, że rozszerzenie rozmytego modelu nieprecyzyjnie oszacowanych PV i stopy zwrotu do opisu za pomocą OFN jest właściwym kierunkiem rozwoju teorii finansów rozmytych.

W szczególnych przypadkach mamy:
- oczekiwaną prostą OFRR $\overleftrightarrow{R_t}$ reprezentowaną przez parę Kosińskiego (f_R, g_R) wyznaczoną w następujący sposób

$$f_R(x) = \frac{\check{C}\cdot(1+\bar{r})}{f_{Pv}(x)} - 1, \tag{30}$$

$$g_R(x) = \frac{\check{C}\cdot(1+\bar{r})}{g_{Pv}(x)} - 1; \tag{31}$$

- oczekiwaną logarytmiczną OFRR $\overleftrightarrow{\hat{R}_t}$ reprezentowaną przez parę Kosińskiego $(f_{\hat{R}}, g_{\hat{R}})$ wyznaczoną w następujący sposób

$$f_{\hat{R}}(x) = \ln\left(\frac{\check{C}\cdot e^{\bar{r}}}{f_{Pv}(x)}\right), \tag{32}$$

$$g_{\hat{R}}(x) = \ln\left(\frac{\check{C}\cdot e^{\bar{r}}}{g_{Pv}(x)}\right). \tag{33}$$

Formalna prostota powyższych zależności jest kolejną korzyścią, jaką uzyskujemy dzięki zastosowaniu OFN do nieprecyzyjnego oszacowania stóp zwrotu. Prostota tych zależności dobrze rokuje też dalszym możliwościom rozwoju teorii portfelowej.

Podsumowanie

Uzyskane w pracy wyniki w pełni przekonują, że zastosowanie OFN ułatwi analizę instrumentów finansowych o nieprecyzyjnie oszacowanych walorach. Celowym jest dalszy rozwój teorii rozmytych finansów. W przypadku analizy pojedynczego instrumentu finansowego można tutaj adoptować metody wskazane w pracach Piaseckiego [2011a, 2016]. Dla składania portfela złożonego z nieprecyzyjnie oszacowanych instrumentów finansowych można też wykorzystać wskazane w pracach Siwek [2015] oraz Piaseckiego i Siwek [2017] modele składania portfela.

Taka szeroka gama możliwości zachęca do dalszych badań nad zastosowaniem skierowanych liczb rozmytych w teorii i praktyce finansów skwantyfikowanych.

Z drugiej strony należy też zauważyć, że wszystkie wyniki uzyskane dla zorientowanej rozmytej PV można bezpośrednio zastosować dla przypadku PV opisanej za pomocą liczby rozmytej g-LR-FN. Rodzi to nadzieję na równoczesne uogólnienie i formalne uproszczenie teorii zainicjowanej w pracach Siwek [2015] oraz Piaseckiego i Siwek [2017].

Literatura

Buckley I.J. (1987), *The fuzzy mathematics of finance*, „Fuzzy Sets and Systems”, No. 21.

Caplan B. (2001), *Probability, common sense, and realism: a reply to Hulsmann and Block*, „The Quarterly Journal of Austrian Economics”, Vol. 4, No. 2.

Chiu C.Y., Park C.S. (1994), *Fuzzy cash flow analysis using present worth criterion*, „The Engineering Economist”, Vol. 39, No. 2.

Czerwiński Z. (1960), *Enumerative induction and the theory of games*, „Studia Logica”, Vol. 10.

Czerwiński Z. (1969), *Matematyka na usługach ekonomii*, PWN, Warszawa.

Dubois D., Prade H. (1978), *Operations on fuzzy numbers*, „International Journal of Systems Science”, Vol. 9, No. 6.

Dubois D., Prade H. (1979), *Fuzzy real algebra: some results*, „Fuzzy Sets and Systems”, No. 2.

Dubois D., Prade H. (1980), *Fuzzy sets and systems: theory and applications*, Academic Press, New York.

Greenhut J.G., Norman G., Temponi C.T. (1995), *Towards a fuzzy theory of oligopolistic competition*, IEEE Proceedings of ISUMA-NAFIPS.

Gutierrez I. (1989), *Fuzzy numbers and Net Present Value*, „Scandinavian Journal of Management”, Vol. 5, Issue 2.

Hirota K. (1981), *Concepts of probabilistic sets*, „Fuzzy Sets and Systems”, No. 5.

Huang X. (2007), *Two new models for portfolio selection with stochastic returns taking fuzzy information*, „European Journal of Operational Research”, Vol. 180, Issue 1.

Kacprzak D. (2012), *Zastosowanie skierowanych liczb rozmytych do prezentacji cen akcji*, „Optimum. Studia Ekonomiczne", nr 60.

Kaplan S., Barish N.N. (1967), *Decision-making allowing uncertainty of future investment opportunities*, „Management Science", Vol. 13, No. 10.

Knight F.H. (1921), *Risk, uncertainty, and profit*, Hart, Schaffner & Marx, Houghton Mifflin Company, Boston, MA.

Kolmogorov A.N. (1933), *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Julius Springer, Berlin.

Kolmogorov A.N. (1956), *Foundations of the theory of probability*, Chelsea Publishing Company, New York.

Kosiński W., Prokopowicz P., Ślęzak D. (2002a), *Drawback of fuzzy arithmetics – new intuitions and propositions* [w:] T. Burczyński, W. Cholewa, W. Moczulski (red.), *Proc. Methods of Ariticial Intelligence*, PACM, Gliwice.

Kosiński W., Prokopowicz P., Ślęzak D. (2002b), *Fuzzy numbers with algebraic operations: algorithmic approach* [w:] M. Klopotek, S.T. Wierzchoń, M. Michalewicz (red.), *Proc. IIS'2002, Sopot, June 3–6, Poland*, Heidelberg: Physica Verlag.

Kosiński W., Prokopowicz P., Ślęzak D. (2003), *Ordered fuzzy numbers*, „Bulletin of the Polish Academy of Sciences", Vol. 51, No. 3.

Kosiński W. (2006), *On fuzzy number calculus*, „International Journal of Applied Mathematics and Computer Science", Vol. 16, No. 1.

Kuchta D. (2000), *Fuzzy capital budgeting*, „Fuzzy Sets and Systems", Vol. 111.

Kwakernaak K. (1978), *Fuzzy random variables: definition and theorems*, „Information Sciences", Vol. 15.

Lambalgen M. von (1996), *Randomness and foundations of probability: von Mises' axiomatization of random sequences*, Institute of Mathematical Statistics Lecture Notes – Monograph Series, Vol. 30.

Lesage C. (2001), *Discounted cash-flows analysis. An interactive fuzzy arithmetic approach*, „European Journal of Economic and Social Systems", Vol. 15, Issue 2.

Łyczkowska-Hanćkowiak A. (2017), *Behawioralna wartość bieżąca w ujęciu skierowanych liczb rozmytych*, „Optimum. Studia Ekonomiczne", nr 3 (87).

Mises R. von (1957), *Probability, statistics and truth*, The Macmillan Company, New York.

Mises L. von (1962), *The ultimate foundation of economic science: an essay on method*, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton.

Piasecki K. (2011a), *Rozmyte zbiory probabilistyczne jako narzędzie finansów behawioralnych*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego, Poznań, DOI: 10.13140/2.1.2506.6567.

Piasecki K. (2011b), *Behavioural present value*, „SSRN Electronic Journal", nr 01/2011, DOI:10.2139/ssrn.1729351.

Piasecki K. (2014), *Behawioralna wartość bieżąca – nowe podejście*, „Optimum. Studia Ekonomiczne", nr 67.

Piasecki K. (2016), *Intuicyjne zbiory rozmyte jako narzędzie finansów behawioralnych*, edu-libri, Kraków-Legionowo.

Piasecki K., Siwek J. (2015), *Behavioural present value defined as fuzzy number – a new approach*, „Folia Oeconomica Stetinensia" tom 15, nr 2, DOI:10.1515/foli-2015-0033.

Piasecki K., Siwek J. (2017), *Portfel dwuskładnikowy z trójkątnymi rozmytymi wartościami bieżącymi – podejście alternatywne*, „Przegląd Statystyczny", tom 64, z. 1.

Prokopowicz P. (2015), *The directed inference for the Kosinski's fuzzy number model*, Proceedings of the Second International Afro-European Conference for Industrial Advancement AECIA 427.

Prokopowicz P., Pedrycz W. (2015), *The directed compatibility between ordered fuzzy numbers – a base tool for a direction sensitive fuzzy information processing* [w:] L. Rutkowski, M. Korytkowski, R. Scherer, R. Tadeusiewicz, L. Zadeh, J. Zurada (red.), *Artificial Intelligence and Soft Computing. ICAISC 2015. Lecture Notes in Computer Science*, Vol. 9119, Springer, Cham.

Siwek J. (2015), *Portfel dwuskładnikowy – studium przypadku dla wartości bieżącej danej jako trójkątna liczba rozmyta*, „Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach", nr 241.

Sadowski W. (1977), *Decyzje i prognozy*, PWN, Warszawa.

Sadowski W. (1980), *Forecasting and decision making*, *Quantitative Wirtschafts- und Unternehmensforschung*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.

Sheen J.N. (2005), *Fuzzy financial profitability analyses of demand side management alternatives from participant perspective*, „Information Sciences", Vol. 169.

Tsao C.-T. (2005), *Assessing the probabilistic fuzzy Net Present Value for a capital. Investment choice using fuzzy arithmetic*, „Journal of the Chinese Institute of Industrial Engineers", Vol. 22, No. 2.

Ward T.L. (1985), *Discounted fuzzy cash flow analysis*, 1985 Fall Industrial Engineering Conference Proceedings.

Zadeh L.A. (1965), *Fuzzy sets*, „Information and Control", Vol. 8, Issue 3.

Zadeh L.A. (1975a), *The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning. Part I*, „Information Sciences", Vol. 8, Issue 3.

Zadeh L.A. (1975b), *The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning. Part II*, „Information Sciences", Vol. 8, Issue 4.

Zadeh L.A. (1975c), *The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning. Part III*, „Information Sciences", Vol. 9, Issue 1.

EXPECTED RETURN RATE DETERMINED AS ORIENTED FUZZY NUMBER

Summary: The starting point for our discussion is the present value (PV) is defined as a positive L-R fuzzy number. In this paper the information described by the so-determined PV is supplemented with a subjective forecast of the sense of the trend of the market price. This forecast is implemented in the proposed model of PV, as the orientation of fuzzy numbers. In this way, PV is presented as ordered fuzzy number. So specified PV is used to determine the return rate. With the obvious assumption that the future value is a random variable, determined return rate is described as ordered random variable. At the end the expected return rate is determined.

Keywords: present value, return rate, imprecision, ordered fuzzy number**.**