Rozdział 2
Zróżnicowanie koniunktury. Metody wnioskowania statystycznego

W niniejszym rozdziale przedstawimy typowe metody wnioskowania statystycznego, które można zastosować do analizy wyników ankietowych badań koniunktury. Uwzględnimy potrzebę badań zróżnicowania struktury odpowiedzi między poszczególnymi pytaniami, wewnątrz pewnych grup pytań, między poszczególnymi grupami przedsiębiorstw (przekrojami) oraz wewnątrz wybranych przekrojów. Wskażemy możliwości analizy zróżnicowania w czasie, czyli po prostu badania dynamiki, także dla sald odpowiedzi (różnic między frakcją "wzrost" a frakcją "spadek"). Pod koniec zajmiemy się bayesowską analizą wyników badań koniunktury stosowaną na razie w elementarny sposób do podstawowych zagadnień estymacji i testowania. Do wnioskowania wykorzystamy dane pochodzące z badań koniunktury w budownictwie, prowadzonych przez Instytut Rozwoju Gospodarczego SGH od roku 1994.

2.1. Badanie zróżnicowania struktury odpowiedzi na pytania ankietowe[1]

2.1.1. Podstawy probabilistyczne analizy wyników badań koniunktury

Wyniki badań ankietowych będących podstawą analizy koniuktury gospodarczej można interpretować następująco: każda odpowiedź na dane pytanie to wynik doświadczenia losowego o trzech możliwych wynikach: "wzrost", "brak zmian" i "spadek". Doświadczenie jest powtarzane tyle razy, ile wynosi liczba odpowiedzi. Schematowi temu odpowiada znany w rachunku prawdopodobieństwa rozkład wielomianowy. Określa się go następująco: dokonuje się n doświadczeń (obserwacji) o możliwych wynikach 1,2,...,s. Poszczególne wyniki zachodzą z prawdopodobieństwami $p_1, p_2, \ldots, p_s$

[1] Niniejszy paragraf stanowi rozwinięcie trzeciego rozdziału opracowania Podgórskiej, Męczarskiego i Kowalczyk (1994). Stamtąd też zaczerpnięto przytaczane dane i wyniki dotyczące 1994 roku.

(odpowiednio). Niech $X=(X_1,X_2,...,X_s)$ będzie s-wymiarową zmienną losową, której współrzędna X_i oznacza liczbę wyników i wśród n doświadczeń. Wtedy funkcja prawdopodobieństwa takiego wektora losowego ma postać

$$P(X_1=x_1,...,X_s=x_s)=\frac{n!}{x_1!...x_s!}p_1^{x_1}..p_s^{x_s}, \tag{2.1}$$

gdzie $x_1+x_2+...+x_s=n$. Mamy do czynienia z uogólnieniem bardzo powszechnie znanego rozkładu dwumianowego, odpowiadającego przypadkowi $s=2$. Wartości oczekiwane współrzędnych zmiennej losowej o rozkładzie wielomianowym mają postać

$$EX_i=np_i$$

wariancje wyrażają się wzorem

$$D^2X_i=np_i(1-p_i) \tag{2.3}$$

a kowariancje dwóch różnych współrzędnych mają postać

$$Cov(X_i,X_j)=-np_ip_j,\ \ i\neq j. \tag{2.4}$$

2.1.2. Podstawowe zasady estymacji

Przypuśćmy, że obserwuje się wartości wektora losowego o rozkładzie wielomianowym. Jak wiadomo (Lehmann, 1991) statystyka s-wymiarowa $(X_1,X_2,...,X_s)$ jest statystyką dostateczną. Oznacza to, że zawiera ona całą informację konieczną do konstruowania jakichkolwiek procedur wnioskowania statystycznego o prawdopodobieństwach $(p_1,p_2,...,p_s)$. Ponieważ $(X_1,X_2,...,X_s)$ jest również tak zwaną statystyką zupełną (Lehmann, 1991), to

$$\hat{p}_i=\frac{X_i}{n} \tag{2.5}$$

jest estymatorem nieobciążonym parametru p_i o jednostajnie (na całej przestrzeni wartości parametrów) minimalnej wariancji. Dla oszacowania wariancji i kowariancji potrzebujemy oszacowania wyrażenia p_ip_j. Okazuje się, że

$$p_{ij}=\frac{X_iX_j}{n(n-1)}$$

jest estymatorem nieobciążonym o minimalnej wariancji dla p_ip_j (Lehmann, 1991). Są to estymatory zgodne, to znaczy ich wartości dążą do prawdziwych wartości parametrów, gdy $n \to \infty$. Konstrukcja estymatora metodą największej wiarogodności daje ten sam wynik.

Rozpatrzmy teraz zastosowanie przedstawionej teorii do wyników badań koniunktury w budownictwie. W I kwartale 1994 roku na pytanie 1 (o zmiany wielkości produkcji) udzielono n=822 odpowiedzi. Każda odpowiedź jest realizacją doświadczenia wielomianowego, gdzie liczba klas (możliwych wyników) wynosi s=3, czyli doświadczenia trójmianowego. Udzielono X_1=115 odpowiedzi "wzrost", X_2=202 odpowiedzi "bez zmian" i X_3=505 odpowiedzi "spadek". Wobec tego oszacowania prawdopodobieństw wyników doświadczeń trójmianowych wynoszą $\hat{p}_1$=0,14, $\hat{p}_2$=0,246, $\hat{p}_3$=0,614, zgodnie z podanymi zasadami estymacji nieobciążonej lub z metodą największej wiarogodności.

Dokładny rozkład estymatora uzyskanego metodą momentów lub metodą największej wiarogodności, będącego równocześnie estymatorem nieobciążonym o jednostajnie minimalnej wariancji, czyli $\hat{p}_i = \frac{X_i}{n}$, jest rozkładem składowej wektora losowego wielomianowego pomnożonego przez $\frac{1}{n}$. Użyteczniejszy jest rozkład asymptotyczny uzyskany na podstawie centralnego twierdzenia granicznego. Wówczas dla dużego n można przyjąć rozkład $\hat{p}_i$ jako normalny o wartości oczekiwanej p_i i wariancji $\frac{p_i(1-p_i)}{n}$. Może on być wykorzystany do konstruowania pewnych testów, a również przedziałów ufności. Warunkiem posługiwania się rozkładem normalnym jest dostateczna liczność próby: przyjmuje się, że powinna zachodzić nierówność $n \geq 30$.

2.1.3. Testowanie hipotez statystycznych dotyczących zróżnicowania wyników

Przedstawimy teraz metody weryfikacji hipotez statystycznych dotyczących zróżnicowania wyników badań koniunktury. Weryfikowana hipoteza zerowa wyraża stwierdzenie o braku zróżnicowania. Jej odrzucenie oznacza, że z danych wynikają istotne różnice porównywanych rezultatów badań. W przeciwnym przypadku stwierdzamy, że dane nie dają podstaw do odrzucenia hipotezy o istnieniu istotnych różnic badanych wyników. Konkretne typy różnic omawiamy poniżej.

Test istotności (test hipotezy prostej). Sprawdzamy, czy frakcje p_i, i =1,2,...,s, odpowiedzi typu i na wybrane pytanie w wybranej grupie przedsiębiorstw są istotnie różne od ustalonych liczb p_i^0, to znaczy czy struktura odpowiedzi na badane pytanie w badanym przekroju (grupie badanych przedsiębiorstw) jest istotnie różna od tej opisanej przez wektor o współrzędnych p_i^0, i =1,2,...,s. Liczby te mogą być wartościami z porównywanego okresu z przeszłości lub mogą odnosić się do innego pytania czy też innego przekroju . Weryfikujemy więc następującą hipotezę zerową prostą dla wektora o współrzędnych p_i:

$$H_0: p_i = p_i^0, \quad i=1,\dots,s. \tag{2.7}$$

Statystykę testu zaproponował K. Pearson w 1900 r. (zob. Rao, 1982):

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{s} \frac{\left(X_i - np_i^0\right)^2}{np_i^0}. \tag{2.8}$$

Ma ona asymptotyczny rozkład χ^2 o $s-1$ stopniach swobody. Przybliżenie to można wykorzystywać w praktyce, gdy $np_i^0 \geq 5$, $i=1,\dots,s$. Duże wartości statystyki testu przemawiają przeciw hipotezie zerowej, zatem obszar krytyczny testu na poziomie istotności α ma postać

$$K = \left\{\chi^2 = x:\ x \in (\chi^2_{s-1}(\alpha),\ +\infty)\right\}, \tag{2.9}$$

gdzie $\chi^2_{s-1}(\alpha)$ jest kwantylem rzędu $1-\alpha$ rozkładu χ^2 o $s-1$ stopniach swobody (wartością krytyczną na poziomie α). W niniejszych badaniach przydatne są następujące wartości krytyczne $\chi^2_k(\alpha)$ na poziomie α rozkładu χ^2 o k stopniach swobody:

Tablica 2.1. Wartości krytyczne rozkładu chi-kwadrat

$\chi^2_k(\alpha)$	α=0,05	α=0,01	α=0,005	α=0,001
k=2	5,991	9,210	10,597	13,816
k=6	12,592	16,812	18,548	22,458
k=8	15,507	20,090	21,955	26,125

Źródło: R. Zieliński, W. Zieliński (1990).

Wróćmy do wyników badań koniunktury w budownictwie. Na pytanie o wielkość produkcji możliwe są trzy warianty odpowiedzi: I - "zwiększyła się", II - "bez zmian", III - "zmniejszyła się". Odpowiedzi dotyczą sytuacji bieżącej i prognozy na przyszłość.

Test chi-kwadrat można zastosować do oceny istotności różnic między sytuacją bieżącą i prognozą. Uzyskano n=822 odpowiedzi, z tego dla wariantu I $X_1=115$, $\hat{p}_1=0{,}14$, dla wariantu II $X_2=202$, $\hat{p}_2=0{,}246$, a dla wariantu III $X_3=505$, $\hat{p}_3=0{,}614$. Prognoza dała następujące wyniki: $\hat{p}_1^0=0{,}523, \hat{p}_2^0=0{,}322, \hat{p}_3^0=0{,}155$. Statystyka χ^2 ma wartość 1362,6, zatem hipotezę H_0 odrzucamy na każdym praktycznym poziomie istotności: prognoza na następny kwartał jest istotnie różna od stanu w badanym kwartale.

Moc testu χ^2 ma postać

$$P\left(\chi^2_{s-1,nc}(C)>\chi^2_{s-1}(\alpha)\right), \tag{2.10}$$

gdzie $\chi^2_{s-1,nc}(C)$ jest zmienną losową o niecentralnym rozkładzie χ^2 o $s-1$ stopniach swobody, z parametrem niecentralności C o formie

$$C=n\sum_{i=1}^{s}\frac{(p_i-p_i^0)^2}{p_i^0}, \tag{2.11}$$

przy czym p_i są prawdziwymi wartościami parametrów (zob. Bickel i Doksum, 1977, 1983). Tablice funkcji mocy testu χ^2 i dystrybuant niecentralnych rozkładów χ^2 podaje wydawnictwo *Selected Tables in Mathematical Statistics*, vol.1 (1973) oraz R. i W. Zielińscy (1990). Dla konkretnych danych obliczenie mocy daje następujący przykładowy rezultat. Niech

$$H_0\colon\ p_1=p_1^0=0{,}133,\ p_2=p_2^0=0{,}22,\ p_3=p_3^0=0{,}647,\ n=300$$

Wtedy $np_1^0=40$, $np_2^0=66$, $np_3^0=194$. Przypuśćmy, że prawdziwe wartości wynoszą $p_1=p_2=0{,}2, p_3=0{,}6$. Zatem hipoteza H_0 jest niezbyt bliska rzeczywistości. Wówczas parametr niecentralności jest równy $C=11{,}56$, wobec czego moc testu na poziomie istotności $\alpha=0{,}01$ ma postać $P\left(\chi^2_{2,nc}(11{,}56)>\chi^2_2(0{,}01)\right)\approx 0{,}7$, a dla poziomu istotności 0,05 wynosi ona $P\left(\chi^2_{2,nc}(11{,}56)>\chi_2(0{,}05)^2\right)\approx 0{,}85$. Zatem moc testu jest dość wysoka.

Należy jeszcze wspomnieć, że test skonstruowany na podstawie ilorazu wiarogodności prowadzi do statystyki testu o tym samym rozkładzie asymptotycznym χ^2 o $s-1$ stopniach swobody.

Testy zgodności w próbach równoległych. Przypuśćmy, że mamy m prób, być może z różnych populacji, o licznościach $n_1,\ldots,n_m$. W każdej populacji występuje s klas. Chodzi o sprawdzenie, czy prawdopodobieństwa klas w populacjach są te same, a zatem czy można uznać, że wszystkie próby pochodzą z tej samej populacji. Jeżeli oznaczymy przez

p_{ij} prawdopodobieństwo klasy j dla elementów próby i, to weryfikowana hipoteza zerowa ma postać

$$H_0: p_{1j}=\ldots=p_{mj} \text{ dla } j=1,2,\ldots,s. \tag{2.12}$$

Przyjmijmy oznaczenia: $n_{i.}=n_i$, $i=1,2,\ldots,m$; niech n_{ij} oznacza liczbę elementów klasy j w próbie i, $n_{.j}=\sum_{i=1}^{m} n_{ij}$ - liczbę wszystkich elementów klasy j w m próbach łącznie,

$$n_{..}=\sum_{i=1}^{m} n_{i.}=\sum_{j=1}^{s} n_{.j}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{s} n_{ij}$$

- liczbę wszystkich elementów w połączonych próbach. Wówczas statystyka

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{s}\frac{\left(n_{ij}-n_{i.}\frac{n_{.j}}{n_{..}}\right)^2}{n_{i.}\frac{n_{.j}}{n_{..}}} \tag{2.13}$$

ma rozkład χ^2 o $(m-1)(s-1)$ stopniach swobody. Duże wartości statystyki przemawiają przeciw hipotezie o identyczności struktury we wszystkich próbach. Warto w trakcie obliczeń wyodrębnić te próby, dla których odpowiednie składniki w statystyce χ^2 są szczególnie duże (większe od wartości krytycznej rozkładu χ^2 o $s-1$ stopniach swobody) (Rao, 1982). Wskaże to, które konkretnie próby odbiegają strukturą od tej wspólnej dla wszystkich. Rozpatrzmy mianowicie, co następuje. W ankiecie *Badania koniunktury w budownictwie* wyróżniono pięć szczególnie ważnych pytań: (1) o zmiany wielkości produkcji, (2) o zmiany poziomu zatrudnienia, (3) o zmiany sytuacji finansowej, (4) o zmiany wielkości inwestycji, (5) o zmiany ogólnej sytuacji budownictwa na tle całej gospodarki. Chodzi o sprawdzenie w drodze weryfikacji odpowiedniej hipotezy statystycznej, czy struktura odpowiedzi pod względem proporcji "wzrost", "bez zmian", "spadek" może być w całej piątce uważana za identyczną. Zatem mamy 5 prób (odpowiedzi) z 5 populacji (pytania), o których trzeba powiedzieć, czy różnią się istotnie pod względem struktury przynależności wyników do klas. Sprawdzamy więc hipotezę, czy prawdopodobieństwa odpowiedzi "wzrost", "bez zmian", "spadek" są identyczne dla wszystkich 5 pytań. Mamy tu m=5, s=3. W poniższej tabeli podajemy liczby odpowiedzi na poszczególne pytania oraz liczby odpowiedzi poszczególnych typów (te same dane, co poprzednio).

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
	$n_{1.}=822$	$n_{2.}=827$	$n_{3.}=826$	$n_{4.}=597$	$n_{5.}=603$
wzrost	$n_{11}=115$	$n_{21}=72$	$n_{31}=94$	$n_{41}=69$	$n_{51}=33$
b.z.	$n_{12}=202$	$n_{22}=402$	$n_{32}=258$	$n_{42}=264$	$n_{52}=297$
spadek	$n_{13}=505$	$n_{23}=353$	$n_{33}=474$	$n_{43}=264$	$n_{53}=273$

Liczby odpowiedzi poszczególnych typów na wszystkie 5 pytań łącznie są następujące:

"wzrost" $n_{.1}=n_{11}+n_{21}+n_{31}+n_{41}+n_{51}=383$,
"bez zmian" $n_{.2}=n_{12}+n_{22}+n_{32}+n_{42}+n_{52}=1423$,
"spadek" $n_{.3}=n_{13}+n_{23}+n_{33}+n_{43}+n_{53}=1869$.
Liczba wszystkich odpowiedzi wynosi $n_{..}=3675$. Wtedy

$$\chi^2=70{,}29+34{,}0+19{,}75+10{,}6+35{,}17=169{,}81.$$

Porównując wynik z podanymi wartościami krytycznymi rozkładu χ^2_8 wnioskujemy, że nie można uznać struktury odpowiedzi za wspólną dla wszystkich pytań. Wszystkie składniki, z wyjątkiem w pewnym stopniu czwartego, mają wartości znacznie przekraczające zwykle stosowane wartości krytyczne dla rozkładu χ^2_2, zatem struktura odpowiedzi na każde pytanie różni się znacznie od wspólnej, "uśrednionej". Oznacza to między innymi, że odpowiedzi na każde z tych pięciu pytań dotyczą istotnie różnych aspektów sytuacji gospodarczej i żadne z tych pytań nie mogłoby być pominięte bez szkody dla kompletności opisu.

Testy hipotez jednostronnych oparte na asymptotycznym rozkładzie normalnym. W celu testowania hipotezy prostej H_0: $p_i=p_i^0$ przeciw hipotezie alternatywnej postaci

$$H_1^{\prime}: p_i>p_i^0 \quad \text{lub} \quad H_1^{\prime\prime}: p_i<p_i^0 \tag{2.14}$$

posłużymy się asymptotycznym rozkładem normalnym. Ponieważ statystyka

$$S_i=\frac{X_i-np_i^0}{\sqrt{np_i^0(1-p_i^0)}} \tag{2.15}$$

ma asymptotyczny rozkład normalny $N(0,1)$, to duże wartości powyższej statystyki przemawiają przeciw H_0 na korzyść $H_1^{\prime}$. Zatem obszar krytyczny będzie miał postać

$$K^{\prime}=\{S_i=z\colon z\in(\kappa_{1-\alpha},+\infty)\}, \tag{2.16}$$

gdzie $\kappa_{1-\alpha}$ jest kwantylem rzędu 1-α standardowego rozkładu normalnego. Małe wartości powyższej statystyki przemawiają przeciw H_0 na korzyść $H_1^{\prime\prime}$. Zatem dla drugiej postaci testu obszar krytyczny ma postać

$$K^{\prime\prime}=\{S_i=z: z\in(-\infty,\kappa_\alpha)\}, \tag{2.17}$$

gdzie κ_α jest kwantylem rzędu α standardowego rozkładu normalnego, czyli $\kappa_\alpha=-\kappa_{1-\alpha}$ (z symetrii). Dla hipotez zerowych jednostronnych $H_0^{\prime}: p_i \le p_i^0$ oraz $H_0^{\prime\prime}: p_i \ge p_i^0$ obszary krytyczne K' i K'' pozostają bez zmiany.

Statystykę S_i i jej rozkład asymptotyczny można wykorzystać także do testowania hipotezy zerowej prostej przeciw hipotezie $H_1: p_i \ne p_i^0$, czyli do testu istotności różnicy między p_i i p_i^0. Wówczas duże wartości bezwzględne statystyki S_i przemawiają przeciw hipotezie H_0. Obszar krytyczny ma postać

$$K=\{S_i=z: z\in(-\infty,\kappa_{\alpha/2})\cup(\kappa_{1-\alpha/2},+\infty)\},$$

przy czym $\kappa_{\alpha/2}=-\kappa_{1-\alpha/2}$, czyli

$$K=\{S_i=z: |z|>\kappa_{1-\alpha/2}\}.$$

Konstrukcja testu dwustronnego jest związana z konstrukcją przedziału ufności dla p_i na poziomie 1-α .Przedział przybiera następującą formę, wykorzystującą dla dużych n przybliżony rozkład normalny i zgodność estymatora wariancji $p_i(1-p_i)/n$:

$$\left[\hat{p}_i-\kappa_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_i(1-\hat{p}_i)}{n}},\ \hat{p}_i+\kappa_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_i(1-\hat{p}_i)}{n}}\right],$$

gdzie $\hat{p}_i=\frac{X_i}{n}$ jest estymatorem otrzymanym metodą największej wiarogodności.

Przydatne są następujące kwantyle standardowego rozkładu normalnego:

Tablica 2.2 Kwantyle rozkładu normalnego

kwantyl	α=0,05	α=0,01	α=0,005	α=0,001
$\kappa_{1-\alpha}$	1,645	2,326	2,576	3,090
$\kappa_{1-\alpha/2}$	1,960	2,576	2,807	3,291

Źródło: R. Zieliński, W. Zieliński (1990).

Na przykład w omawianej w poprzednich przykładach ankiecie, w części dotyczącej wyników I kwartału, oszacowano prawdopodobieństwo odpowiedzi "wzrost" na pytanie o zmianę wielkości produkcji jako p_1=0,14. W drugim kwartale uzyskano X_1=381 odpowiedzi "wzrost". Wszystkich odpowiedzi w II kwartale było n=599. Weryfikując hipotezę, że wielkość p_1 dla II kwartału jest równa p_1^0=0,14 (z I kwartału) przeciw hipotezie złożonej jednostronnej $p_1 > p_1^0$, obliczamy wartość statystyki S_1: S_1=27,58. Porównujemy wynik z postacią obszaru krytycznego K' dla wybranego poziomu istotności α i stąd wyciągamy wniosek, że różnica między frakcją odpowiedzi "wzrost" w II i w I kwartale jest statystycznie istotna (jest, jak widać, zasadnicza). Przedział ufności dla p_1 na poziomie 0,95 ma realizację w postaci [0,597; 0,675], podczas gdy estymator metodą największej wiarogodności p_1 ma wartość 0,636.

Reasumując, omówimy charakter obserwowanych zmian wskaźników koniunktury, badanych za pomocą metod, które zostały wyżej opisane.

Analiza zgodności struktury odpowiedzi dotyczących stanu bieżącego w I kwartale 1994 i odpowiedzi dotyczących prognozy na II kwartał dla pytań 1, 3, 7 i 11 wykazuje, że prognozy istotnie różniły się od ocen stanu w I kwartale. Wyjątki zdarzają się zwłaszcza w przekrojach regionalnych, mających nieraz za małą liczebność, aby poprawnie stosować test χ^2. Istotność jest na ogół bardzo wyraźna (wartości statystyki testu są duże), czasem jednak wartości statystyki nie przekraczają wartości krytycznych dla najniższych poziomów istotności. Wtedy bezpieczniej jest uznać różnice za istotne. Jeden zdecydowany wyjątek to pytanie 3 (o poziom zatrudnienia) i przekrój 17 (gałąź KGN 37 - projektowanie), z wartością statystyki testu równą 3,107, która oznacza nieistotność różnicy na typowym poziomie 0,05 (i każdym mniejszym). Różnice te nie są zaskakujące, ponieważ I kwartał (zimowy) jest okresem małej aktywności budownictwa, a II kwartał - okresem wiosennego ożywienia. Pora roku nie przeszkadza natomiast działalności projektowej.

Rozpatrzmy jeszcze zgodność struktury opinii dotyczących wielkości produkcji (1), poziomu zatrudnienia (3), sytuacji finansowej (7), nakładów inwestycyjnych (11) i sytuacji gospodarczej (13). Wyniki obliczeń dla I i II kwartału 1994 roku wskazują, że struktury odpowiedzi na te pytania nie można uznać za zgodną. Obliczone wartości statystyki χ^2 znacznie przewyższają praktycznie stosowane wartości krytyczne dla rozkładu χ^2_8. Inaczej jest w przekrojach mało liczebnych, w których test może nie być w stanie odróżnić struktury z powodu niedostatku danych. Wyjątek stanowi przekrój nr 21 (region północny), gdzie wartość statystyki jest na tyle umiarkowana, że różnice mogłyby być uznane za nieistotne przy niskim poziomie istotności 0,001, oraz przekrój 26 (region południowo-wschodni), gdzie w I kwartale strukturę opinii należałoby uznać za zgodną. Dla badań zgodności struktury odpowiedzi na cztery spośród podanej piątki pytań można zaobserwować wyraźniej, że wyższe wartości krytyczne, dające w wyniku stwierdzenie istotności różnic, pojawiają się w przekrojach o wielkiej liczebności, których elementy (to znaczy przedsiębiorstwa) są mocniej zróżnicowane. Bardziej specyficzne i jednorodne, mniej liczne przekroje częściej dają wyniki interpretowane jako nieistotność lub przynajmniej nie tak ogromne zróżnicowanie. Przyczyny mogą być też po części czysto statystyczne: próba o niewielkiej liczebności niesie mniej informacji służących do wykrycia różnic.

Analiza zgodności struktury odpowiedzi dotyczących stanu bieżącego w III kwartale 1997 i odpowiedzi dotyczących prognozy na IV kwartał dla pytań 1, 3, 7 i 11 wykazuje, że prognozy różniły się od ocen stanu w III kwartale w stopniu nie zawsze wysokim, a czasem nieistotnie. Wysoka była istotność różnic stanu i prognozy zmian wielkości produkcji (pytanie 1), z wyjątkiem niektórych przekrojów regionalnych. Tutaj znowu musimy zwrócić uwagę na sezonowe obniżenie aktywności pod koniec IV kwartału. Dla pytania 3 (o poziom zatrudnienia) nieistotność była dość częsta, nawet dla licznego przekroju 3 - sektor publiczny (zatem przedsiebiorstwa z tego sektora mniej chętnie redukują liczbę pracowników), przechodząc nawet w niemal całkowity brak zróżnicowania. Dla pytań 7 i 11 wyniki można nazwać pośrednimi.

2.2. Dynamika sald

2.2.1. Wstęp i przykład

Wiadomo (zob. Podgórska, Adamowicz, Męczarski, 1996), że salda możemy poddać analizie za pomocą metod statystyczno-probabilistycznych, jeżeli rozpatrzymy następującą sumę zmiennych losowych:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad (2.20)$$

gdzie X_i oznacza pojedynczą odpowiedź, której wariantom są przypisane wartościi liczbowe: 1 (spadek), 0 (bez zmian), +1 (wzrost). Wtedy podana suma jest różnicą liczby odpowiedzi "wzrost" i "spadek". Aby otrzymać saldo (liczba % lub liczba z przedziału [0,1]), dzielimy sumę $\sum_{i=1}^{n} X_i$ przez n (liczba odpowiedzi na rozpatrywane pytanie w rozpatrywanym przekroju) i otrzymujemy średnią $\overline{X}$ z prostej próby losowej $X_1,...X_n$. Elementy próby mają rozkład trójpunktowy, gdzie

$$P(X=1)=p_1,\ P(X=0)=p_2,\ P(X=1)=p_3, \tag{2.21}$$

a X oznacza oznacza zmienną losową o takim rozkładzie. Niech s będzie "prawdziwym" saldem. Mamy $s=EX=p_1-p_3$, a średnia $\overline{X}$ jest estymatorem tej wartości oczekiwanej. Wariancja ma postać

$$D^2X=EX^2-(EX)^2=p_1+p_3-(p_1-p_3)^2, \tag{2.22}$$

Zgodnie z centralnym twierdzeniem granicznym, statystyka ma asymptotyczny rozkład normalny o wartości oczekiwanej $E\overline{X}=p_1-p_3$ i wariancji $D^2\overline{X}=\frac{1}{n}D^2X$. Stąd wynika możliwość posługiwania się odpowiednim rozkładem normalnym w celu analizowania sald za pomocą testów statystycznych. Dla liczebności próby mniejszej niż około 30 wyniki asymptotyczne nie mają wartości.

Badanie dynamiki uwzględnia kierunek zmiany. Załóżmy, że porównujemy bieżące saldo s z daną wartością s_0 (prognoza lub przeszłość). Wtedy hipotezę zerową

$$H_0: s=s_0 \tag{2.23}$$

weryfikujemy przy hipotezie alternatywnej jednostronnej

$$H_1^{>}: s>s_0 \text{ lub } H_1^{<}: s<s_0 \tag{2.24}$$

W tym celu obliczamy wartość statystyki o przybliżonym rozkładzie normalnym N(0,1)

$$N = \frac{\overline{X}-s_0}{\sqrt{\hat{D}^2X}}\sqrt{n}, \tag{2.25}$$

gdzie w mianowniku jest estymator wariancji zmiennej X, i porównujemy z odpowiednią wartością krytyczną, tak jak dla testu opartego na rozkładzie normalnym w paragrafie 2.1 (tam też podano wartości krytyczne dla testu). Należy zauważyć, że różnice nieistotne między sąsiednimi okresami mogą w dłuższym czasie zsumować się do większej wartości. Ma więc sens porównywanie z dawniejszymi kwartałami i ewentualne identyfikowanie najbliższego kwartału istotnie różnego od kwartału aktualnie rozważanego.

Problem niedostatecznej liczby danych jest w przypadku sald łagodniejszy, niż w przypadku badań dla pojedynczych odpowiedzi. Jeżeli n jest nieznacznie większe od 30, można jeszcze do salda zastosować rozkład przybliżony, podczas gdy liczebności dla poszczególnych odpowiedzi będą na ogół wykluczać taką możliwość.

Dla przykładu, zestawiono faktyczną sytuację w II kwartale 1994 roku z prognozą z poprzedniego kwartału dla pytania 1 i 3. Otrzymano wyniki podane w zamieszczonych nieco dalej tabelach. Na podstawie wartości statystyki N o asymptotycznym rozkładzie normalnym podano konkluzję o rezultacie porównania realizacji z prognozą. Konkluzje mają postać: „brak istotnej różnicy" (można podać kierunek tej różnicy), „realizacja gorsza od prognozy", „realizacja lepsza od prognozy" (oznacza odrzucenie hipotezy o nieistotności na rzecz hipotezy alternatywnej jednostronnej), „realizacja nieznacznie lepsza", „realizacja nieznacznie gorsza" (oznacza trafienie wartości statystyki N do przedziału o krańcach $\kappa_{0,05}$ i $\kappa_{0,01}$). Konkluzje dla pytania 1 (o wielkość produkcji) są wobec tego jak w tablicy 2.3.

Tablica 2.3. Porównanie stanu z II kwartału 1994 z prognozą na ten kwartał dla pytania 1

Nr przekroju	Wynik porównania realizacji z prognozą
1	Brak istotnej różnicy (realizacja nieistotnie lepsza)
2	Realizacja gorsza od prognozy
3	Realizacja nieznacznie gorsza od prognozy
4	Brak istotnej różnicy (realizacja nieistotnie gorsza)
5	Brak istotnej różnicy (realizacja nieistotnie lepsza)
6	Brak istotnej różnicy (realizacja nieistotnie gorsza)
7	Realizacja gorsza od prognozy
8	Realizacja gorsza od prognozy
9 !	Realizacja nieznacznie lepsza od prognozy
21	Brak istotnej różnicy (realizacja nieistotnie gorsza)
22	Brak istotnej różnicy (realizacja nieistotnie lepsza)
23	Brak istotnej różnicy (realizacja nieistotnie lepsza)
24	Realizacja gorsza od prognozy
25	Brak istotnej różnicy (realizacja nieistotnie lepsza)
26	Brak istotnej różnicy (realizacja nieistotnie lepsza)
27 !!	Brak istotnej różnicy (realizacja nieistotnie lepsza)
28	Brak istotnej różnicy (realizacja nieistotnie gorsza)
29	Brak istotnej różnicy (realizacja nieistotnie gorsza)
33	Realizacja gorsza od prognozy
34	Realizacja nieznacznie lepsza od prognozy

Nr przekroju	Wynik porównania realizacji z prognozą
35	Brak istotnej różnicy (realizacja nieistotnie gorsza)
36	Realizacja lepsza od prognozy (i to znacznie!)

Źródło: obliczenia własne na podstawie danych IRG SGH.

W przekrojach oznaczonych „!" liczba danych jest na granicy stosowalności metody opartej na przybliżonym rozkładzie normalnym (zwykle przyjmuje się powyżej 30). W przekrojach oznaczonych „!!" liczba danych jest poniżej tej granicy. Wyniki mają wtedy charakter orientacyjny. Można się spodziewać, że konkluzje o istotności są bliskie prawdy, ale rozkład statystyki N może być daleki od normalnego i te oczekiwania mogą równie dobrze zawieść. Natomiast konkluzje o nieistotności w takiej sytuacji bardzo łatwo bywają niezgodne ze stanem faktycznym.

Dla pytania 3 (o wielkość zatrudnienia) konkluzje podano w tablicy 2.4.

Tablica 2.4. Porównanie stanu z II kwartału 1994 z prognozą na ten kwartał dla pytania 3

Nr przekr.	Wynik porównania realizacji z prognozą
1	Brak istotnej różnicy (realizacja nieistotnie gorsza)
2	Realizacja gorsza od prognozy
3	Brak istotnej różnicy (realizacja nieistotnie gorsza)
4	Brak istotnej różnicy (realizacja nieistotnie gorsza)
5	Realizacja nieznacznie gorsza od prognozy
6	Realizacja nieznacznie gorsza od prognozy
7	Realizacja nieznacznie gorsza od prognozy
8	Brak istotnej różnicy (realizacja nieistotnie gorsza)
9 !	Brak istotnej różnicy (realizacja nieistotnie lepsza)
21	Brak istotnej różnicy (realizacja nieistotnie gorsza)
22 !	Brak istotnej różnicy (realizacja nieistotnie lepsza)
23	Brak istotnej różnicy (realizacja nieistotnie gorsza)
24	Realizacja nieznacznie gorsza od prognozy
25	Brak istotnej różnicy (realizacja nieistotnie gorsza)
26	Brak istotnej różnicy (realizacja nieistotnie lepsza)
27 !!	Brak istotnej różnicy (realizacja nieistotnie gorsza)
28	Realizacja nieznacznie gorsza od prognozy
29	Brak istotnej różnicy (realizacja nieistotnie lepsza)
33	Realizacja gorsza od prognozy

Nr przekr.	Wynik porównania realizacji z prognozą
34	Brak istotnej różnicy (realizacja nieistotnie lepsza)
35	Brak istotnej różnicy (realizacja nieistotnie lepsza, bliska nieznacznie lepszej)
36	Brak istotnej różnicy (realizacja nieistotnie gorsza)

Źródło: obliczenia własne na podstawie danych IRG SGH.

W odpowiedziach na pytanie 3 widać przewagę przypadków lepszej prognozy, niż realizacji. W odpowiedziach na pytanie 1 występowała w zasadzie równowaga. Obliczenia oparto na danych przytoczonych w opracowaniu Podgórskiej, Adamowicz i Męczarskiego (1996).

2.2.2. Ocena dynamiki zmian sald

Przechodzimy teraz do systematycznej oceny dynamiki zmian sald odpowiedzi od II kwartału 1994 do I kwartału 1996. Przy pomocy podanej metody porównamy saldo każdego z kolejnych kwartałów z saldem poprzedniego, rejestrując kierunek różnicy i oceniając jej istotność. Uprzedzając podanie wyników możemy zauważyć, że niektóre różnice będą oczywiste z racji sezonowego charakteru działalności gospodarczej w budownictwie. Wobec tego od I kwartału 1995 porównanie obejmuje też analogiczny kwartał sprzed roku (tzn. I kw. 1995 a I kw. 1994, II kw. 1995 a II kw. 1994 itd.), co pokaże głębsze tendencje zmian cząstkowego wskaźnika koniunktury, jakim jest saldo odpowiedzi na dane pytanie w danej grupie przedsiębiorstw.

Obliczenia zostały przeprowadzone dla następujących pytań (dotyczących stanu bieżącego): 1) wielkość produkcji, 7) sytuacja finansowa przedsiębiorstwa,
i dla następujących przekrojów (grup przedsiębiorstw): 2 - sektor prywatny, 3 - sektor publiczny. Tablice oceny dynamiki zmian mieszczą wyniki następujących porównań: a) kolejnych kwartałów z poprzednimi; b) kolejnych kwartałów od I kwartału 1995 w porównaniu z analogicznym sprzed roku.

W tablicach używamy następujących oznaczeń symbolicznych:
(i) dla zmian podlegających testowi przeciw hipotezie alternatywnej o wzroście, to jest $H_1^{>}: s > s_0$ oznaczamy przez:
++ : znaczny wzrost (wartość statystyki N powyżej 11,0);

+ : wzrost (wartość statystyki N przekracza wartość krytyczną dla 0,01, $\kappa_{0,01}$=1,645);

+0 : wzrost „nieznaczny" (odpowiadający wartości statystyki N między $\kappa_{0,01}$=1,645 a $\kappa_{0,05}$=2,326);

0+ : wzrost nieistotny (wartość statystyki N dodatnia, poniżej 1,645);

(ii) dla zmian podlegających testowi przeciw hipotezie alternatywnej o spadku, tj. $H_1^{<}: s < s_0$ oznaczamy przez

0- : spadek nieistotny (wartość statystyki N ujemna, powyżej $\kappa_{0,05}$= -1,645);

-0 : spadek „nieznaczny" (odpowiadający wartości statystyki N między $\kappa_{0,01}$= 2,326 a $\kappa_{0,05}$= -1,645);

- : spadek (wartość statystyki N jest niższa od wartości krytycznej dla 0,01, czyli -2,326);

-- : znaczny spadek (wartość statystyki N poniżej -11,0).

Tabele są zestawione na podstawie załączonych wyników obliczeń i uzupełnione omówieniami.

Pytanie 1. Wielkość produkcji

Tablica 2.5. Odpowiedzi na pytanie 1 - zmiany między kolejnymi kwartałami

	1994			1995				1996
kwartał	II	III	IV	I	II	III	IV	I
2 pryw.	++	0-	0-	--	+	++	-	--
3 publ.	++	0-	0-	--	+	+	-	-

Źródło: obliczenia własne na podstawie danych IRG SGH.

Widoczna jest sezonowość . II kwartał 1994 i 1995 przynosi naturalny wzrost (w tym znaczny) w porównaniu z I kw., który utrzymuje się (1994) lub wzmaga (1995) w III kw. Zmiany w II i IV kw. 1994 były na ogół nieistotne w różnych kierunkach (częściej spadek), przy czym dla przedsiębiorstw starych w III kw. był to nieznaczny spadek, a dla publicznych nowych w IV kw. - istotny spadek. I kw. 1995 przynosi naturalny spadek w porównaniu z poprzednim. Bywa on mniej głęboki w sektorze publicznym. W II i III kw. 1995 r. występował na ogół istotny (w tym nawet znaczny) wzrost, wyraźniejszy w przedsiębiorstwach prywatnych, zwłaszcza w II kw. Natomiast IV kw. 1995 i I kw.1996 przyniósł powszechny spadek, przy czym ten z I kw. 1996 głębszy dla przedsiębiorstw prywatnych.

Tablica 2.6. Pytanie 1 - zmiany w porównaniu z analogicznym kwartałem sprzed roku

	1995				1996
kwartał	I	II	III	IV	I
2 pryw.	+	-	+	0-	-
3 publ.	0-	-	0+	-	0+

Źródło: obliczenia własne na podstawie danych IRG SGH.

W I kw. 1995 zimowy spadek był mniejszy niż przed rokiem w przedsiębiorstwach prywatnych lub nowo powstałych. Wzrost w II kw. był słabszy niż rok wcześniej, co poprawiło się w III kw., ale nie w sektorze publicznym. Spadek w IV kw. byl niższy niż w 1994 r. W I kw. 1996 sytuacja w sektorze prywatnym pogorszyła się (zwłaszcza w przedsiębiorstwach nowych), w publicznym była zbliżona (nieistotnie lepsza). W przekrojach według roku założenia - nieco lub nieistotnie gorsza.

Pytanie 7. Sytuacja finansowa przedsiębiorstwa

Tablica 2.7. Pytanie 7 - zmiany między kolejnymi kwartałami

	1994			1995				1996
kwartał	II	III	IV	I	II	III	IV	I
2 pryw.	+	0+	+	-	+	+	0+	--
3 publ.	+	0+	+	-	+0	+	0+	-

Źródło: obliczenia własne na podstawie danych IRG SGH.

W II kwartale 1994 można zauważyć sezonową poprawę wybitniejszą w sektorze prywatnym, III kw. - wzrost (w porównaniu z sezonowym ożywieniem z II kw.) na ogół nieistotny, a nieznaczny wśród przedsiębiorstw nowych, zwłaszcza prywatnych (ale to oznacza utrzymanie ożywienia z II kw.). IV kw. przyniósł wzrost, jednak na granicy nieistotności dla przedsiębiorstw prywatnych starych, a dla nowych publicznych spadek. W I kw. 1995 - spadek, w II kw. - wzrost w sektorze prywatnym oraz w przedsiębiorstwach publicznych starszych; nieznaczny w sektorze publicznym, w tym w przedsiębiorstwach nowych nieistotny; nieznaczny także w przedsiębiorstwach nowych ogółem. III kw. 1995 przyniósł powszechny wzrost, a IV kw. - nieistotne zmiany (na ogół wzrost, poza przekrojem przedsiębiorstw starszych, w tym prywatnych, a także nowych publicznych). I kw. 1996 to powszechne pogorszenie, zwłaszcza dla przedsiębiorstw prywatnych i starszych.

Tablica 2.8. Pytanie 7 - zmiany w porównaniu z analogicznym kwartałem sprzed roku

	1995				1996
kwartał	I	II	III	IV	I
2 pryw.	+	-	+0	0-	0-
3 publ.	+0	0-	+	0+	0-

Źródło: obliczenia własne na podstawie danych IRG SGH.

W I kwartale 1995 w porównaniu z 1994 widać wzrost, wyraźniejszy w sektorze prywatnym. II kw. - spadek w stosunku do 1994, wyraźniejszy w sektorze również prywatnym. III kw. to poprawa w porównaniu z 1994 rokiem, ale w sektorze prywatnym nieistotna lub nieznaczna (wśród starszych). IV kw. to zmiany nieistotne w porównaniu z 1994 r., (pogorszenie - prywatne, poprawa - publiczne). I kw. 1996 przyniósł zmiany na ogół nieistotne wobec I kw. 1995 (publiczne - spadek, w tym stare - wzrost), ale dla nowych - nieznaczny spadek, w tym publicznych - spadek.

Podsumowując, zauważmy, że zmiany wykazują sezonowość. Gwałtowniejsze wahania zdają się występować wśród przedsiębiorstw prywatnych. W szczególności spadek z I kwartału 1996 roku jest głębszy niż rok wcześniej zwłaszcza wśród przedsiębiorstw prywatnych.

2.3. Wstęp do zastosowań statystycznej analizy bayesowskiej w badaniach koniunktury

2.3.1. Zasady ogólne i estymacja

Metoda bayesowska polega na potraktowaniu parametru (być może wektorowego) jako zmiennej losowej (jedno- lub wielowymiarowej). Rozkład prawdopodobieństwa tej zmiennej, rozkład *a priori*, jest postulowany przez statystyka. Dysponując rozkładem próby oraz rozkładem *a priori*, na podstawie zasady Bayesa wyznacza się rozkład *a posteriori* o parametrach zależnych od próby, służący do konstruowania estymatorów. Estymatorem może być na przykład wartość oczekiwana w rozkładzie *a posteriori*. Jeszcze jednym elementem estymacji bayesowskiej (pochodzącym z teorii decyzji) jest funkcja straty, mierząca odchylenie wartości estymatora od prawdziwej wartości parametru. Wartość oczekiwana tej funkcji względem rozkładu *a posteriori* nazywa się ryzykiem *a posteriori* (zależy od próby), a wartość oczekiwana ryzyka *a posteriori* względem rozkładu próby - ryzykiem bayesowskim (zależy tylko od rozkładu *a priori* i od metody konstrukcji estymatora). Poszukuje się estymatorów bayesowskich, to znaczy minimalizujących ryzyko bayesowskie. Jeżeli funkcja straty jest kwadratem różnicy estymatora i parametru (kwadratowa funkcja straty), to estymatorem bayesowskim jest wartość oczekiwana rozkładu *a posteriori*. Ta funkcja straty jest prosta w użyciu i łatwa do interpretacji, więc bywa bardzo często stosowana.

Parametr rozkładu wielomianowego jest wektorem o współrzędnych dodatnich (nieujemnych), których suma wynosi 1. W związku z tym rozkłady *a priori*, wykorzystywane w problemach estymacji tego parametru, należą do mniej typowych, poza rozkładem jednostajnym. Ich najważniejszym w praktyce zbiorem jest rodzina rozkładów Dirichleta.

Rozkład Dirichleta $D(a_1,...,a_s)$ to rozkład wektora losowego $P=(P_1,...,P_s)$, o gęstości

$$f_a(p)=\frac{\Gamma(a_1+a_2+...+a_s)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)...\Gamma(a_s)}p_1^{a_1-1}p_2^{a_2-1}..p_s^{a_s-1}, \text{ gdy } \sum_{i=1}^{s}p_i=1,\ p_i\geq 0,\ i=1,2,...,s \quad (2.26)$$

Wówczas

$$EP_i=\frac{a_i}{\sum_{i=1}^{s}a_i} \quad (2.27)$$

Zatem jest to rozkład prawdopodobieństwa na ograniczonym zbiorze takich wektorów losowych, które z prawdopodobieństwem 1 mają nieujemne składowe o sumie 1. W przypadku s=2 rozkład Dirichleta jest znany jako rozkład beta.

Rodzina rozkładów Dirichleta jest rodziną sprzężoną dla rodziny rozkładów wielomianowych, czyli rozkład *a posteriori* jest pewnym rozkładem Dirichleta. Przy kwadratowej funkcji straty, stosując rozkład *a priori* Dirichleta, otrzymujemy estymator bayesowski dla p_i w postaci

$$p_i^B=\frac{a_i+X_i}{\sum_{j=1}^{s}a_j+n} \quad (2.28)$$

(Lehmann, 1991). Zauważmy, że estymatory bayesowskie dają niezerowe wartości w sytuacji, gdy $X_i=0$. Może się zdarzyć, że w pobranej próbie nie ma żadnych obiektów pewnej klasy i (zwłaszcza jeżeli próba ma małą liczebność), ale ich istnienia w populacji raczej nie można wykluczyć. Bayesowski estymator $\hat{p}_i^B$ ma niezerowe wartości, uwzględnia więc przytoczoną wątpliwość.

Jeżeli przyjmiemy $a_1=a_2=...=a_s=a$ (tzw. *symetryczny* rozkład Dirichleta), to otrzymujemy wówczas tak zwany najmniej korzystny rozkład *a priori*, to znaczy taki, przy którym ryzyko bayesowskie jest największe. W sytuacji, gdy parametry rozkładu *a priori* są podane arbitralnie, jest to rozsądne postępowanie. Wtedy

$$\hat{p}_i^B=\frac{a+X_i}{sa+n}. \qquad (2.29)$$

Jeżeli $a=\sqrt{n}/s$, to otrzymujemy estymator

$$\hat{p}_i^B=\hat{p}_i^M=\frac{\sqrt{n}/s+X_i}{\sqrt{n}+n}. \qquad (2.30)$$

Okazuje się, że estymator $\hat{p}_i^M$ jest minimaksowy, to znaczy minimalizuje maksimum możliwego ryzyka "częstościowego" (niebayesowskiego, czyli wartości oczekiwanej funkcji straty względem rozkładu próby), na przestrzeni parametrów rozkładu wielomianowego (który jest rozkładem próby). W ten sposób, w ramach teorii bayesowskiej, uzyskujemy estymator o wartościowych własnościach z punktu widzenia ogólnej teorii estymacji.

Z kolei $p_i=\dfrac{X_i+1}{n+s}$ jest estymatorem bayesowskim parametru p_i, gdy funkcja straty jest kwadratowa, a rozkład *a priori* - jednostajny na wielościanie s-wymiarowym

$$\{(p_1,...,p_s)\in R^s:\sum_{i=1}^{s}p_i=1,\ p_i\geq 0,\ i=1,...,s\} \qquad (2.31)$$

czyli w przypadku braku wiedzy *a priori* o mniej i bardziej prawdopodobnych wartościach parametrów (rozkład jednostajny daje równe szanse wszystkim wartościom). Ów rozkład jest rozkładem Dirichleta $D(1,1,1)$.

Zauważmy, że zasada konstrukcji estymatora wynikająca z twierdzenia Bayesa działa następująco: wartość estymatora bayesowskiego leży w przedziale, którego krańce tworzą: ocena *a priori*, czyli wartość oczekiwana *a priori*

$$EP_i=\frac{a_i}{a_1+a_2+\ldots+a_s}$$

oraz wartość estymatora otrzymanego metodą największej wiarogodności (EMNW). Jeżeli liczność próby n wzrasta do nieskończoności, to wpływ informacji *a priori* znika i wartość estymatora bayesowskiego dąży do wartości EMNW. Jeżeli $a_1+a_2+\ldots+a_s$ dąży do nieskończoności w taki sposób, że wartość oczekiwana *a priori* $EP_i=\frac{a_i}{a_1+a_2+\ldots+a_s}$ dąży do pewnej stałej Z, to wartość estymatora bayesowskiego dąży do Z, a wpływ danych empirycznych znika.

Nawiązując do analizy danych z paragrafu 2.1 otrzymujemy następujące wartości estymatora minimaksowego:

$$\hat{p}_1^M=\frac{\sqrt{822/3}+115}{\sqrt{822}+822}\approx 0{,}146,\quad \hat{p}_2^M=\frac{\sqrt{822/3}+202}{\sqrt{822}+822}\approx 0{,}249,\quad \hat{p}_3^M=\frac{\sqrt{822/3}+505}{\sqrt{822}+822}\approx 0{,}605,$$

natomiast wartości estymatora bayesowskiego przy założeniu rozkładu *a priori* jednostajnego na sympleksie $\{(p_1,p_2,p_3)\colon\ p_1+p_2+p_3=1,\ p_1,p_2,p_3\geq 0\}$, są następujące:

$$\tilde{p}_1=\frac{116}{825}\approx 0{,}141,\quad \tilde{p}_2=\frac{203}{825}\approx 0{,}246,\quad \tilde{p}_3=\frac{506}{825}\approx 0{,}613.$$

Estymator minimaksowy jest bayesowski względem rozkładu Dirichleta $D(\alpha,\alpha,\alpha)$, gdzie $\alpha=\frac{\sqrt{822}}{3}\approx 9{,}56$. Jeżeli przyjmiemy zakres niepewności parametru α jako przedział $[1; 9{,}56]$, to zakres zmienności wartości estymatorów bayesowskich dla poszczególnych współrzędnych parametru p przybierze postać

$$\hat{p}_1^B\in[0{,}141; 0{,}146],\quad \hat{p}_2^B\in[0{,}246; 0{,}249],\quad \hat{p}_3^B\in[0{,}605; 0{,}613].$$

Można zaobserwować, że zmiany wartości estymatorów nie są znaczne. Dzieje się tak wskutek dużej liczności próby. Rozważmy więc teraz przypadek próby niezbyt licznej.

W ankiecie *Badania koniunktury w budownictwie* na pytanie 1 w pewnej grupie przedsiębiorstw udzielono n=25 odpowiedzi, w tym $X_1=17$ odpowiedzi typu I, $X_2=3$ odpowiedzi II i $X_3=5$ odpowiedzi III. Wobec tego oszacowania MNW prawdopodobieństw wyników każdego typu odpowiedzi wynoszą $\hat{p}_1=0,68$, $\hat{p}_2=0,12$, $\hat{p}_3=0,2$. Wartości estymatora minimaksowego są następujące:

$$\hat{p}_1^M=\frac{\sqrt{25}/3+17}{\sqrt{25}+5}\approx 0,622,\ \hat{p}_2^M=\frac{\sqrt{25}/3+3}{\sqrt{25}+5}\approx 0,156,\ \hat{p}_3^M=\frac{\sqrt{25}/3+5}{\sqrt{25}+5}\approx 0,222,$$

natomiast wartości estymatora bayesowskiego przy założeniu rozkładu *a priori* jednostajnego:

$$\tilde{p}_1=\frac{18}{28}\approx 0,643,\ \tilde{p}_2=\frac{4}{28}\approx 0,143,\ \tilde{p}_3=\frac{6}{28}\approx 0,214.$$

Estymator minimaksowy jest bayesowski względem rozkładu Dirichleta $D(\alpha,\alpha,\alpha)$, gdzie $\alpha=\frac{\sqrt{25}}{3}\approx 1,67$. Jeżeli przyjmiemy zakres niepewności parametru α jako przedział [1; 1,67], to zakres zmienności wartości estymatorów bayesowskich przybierze postać

$$\hat{p}_1^B\in[0,622;0,643],\ \hat{p}_2^B\in[0,143;0,156],\ \hat{p}_3^B\in[0,214;0,222].$$

Ponieważ próba jest dość nieliczna, wpływ wahań symetrycznego rozkładu *a priori* między rozkładem jednostajnym a tym, który odpowiada estymatorowi minimaksowemu, jest wyraźnie większy, niż w przypadku poprzednio rozpatrywanych liczniejszych danych. Widać to po większym zakresie zmienności estymatorów. Dane pochodzą z opracowania Podgórskiej, Męczarskiego i Kowalczyk (1994).

Jeżeli możemy się spodziewać sporego wpływu rozkładu *a priori*, to większego znaczenia nabiera jego wybór, a również stosowanie estymatorów możliwie mało wrażliwych na umiarkowane wahania tego rozkładu. Nie ma też powodu, by ograniczać się do symetrycznych rozkładów Dirichleta. Istnieje możliwość empirycznego wyboru parametrów rozkładu *a priori*. Zagadnienia te przekraczają zakres niniejszego zwięzłego paragrafu. Poruszone są m. in. w pracy Męczarskiego (1998) dla rozkładu wielomianowego i w monografii Męczarskiego (1998) w ujęciu ogólnym.

2.3.2. Bayesowska weryfikacja hipotez

W badaniach koniunktury ważną rolę odgrywa analiza zróżnicowania wyników, w tym istotności różnic, dokonywana za pomocą testowania odpowienich hipotez statystycznych. Zatem także bayesowskie metody weryfikacji hipotez można uważać za narzędzie warte zbadania w omawianym aspekcie. Bayesowski schemat weryfikacji hipotez statystycznych w najprostszej wersji polega na obliczeniu prawdopodobieństw *a posteriori* $P_\pi(\theta\in\Theta_0|x)$ i $P_\pi(\theta\in\Theta_1|x)$, gdzie hipotezy mają postać:

$$H_0: \theta\in\Theta_0, \quad H_1: \theta\in\Theta_1. \tag{2.32}$$

Po obliczeniu podejmuje się decyzję, ktorą hipotezę odrzucić. Nie jest to niemal automatyczna reguła decyzyjna, jak w przypadku klasycznej teorii weryfikacji hipotez, wywodzącej się od Neymana i Pearsona, ale wymaga rozważenia, czy otrzymane prawdopodobieństwo jest wystarczające do podjęcia decyzji o odrzuceniu hipotezy. Jest to metoda nie w pełni zadowalająca, wobec czego oblicza się też tzw. czynnik bayesowski (*Bayes factor*) na rzecz hipotezy H_0, czyli następujący iloraz

$$\frac{\int_{\Theta_0} f(x\,|\,\theta)\pi(\theta)d\theta / \int_{\Theta_1} f(x\,|\,\theta)\pi(\theta)d\theta}{\int_{\Theta_0}\pi(\theta)d\theta / \int_{\Theta_1}\pi(\theta)d\theta}, \tag{2.33}$$

przy czym licznik nazywamy ilorazem szans *a posteriori*, a mianownik ilorazem szans *a priori*. Wartość czynnika bayesowskiego przemawia na rzecz nieodrzucenia lub odrzucenia hipotezy zerowej. Zauważono, iż wskazania wartości czynnika bayesowskiego lub ilorazu szans niekoniecznie zgadzają się ze zdecydowanym odrzucaniem hipotez na zwykłym poziomie istotności 0,05. Na przykład w pewnym problemie wartość ilorazu szans *a posteriori* wynosi około 0,4, podczas gdy statystyka testu ma wartość w obszarze krytycznym i hipoteza zerowa zostaje bezwzględnie odrzucona (zob. Berger, 1990). Zatem bayesowska weryfikacja hipotez daje w wyniku określone wyżej prawdopodobieństwa i ilorazy szans, a ich interpretacja nie odbywa się w sposób automatyczny.

Bayesowską technikę testowania zaprezentujemy w najprostszej wersji obliczeń, to znaczy w wersji polegającej jedynie na wyznaczeniu prawdopodobieństwa *a posteriori* hipotezy zerowej. Zajmiemy się analizą odpowiedzi "wzrost". Liczba tych odpowiedzi ma rozkład dwumianowy. Dla rozkładu dwumianowego obserwacji i rozkładu beta *a priori* prawdopodobieństwo *a posteriori* hipotezy H_0:p=p_0 jest następujące

$$\pi(p_0|x)=\left(1+\frac{1-\pi_0}{\pi_0}\cdot\frac{\beta(\alpha_1+x,\alpha_2+n-x)}{\beta(\alpha_1,\alpha_2)p_0^x(1-p_0)^{n-x}}\right)^{-1}, \qquad (2.34)$$

gdzie $\beta(z_1,z_2)$ oznacza wartość funkcji beta, n - liczbę prób oraz x - liczbę sukcesów rozważanego rozkładu dwumianowego, α_1 i α_2 - parametry rozkładu *a priori*, π_0 - prawdopodobieństwo *a priori* hipotezy H_0. Rozważymy następujące prawdopodobieństwa *a priori* hipotezy H_0, analogiczne do jednostajnego rozkładu *a priori* dla parametru: $\pi_0'=1/3$ (odpowiada to przypisaniu równych prawdopodobieństw *a priori* hipotezom $p=p_0$, $p>p_0$ i $p<p_0$) oraz $\pi_0''=0.5$ (oceniamy równo szanse hipotez $p=p_0$ i $p\neq p_0$). Wtedy $(1-\pi_0')/\pi_0'=2$ oraz $(1-\pi_0'')/\pi_0''=1$. Jako rozkład *a priori* parametru p przyjmiemy rozkład $Beta(1,1)$ (jednostajny na przedziale [0,1]) oraz rozkład $Beta(\sqrt{n}/2,\sqrt{n}/2)$ (odpowiadający estymatorowi minimaksowemu).

Rozważmy istotność różnic między stanem w II kwartale a prognozą na III kwartał 1994 roku, dla odpowiedzi "wzrost" na pytanie 1 (o wielkość produkcji). Jako p_0 przyjmujemy frakcję odpowiedzi "wzrost" z II kwartału, a jako p - frakcję takich prognoz na III kwartał. Niech x oznacza liczbę odpowiedzi "wzrost" w prognozie na III kwartał. Bierzemy pod uwagę tylko niektóre przekroje, zwłaszcza najmniej liczne, ponieważ dla nich nie jest mozliwe poprawne stosowanie testu χ^2.

W przekroju 8 (sektor publiczny - zakłady powstałe do 1989) mamy n=143, x=55, p_0=0,57. W tablicy 2.9[3] podamy prawdopodobieństwa *a posteriori* hipotezy H_0 dla dwóch wymienionych wartości jej prawdopodobieństwa *a priori* π_0' i π_0'' oraz parametru rozkładu *a priori* $Beta(\alpha_1,\alpha_1)$ w przypadku $\alpha_1'=1$ i $\alpha_1''=\sqrt{n}/2$.

Tablica 2.9. Prawdopodobieństwa *a posteriori* nieistotności różnicy między stanem w II kw. a prognozą na III kw. 1994 - przekrój 8

	$\alpha_1'=1$	$\alpha_1''=\sqrt{n}/2$
$\pi_0'=1/3$	0,0003	0,00015
$\pi_0''=1/2$	0,0006	0,0003

Z obliczeń wynika, że prawdopodobieństwo *a posteriori* hipotezy o nieistotności różnicy między stanem w II kwartale a prognozą na III kwartał jest bardzo małe, co oznacza

[3] Źródło tablic od 2.9 do 2.26: obliczenia własne na podstawie danych IRG SGH.

oczekiwanie zmiany tendencji w porównaniu z II kw. Zgadza się to z wynikiem testu χ^2, który wykazuje istotność badanej różnicy. Ze sprawdzenia danych źródłowych wynika, że był to istotny spadek odsetka prognozujących wzrost. Znacznie częściej nie oczekiwano zmian wielkości produkcji.

W przekroju 9 (sektor publiczny - zakłady powstałe po 1989) mamy n=30, x=20, p_0=0,633; statystyka χ^2 ma wartość 1,103.

Tablica 2.10. Prawdopodobieństwa *a posteriori* nieistotności różnicy między stanem w II kw. a prognozą na III kw. 1994 - przekrój 9

	$\alpha_1'=1$	$\alpha_1''=\sqrt{n}/2$
$\pi_0'=1/3$	0,687	0,606
$\pi_0''=1/2$	0,815	0,755

Prawdopodobieństwa *a posteriori* wskazują na nieistotność różnicy między stanem w II kwartale a prognozą na następny kwartał, tak jak statystyka χ^2 (przekrój mało liczny). Zatem nowo powstałe zakłady oczekują utrzymania tendencji z II kw. - dalszego wzrostu.

W przekroju 11 (sektor prywatny - spółki krajowe) mamy n=89, x=50, p_0=0,64; statystyka χ^2 ma wartość 6,742.

Tablica 2.11. Prawdopodobieństwa *a posteriori* nieistotności różnicy między stanem w II kw. a prognozą na III kw. 1994 - przekrój 11

	$\alpha_1'=1$	$\alpha_1''=\sqrt{n}/2$
$\pi_0'=1/3$	0,549	0,359
$\pi_0''=1/2$	0,709	0,528

Prawdopodobieństwa *a posteriori* nie dają zdecydowanej odpowiedzi. Zależy ona od rozkładu *a priori* dla hipotezy zerowej i dla parametru. Jeśli rozkład *a priori* parametru p jest bardziej rozproszony (większa wartość α_1), to prawdopodobieństwo *a posteriori* jest mniejsze. Statystyka χ^2 jest większa od wartości krytycznej na poziomie 0,05 i należy raczej uznać istotność różnicy. W istotnie mniejszym stopniu oczekiwano dalszego wzrostu.

W przekroju 14 (sektor publiczny - przedsiębiorstwa komunalne) mamy n=25, x=10, p_0=0,48; statystyka χ^2 ma wartość 0,764.

Tablica 2.12. Prawdopodobieństwa *a posteriori* nieistotności różnicy między stanem w II kw. a prognozą na III kw. 1994 - przekrój 14

	$\alpha_1'=1$	$\alpha_1''=\sqrt{n}/2$
$\pi_0'=1/3$	0,603	0,498
$\pi_0''=1/2$	0,752	0,665

Prawdopodobieństwa *a posteriori* skłaniają do uznania nieistotności różnicy. Statystyka χ^2 ma małą wartość, ale przekrój jest znów zbyt nieliczny. Można uznać, że przedsiębiorstwa komunalne oczekiwały podtrzymania wzrostu wielkości produkcji.

W przekroju 20 (gałąź EKD 45.4 - prace wykończeniowe) mamy n=19, x=6, p_0=0,421; statystyka χ^2 ma wartość 3,44.

Tablica 2.13. Prawdopodobieństwa *a posteriori* nieistotności różnicy między stanem w II kw. a prognozą na III kw. 1994 - przekrój 20

	$\alpha_1'=1$	$\alpha_1''=\sqrt{n}/2$
$\pi_0'=1/3$	0,554	0,489
$\pi_0''=1/2$	0,713	0,657

Możemy uznać nieistotność różnicy, choć nie bez wahania. Z danych źródłowych może bezpośrednio wynikać pewne osłabienie oczekiwań dalszego wzrostu.

W przekroju 22 (region północno-wschodni) mamy n=30, x=14, p_0=0,704; statystyka χ^2 ma wartość 8,229.

Tablica 2.14. Prawdopodobieństwa *a posteriori* nieistotności różnicy między stanem w II kw. a prognozą na III kw. 1994 - przekrój 22

	$\alpha_1'=1$	$\alpha_1''=\sqrt{n}/2$
$\pi_0'=1/3$	0,218	0,145
$\pi_0''=1/2$	0,358	0,254

Różnice musimy uznać za istotne. Potwierdza to też statystyka χ^2, dająca istotność na poziomie 0,05 (przy małej liczebności konkluzje o istotności, tzn. o odrzuceniu hipotezy zerowej, są odporniejsze na niedokładność rozkładu przybliżonego, z którego się korzysta). Oczekiwania dalszego wzrostu były wśród przedsiębiorstw z regionu północno-wschodniego znacznie osłabione.

W przekroju 25 (region środkowy) mamy n=40, x=15, p_0=0,475; statystyka χ^2 ma wartość 1,802.

Tablica 2.15. Prawdopodobieństwa *a posteriori* nieistotności różnicy między stanem w II kw. a prognozą na III kw. 1994 - przekrój 25

	$\alpha_1'=1$	$\alpha_1''=\sqrt{n}/2$
$\pi_0'=1/3$	0,541	0,419
$\pi_0''=1/2$	0,702	0,591

Widać w zasadzie brak podstaw do odrzucenia hipotezy o braku różnicy. Można uznać, że w regionie środkowym przedsiębiorstwa budowlane oczekiwały dalszego wzrostu produkcji w porównaniu z II kw.

W przekroju 27 (region środkowo-wschodni) mamy n=25, x=10, p_0=0,68; statystyka χ^2 ma wartość 9,067.

Tablica 2.16. Prawdopodobieństwa *a posteriori* nieistotności różnicy między stanem w II kw. a prognozą na III kw. 1994 - przekrój 27

	$\alpha_1'=1$	$\alpha_1''=\sqrt{n}/2$
$\pi_0'=1/3$	0,033	0,022
$\pi_0''=1/2$	0,064	0,042

Tu różnica jest zdecydowanie istotna. Przedsiębiorstwa nie podtrzymały oczekiwań wzrostu (zauważmy pesymizm "ściany wschodniej").

W przekroju 32 (zakłady zatrudniające powyżej 100 osób) mamy n=136, x=63, p_0=0,647; statystyka χ^2 ma wartość 24,643.

Tablica 2.17. Prawdopodobieństwa *a posteriori* nieistotności różnicy między stanem w II kw. a prognozą na III kw. 1994 - przekrój 32

	$\alpha_1^{/}=1$	$\alpha_1^{//}=\sqrt{n}/2$
$\pi_0^{/}=1/3$	0,00022	0,00009
$\pi_0^{//}=1/2$	0,00043	0,00017

Odrzucamy hipotezę o braku różnicy; różnica jest wysoce istotna. Duże firmy nie oczekują dalszego wzrostu (częściej tylko utrzymania poziomu produkcji z II kw.).

Rozpatrzmy dalsze dane i rozważmy teraz istotność różnic między stanem w IV kwartale a prognozą na ten kwartał (z III kwartału) w 1997 roku, dla odpowiedzi "wzrost" na pytanie 1 (o wielkość produkcji). Jako p_0 przyjmujemy frakcję odpowiedzi "wzrost" z prognozy na IV kwartał, a jako p - frakcję takich odpowiedzi co do stanu w IV kwartale. Niech x oznacza liczbę odpowiedzi "wzrost" w ocenie stanu z IV kwartału. Jak poprzednio, bierzemy pod uwagę niektóre przekroje, zwłaszcza najmniej liczne. Zauważmy, że typową prognozą na IV kwartał powinno być osłabienie aktywności, związane z początkiem zimy.

W przekroju 8 (sektor publiczny - zakłady powstałe do 1989) mamy n=60, x=33, p_0=0,32.

Tablica 2.18. Prawdopodobieństwa *a posteriori* nieistotności różnicy między prognozą na IV kw. a stanem w IV kw. 1997 - przekrój 8

	$\alpha_1^{/}=1$	$\alpha_1^{//}=\sqrt{n}/2$
$\pi_0^{/}=1/3$	0,004	0,002
$\pi_0^{//}=1/2$	0,007	0,004

Z obliczeń wynika, że prawdopodobieństwo *a posteriori* hipotezy o nieistotności różnicy między stanem w IV kwartale a prognozą na ten kwartał jest bardzo małe.

W przekroju 9 (sektor publiczny - zakłady powstałe po 1989) mamy n=21, x=7, p_0=0,105.

Tablica 2.19. Prawdopodobieństwa *a posteriori* nieistotności różnicy między prognozą na IV kw. a stanem w IV kw. 1997 - przekrój 9

	$\alpha_1^{/}=1$	$\alpha_1^{//}=\sqrt{n}/2$
$\pi_0^{/}=1/3$	0,037	0,027
$\pi_0^{//}=1/2$	0,071	0,053

Prawdopodobieństwa *a posteriori* wskazują na istotność różnicy między stanem w IV kwartale a prognozą na ten kwartał.

W przekroju 11 (sektor prywatny - spółki krajowe) mamy n=65, x=35, p_0=0,4.

Tablica 2.20. Prawdopodobieństwa *a posteriori* nieistotności różnicy między prognozą na IV kw. a stanem w IV kw. 1997 - przekrój 11

	$\alpha_1^{/}=1$	$\alpha_1^{//}=\sqrt{n}/2$
$\pi_0^{/}=1/3$	0,209	0,113
$\pi_0^{//}=1/2$	0,345	0,203

Prawdopodobieństwa *a posteriori* hipotezy o nieistotności nie są zbyt duże. Trzeba uznać różnicę między prognozą i stanem za istotną.

W przekroju 14 (sektor publiczny - przedsiębiorstwa komunalne) mamy n=10, x=2, p_0=0,08.

Tablica 2.21. Prawdopodobieństwa *a posteriori* nieistotności różnicy między prognozą na IV kw. a stanem w IV kw. 1997 - przekrój 14

	$\alpha_1^{/}=1$	$\alpha_1^{//}=\sqrt{n}/2$
$\pi_0^{/}=1/3$	0,448	0,438
$\pi_0^{//}=1/2$	0,619	0,609

Prawdopodobieństwa *a posteriori* mogą skłaniać do uznania nieistotności różnicy, zwłaszcza w przypadku silniejszego apriorycznego przekonania o tym.

W przekroju 20 (gałąź EKD 45.4 - prace wykończeniowe) mamy n=15, x=6, p_0=0,125.

Tablica 2.22. Prawdopodobieństwa *aposteriori* nieistotności różnicy między prognozą na IV kw. a stanem w IV kw. 1997 - przekrój 20

	$\alpha_1^{/}=1$	$\alpha_1^{//}=\sqrt{n}/2$
$\pi_0^{/}=1/3$	0,044	0,033
$\pi_0^{//}=1/2$	0,084	0,063

Musimy uznać istotność różnicy.

W przekroju 22 (region północno-wschodni) mamy n=18, x=7, p_0=0,23.

Tablica 2.23. Prawdopodobieństwa *aposteriori* nieistotności różnicy między prognozą na IV kw. a stanem w IV kw. 1997 - przekrój 22

	$\alpha_1^{/}=1$	$\alpha_1^{//}=\sqrt{n}/2$
$\pi_0^{/}=1/3$	0,367	0,292
$\pi_0^{//}=1/2$	0,537	0,452

Różnice uznajemy raczej za istotne, choć nie może to być kategoryczne stwierdzenie.

W przekroju 25 (region środkowy) mamy n=20, x=9, p_0=0,174.

Tablica 2.24. Prawdopodobieństwa *aposteriori* nieistotności różnicy między prognozą na IV kw. a stanem w IV kw. 1997 - przekrój 25

	$\alpha_1^{/}=1$	$\alpha_1^{//}=\sqrt{n}/2$
$\pi_0^{/}=1/3$	0,031	0,021
$\pi_0^{//}=1/2$	0,059	0,04

Odrzucamy hipotezę o braku różnicy.

W przekroju 27 (region środkowo-wschodni) mamy n=27, x=16, p_0=0,43.

Tablica 2.25. Prawdopodobieństwa *a posteriori* nieistotności różnicy między prognozą na IV kw. a stanem w IV kw. 1997 - przekrój 27

	$\alpha_1^{/}=1$	$\alpha_1^{//}=\sqrt{n}/2$
$\pi_0^{/}=1/3$	0,338	0,246
$\pi_0^{//}=1/2$	0,505	0,394

Tu różnica jest raczej istotna, ale też bez zdecydowanej przewagi hipotezy alternatywnej.

W przekroju 32 (zakłady zatrudniające powyżej 100 osób) mamy n=71, x=40, p_0=0,33.

Tablica 2.26. Prawdopodobieństwa *a posteriori* nieistotności różnicy między prognozą na IV kw. a stanem w IV kw. 1997 - przekrój 32

	$\alpha_1^{/}=1$	$\alpha_1^{//}=\sqrt{n}/2$
$\pi_0^{/}=1/3$	0,001	0,0005
$\pi_0^{//}=1/2$	0,002	0,001

Odrzucamy hipotezę o braku różnicy; różnica jest wysoce istotna.

Z wyjątkiem przekroju 14, stwierdziliśmy istotność różnicy między prognozą zmian wielkości produkcji na IV kw. 1997 a stanem w tym kwartale. Przypatrzmy się więc danym z tablicy 2.27, które posłużyły do zbudowania tablic od 2.9 do 2.26.

Tablica 2.27. Frakcje odpowiedzi "wzrost" na pytanie 1: prognoza na IV kw. 1997 a stan w IV kw.

Nr przekroju	Prognoza na IV kwartał 1997	Stan w IV kwartale 1997
8	0,32	0,55
9	0,105	0,333
11	0,4	0,538
14	0,08	0,2
20	0,125	0,4

Nr przekroju	Prognoza na IV kwartał 1997	Stan w IV kwartale 1997
22	0,23	0,389
25	0,174	0,45
27	0,43	0,593
32	0,33	0,563

Źródło: dane IRG SGH

W porównaniu z odsetkiem przedsiębiorstw zgłaszających faktyczny wzrost wielkości produkcji w IV kwartale, znacznie mniej firm prognozowało wcześniej na IV kwartał wzrost. Oczekiwania były bardziej pesymistyczne od ich realizacji, a sezonowe osłabienie aktywności gospodarczej w budownictwie nie tak powszechne, jak się spodziewano.

Posługując się prawdopodobieństwami *a posteriori* możemy zatem uzyskiwać wyniki w sytuacji, gdy stosowanie testu χ^2 jest utrudnione. Możemy też konfrontować wyniki testu bayesowskiego z testem χ^2. Posłużenie się więcej niż jednym rozkładem *a priori*, spośród rozkładów teoretycznie uzasadnionych, pozwoli uniknąć niepewności związanej z subiektywizmem jego wyboru. Istnieje też możliwość stosowania bardziej złożonych technik wyboru rozkładu *a priori* i badania jego wpływu na wyniki wnioskowania statystycznego.

Poza tym, w dwóch analizowanych wyżej zestawach danych częściej występowała zgodność stanu w danym kwartale z prognozą na następny, niż zgodność stanu z prognozą z poprzedniego kwartału. Wytłumaczenie tego faktu można częściowo znaleźć w psychicznych aspektach sporządzania subiektywnych prognoz, których wyniki są przedmiotem naszych analiz.

Literatura

[1] J. O. Berger (1985), *Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis*, 2nd edition, Springer -Verlag, New York.

[2] J. O. Berger (1990), Robust Bayesian analysis: sensitivity to the prior. *Journal of Statistical Planning & Inference* **25**, 303-328.

[3] P. Bickel, K. Doksum (1977), *Mathematical Statistics. Basic Ideas and Selected Topics*, Holden-Day, San Francisco (wyd. ros. 1983).

[4] I. J. Good (1965), *The Estimation of Probabilities*, MIT Press, Cambridge, Massachusetts.

[5] E. L. Lehmann (1991), *Teoria estymacji punktowej*, PWN, Warszawa.

[6] M. Męczarski (1997), *Wstępne uwagi o stosowaniu estymacji bayesowskiej w badaniach koniunktury*, w: *Koniunktura w gospodarce - aspekty metodologiczne*, seria *Prace i materiały Instytutu Rozwoju Gospodarczego* nr **55**, SGH, Warszawa 1997, str. 107-114.

[7] M. Męczarski (1998), *Problemy odporności w bayesowskiej analizie statystycznej*, seria *Monografie i opracowania* nr **446**, Oficyna Wydawnicza SGH, Warszawa.

[8] M. Męczarski (1998), Stabilność estymacji bayesowskiej wektora prawdopodobieństw w rozkładzie wielomianowym, *Przegląd Statystyczny* **45**, 2, 197-210.

[9] M. Podgórska, M. Męczarski, B. Kowalczyk (1994), *Statystyczne i ekonometryczne miary zróżnicowania wyników w badaniach koniunktury (etap I)*, badania statutowe (opracowanie), Kolegium Analiz Ekonomicznych SGH, Warszawa.

[10] M. Podgórska, E. Adamowicz, M. Męczarski (1996), *Metody analizy zróżnicowania wyników w badaniach koniunktury*, badania statutowe (opracowanie), Kolegium Analiz Ekonomicznych SGH, Warszawa.

[11] C. R. Rao (1982), *Modele liniowe statystyki matematycznej*, PWN, Warszawa.*Selected Tables in Mathematical Statictics*, vol. 1, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1973.

[12] R. Zieliński, W. Zieliński (1990), *Tablice statystyczne*, PWN, Warszawa.

Variation of business activity-methods of statistical inference

Abstract

In this chapter some typical methods of statistical inference are presented in order to analyse results of investigations of economic conditions based on questionnaires. One considers variation in the structure of answers between particular questions, within particular groups of questions, between particular groups (subpopulations) of enterprises and within the subpopulations. One also shows a way to analyse variation of the balance of answers (i. e. the difference between the fractions "increase" and "decrease") with respect to time. The methods are the well-known Pearson's chi-square test and a test based on the asymptotic normal distribution. Finally, one addresses the problem of Bayesian analysis of the business activity results by demonstrating some simple estimation and testing procedures. The data come from the database of IRG SGH (Institute of Economic Development, Warsaw School of Economics).