Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach

Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe
Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach
ISSN 2083-8611 Nr 297 · 2016

Krzysztof Piasecki

Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu
Wydział Informatyki i Gospodarki Elektronicznej
Katedra Badań Operacyjnych
k.piasecki@ue.poznan.pl

DYSKONTOWANIE POD WPŁYWEM AWERSJI DO RYZYKA − PRÓBA UOGÓLNIENIA

Streszczenie: Głównym celem artykułu jest kontynuacja badań nad wpływem awersji do ryzyka na wartość bieżącą. Niniejsze rozważania są uogólnione do przypadku, gdy miara awersji do ryzyka zależy równocześnie od momentu i wartości przepływu finansowego. Z ogólnej definicji wartości bieżącej został wyprowadzony warunek ograniczający zmienność stosowanej miary awersji do ryzyka. Rozważania te uzupełniono o dwa aksjomaty określające miarę awersji do ryzyka jako monotoniczną funkcję momentu i wartości przepływu finansowego. Ponadto pokazano, że w przypadku braku awersji do ryzyka definiowana wartość bieżąca spełnia warunki nałożone przez definicję Peccatiego.

Słowa kluczowe: wartość bieżąca, awersja do ryzyka, liniowe dyskonto.

Wprowadzenie

Wartość teraźniejszego ekwiwalentu płatności dostępnej w ustalonym momencie nazywamy wartością bieżącą (w skrócie PV) tej płatności. W arytmetyce finansowej PV jest stosowana jako funkcja dyskontująca wykorzystywana do dynamicznej oceny wartości pieniądza. Punktem wyjścia do rozwoju arytmetyki finansowej była teoria procentu [Chrzan, 2001]. Dalszy rozwój teoretycznych podstaw arytmetyki finansowej zaowocował sformułowaniem przez Peccatiego [1972] aksjomatycznych podstaw arytmetyki finansowej. Peccati zdefiniował PV jako addytywną funkcję wartości płatności. Teoria ta była intensywnie rozwijana w minionych latach, czego obraz można znaleźć w pracach: Piasecki [2007]; Janssen, Manc [2009]; Piasecki, Ronka-Chmielowiec [2011]. Wykazywano tam między innymi, że dowolna PV spełniająca warunki definicji Peccatiego jest liniowym dyskontem, to jest można ją przedstawić jako iloczyn wartości dyskontowanej płatności i czynnika dyskontującego zależnego jedynie od terminu odroczenia płatności. Oznacza to, że w modelach tych pominięto problem zależności PV od interakcji wartości i terminu odroczenia płatności. Określenie PV jako liniowej funkcji wartości płatności wykluczyło też możliwość ujawnienia się efektu oddziaływania pierwszego prawa Gossena. W ogólnym przypadku każde z tych zastrzeżeń jest jednak sprzeczne z praktyką finansów. Z drugiej strony wiadomo, że dowolne liniowe dyskonto spełnia warunki definicji Peccatiego. Z tego powodu definicja Peccatiego została uogólniona przez Piaseckiego [2012], gdzie uogólniona PV została zdefiniowana jako użyteczność porównania wielokryterialnego określonego przez preferencje terminowe i wartościowe.

W innej pracy Piasecki [2015a] wykazał, że istnieje taka uogólniona PV, która nie jest liniowym dyskontem. Rozważono tam PV zdefiniowaną jako funkcję o stałej awersji do ryzyka straty. Zakładano dodatkowo, że miara awersji do ryzyka jest niemalejącą funkcją ciągłą terminu płatności. Uzyskano w ten sposób nieliniowe dyskonto w postaci w pełni uzasadnionej przez przesłanki ekonomiczne.

Podobne badania przeprowadzono w pracach Piaseckiego [2015b, 2015c], gdzie rozważono PV zdefiniowaną jako funkcję o stałej awersji do ryzyka terminowego. Zakładano dodatkowo, że miara awersji do ryzyka jest niemalejącą funkcją ciągłą wartości dyskontowanej należności.

Głównym celem tego artykułu będzie uogólnienie wyników uzyskanych w pracy Piaseckiego [2015a] do przypadku, gdy miara awersji do ryzyka jest równocześnie zależna od dyskontowanej wartości i od terminu płatności. Pozostanie tutaj w mocy założenie, iż miara awersji do ryzyka jest niemalejącą funkcją zarówno terminu wymagalności, jak i wartości należności.

1. Wartość bieżąca − ujęcie aksjomatyczne

Każdą dostępną w określonym momencie płatność możemy opisać jako strumień finansowy. Niech będzie dany zbiór momentów czasowych $\{0\} \subset \Theta \subseteq \mathbb{R}_0^+$. W szczególnym przypadku może to być zbiór momentów kapitalizacji lub nieujemna półprosta czasu. Każdy strumień finansowy jest opisany przez parę $(t, C) \in \Phi = \Theta \times \mathbb{R}$, gdzie $t \in \Theta$ oznacza moment przepływu strumienia, natomiast $C \in \mathbb{R}$ opisuje wartość nominalną tego przepływu. Zbiór Φ nazywamy zbiorem płatności. Dodatkowo za pomocą symboli $\Phi^+ = \Theta \times \mathbb{R}^+$ i $\Phi_0^+ = \Theta \times \mathbb{R}_0^+$ wyróżniamy odpowiednio zbiór wszystkich należności i zbiór nieujemnych płatności. Peccati [1972] zdefiniował PV jako dowolną funkcję $PV: \Phi \longrightarrow \mathbb{R}$ spełniającą warunki:

$$\forall_{C \in \mathbb{R}}: PV(0, C) = C, \tag{1}$$

$$\forall_{(t_1,C),(t_2,C) \in \Phi^+}: t_1 > t_2 \Longrightarrow PV(t_1, C) < PV(t_2, C), \tag{2}$$

$$\forall_{(t,C_1),(t,C_2) \in \Phi}: PV(t, C_1 + C_2) = PV(t, C_1) + PV(t, C_2). \tag{3}$$

Każdą PV spełniającą warunki (1), (2) i (3) można przedstawić za pomocą tożsamości:

$$PV(t, C) = C \cdot v(t), \tag{4}$$

gdzie czynnik dyskontujący $v: \Theta \longrightarrow [0; 1]$ jest określony za pomocą zależności:

$$v(t) = PV(t, 1). \tag{5}$$

Oznacza to, że dowolna PV w ujęciu definicji Peccatiego jest liniowym dyskontem. Z drugiej strony każde liniowe dyskonto spełnia warunki (1), (2) i (3) definicji Peccatiego. Stąd każdą PV w ujęciu definicji Peccatiego będziemy dalej nazywać liniowym dyskontem.

Na gruncie teorii procentu można się jedynie spotkać z wykładniczymi czynnikami dyskontującymi. Z drugiej strony wiele różnych rodzajów czynników dyskontujących zostało określonych w trakcie badań behawioralnych aspektów dynamicznej oceny pieniądza. Wielowątkowe wyniki badań na temat czynników dyskontujących zostały omówione kompetentnie w Doyle [2013]. Wskazano tam między innymi na fakt, że wszystkie omawiane modele są szczególnymi przypadkami liniowego dyskonta.

W pracy Piaseckiego [2012] wykazano, że przy określonych warunkach brzegowych użyteczność strumienia finansowego jest równa jego PV. Pozwoliło to na zdefiniowanie PV jako dowolnej funkcji $PV: \Phi \longrightarrow \mathbb{R}$ spełniającej warunki (1), (2) i:

$$\forall_{(t,C_1),(t,C_2) \in \Phi}: C_1 > C_2 \Longrightarrow PV(t, C_1) > PV(t, C_2). \tag{6}$$

$$\forall_{(t,C) \in \Phi}: PV(t, -C) = -PV(t, C). \tag{7}$$

Powyższa definicja PV jest uogólnieniem definicji Peccatiego. Z tego powodu w tym artykule będziemy ją nazywać uogólnioną PV. Zauważmy, że dzięki (7) mamy:

$$\forall_{t \in \Theta}: PV(t, 0) = 0. \tag{8}$$

Wszystkie dalsze rozważania zostaną poświęcone uogólnionej PV. W pracach Piaseckiego [2015a, 2015b, 2015c] pokazano przykłady takich PV, które nie są liniowymi dyskontami. Przebieg zmienności każdej z tych PV był dobrze uzasadniony za pomocą przesłanek ekonomicznych. Każda PV niebędąca liniowym dyskontem będzie też nazywana dyskontem nieliniowym.

Identyfikacja PV z użytecznością strumienia finansowego pozwala na rozważanie pierwszego prawa Gossena [Begg i in., 2007]:

$$\forall_{(t,C_1),(t,C_2)\in\Phi_0^+} \forall_{\alpha\in[0;1]}:$$
$$\alpha \cdot PV(t,C_1) + (1-\alpha)PV(t,C_2) \leq PV(t,\alpha C_1 + (1-\alpha)C_2) \tag{9}$$

jako dodatkowego warunku nałożonego na PV. Założenie to jest dobrze uzasadnione przez teorię i praktykę ekonomiczną. W ten sposób PV staje się wklęsłą funkcją kapitału. O inwestorze uwzględniającym warunek (9) mówimy, że ujawnia awersję do ryzyka straty. Awersja ta ujawni się dla każdej pary nieujemnych płatności $(t,K_1),(t,K_2) \in \Phi_0^+$ takiej, że spełniony jest warunek:

$$\forall_{\alpha\in[0;1]}: \alpha \cdot PV(t,K_1) + (1-\alpha)PV(t,K_2) < PV(t,\alpha K_1 + (1-\alpha)K_2). \tag{10}$$

Zasięg ujawniania się tej awersji jest jednak ograniczony, gdyż z warunku (1) otrzymujemy:

$$\forall_{C_1,C_2\in\mathbb{R}_0^+} \forall_{\alpha\in[0;1]}:$$
$$\alpha \cdot PV(0,C_1) + (1-\alpha)PV(0,C_2) = PV(0,\alpha C_1 + (1-\alpha)C_2). \tag{11}$$

Zauważmy też, że zgodnie z (4), dla dowolnego $t \in \Theta$, każde liniowe dyskonto $PV(t,\cdot): \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ ma ciągłe pochodne cząstkowe:

$$PV_C' = \frac{\partial PV}{\partial C} \text{ i } PV_C'' = \frac{\partial^2 PV}{\partial C^2}. \tag{12}$$

Warunek ciągłości pochodnych wykorzystamy jako dodatkowy warunek ograniczający nałożony na uogólnioną PV.

2. Wartość bieżąca a awersja do ryzyka

Punktem wyjścia naszych rozważań będzie liniowa przestrzeń finansowa $(\Phi,\mathcal{PV})$, gdzie liniowe dyskonto $\mathcal{PV}: \Phi \longrightarrow \mathbb{R}$ jest określone za pomocą tożsamości:

$$\mathcal{PV}(t,C) = C \cdot v(t). \tag{13}$$

Przedmiotem niniejszych rozważań będzie natomiast dowolna uogólniona wartość bieżąca $PV: \Phi \longrightarrow \mathbb{R}$ spełniająca dodatkowo pierwsze prawo Gossena (9). Będziemy zakładać, że wyróżnione powyżej dyskonto liniowe stanowi dla rozważanej PV wzorzec dyskontowania jednostki kapitału. Zatem możemy zapisać warunek:

$$\mathcal{PV}(t,1) = PV(t,1). \tag{14}$$

Z drugiej strony mamy tutaj także, że $\mathcal{PV}: \Phi \longrightarrow \mathbb{R}$ jest liniowym dyskontem wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony warunek:

$$\forall_{(t,C_1),(t,C_2)\in\Phi_0^+} \forall_{\alpha\in[0;1]}:$$

$$\alpha \cdot \mathcal{PV}(t, C_1) + (1-\alpha)\mathcal{PV}(t, C_2) = \mathcal{PV}(t, \alpha C_1 + (1-\alpha)C_2). \tag{15}$$

Oznacza to, że posługiwanie się liniowym dyskontem jest równoważne z założeniem braku awersji do ryzyka straty. Wynika stąd, że zastąpienie liniowego dyskonta przez nieliniowe ujawnia awersję do ryzyka straty. Dla $PV: \Phi \longrightarrow \mathbb{R}$ awersję tę oceniamy za pomocą miary awersji do ryzyka $\alpha: \Phi_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ [Pratt, 1964; Arrow, 1971] danej za pomocą tożsamości:

$$\alpha(t, C) = -\frac{PV_C''(t,C)}{PV_C'(t,C)}. \tag{16}$$

Zauważmy, że dzięki (11) mamy tutaj:

$$\forall_{C\in\mathbb{R}^+}: \alpha(0, C) = 0. \tag{17}$$

Oznacza to, że przyjęcie klasycznego założenia o stałej wartości miary awersji do ryzyka straty − w przypadku uogólnionej PV − jest równoważne przyjęciu założenia o braku awersji do tego ryzyka. Jedynymi uogólnionymi PV wolnymi od awersji do ryzyka straty są liniowe dyskonta. W ten sposób wykazaliśmy, że nieliniowe dyskonta charakteryzują się zmienną wartością miary awersji do ryzyka.

Ponadto przypuszczamy, że awersja do ryzyka może narastać wraz z opóźnianiem się terminu wymagalności należności. Założenie to zostało już zastosowane [Piasecki, 2015a]. Formalnym odzwierciedleniem tego przypuszczenia jest przyjęcie założenia, że miara awersji do ryzyka jest niemalejącą funkcją terminu wymagalności należności.

Zasadne też wydaje się przypuszczenie, że awersja do ryzyka może narastać wraz ze wzrostem wartości dyskontowanej należności. Założenie to zostało już zastosowane [Piasecki, 2015b, 2015c]. Formalnym odzwierciedleniem tego przypuszczenia jest przyjęcie założenia, że miara awersji do ryzyka jest nierosnącą funkcją wartości dyskontowanej płatności.

Zbadajmy teraz wpływ awersji do ryzyka na przebieg zmienności uogólnionej PV. Niech będzie dana miara awersji do ryzyka $\alpha: \Phi_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ spełniająca dodatkowo warunek (17). Rozwiązaniem ogólnym zagadnienia (16) jest wtedy całka:

$$PV(t, C) = A(t) \cdot \int_0^C \exp\left\{-\int_0^y \alpha(t, x)dx\right\} dy + B(t) \tag{18}$$

określona dla dowolnej pary $(t, C) \in \Phi_0^+$. Bezpośrednio z (8) dla dowolnego $t \in \Theta$ otrzymujemy $B(t) = 0$, co prowadzi do:

$$PV(t, C) = A(t) \cdot \int_0^C \exp\left\{-\int_0^y \alpha(t, x)dx\right\} dy. \tag{19}$$

Dzięki zależnościom (4) i (14) możemy w przebiegu zmienności wyznaczanej PV uwzględnić właściwości zastanej liniowej przestrzeni finansowej. Mamy tutaj:

$$v(t) = \mathcal{PV}(t, 1) = PV(t, 1) = A(t) \cdot \int_0^1 \exp\left\{-\int_0^y \alpha(t, x)dx\right\} dy, \tag{20}$$

co ostatecznie pozwala wyznaczyć $PV\colon \Phi_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ za pomocą tożsamości:

$$PV(t, C) = v(t) \cdot \frac{\int_0^C \exp\left\{-\int_0^y \alpha(t,x)dx\right\}dy}{\int_0^1 \exp\left\{-\int_0^y \alpha(t,x)dx\right\}dy}. \tag{21}$$

Określona powyżej PV spełnia bez wątpienia warunki (1) i (6) uogólnionej definicji PV. Stosując warunek (7) tej definicji, możemy powyższe określenie PV rozszerzyć, gdyż dzięki elementarnym właściwościom całki oznaczonej także funkcja $PV\colon \Phi \longrightarrow \mathbb{R}$ jest określona za pomocą tożsamości (21).

Dla klasycznego przypadku:

$$\alpha(t, C) = \alpha(t), \tag{22}$$

kiedy awersja od ryzyka jest niezależna od wartości dyskontowanej płatności, PV tej płatności można przedstawić następująco:

$$PV(t, C) = \begin{cases} \operatorname{sign}(C) \cdot\ v(t) \cdot \frac{e^{\alpha(t)} \cdot \left(1-e^{-\alpha(t)\cdot|C|}\right)}{e^{\alpha(t)}-1} & t > 0 \\ C & t = 0 \end{cases}. \tag{23}$$

Stosując elementarne metody rachunku różniczkowego, można tutaj wykazać, że spełnienie warunku (2) definicji PV jest konsekwencją przyjęcia założenia, że miara awersji do ryzyka jest niemalejącą funkcją terminu odroczenia płatności. Korzystając z tego wyniku oraz z twierdzenia o wartości średniej [Fichtenholz, 1972, t. II, s. 97-98], możemy wykazać, że także w ogólnym przypadku warunek „miara awersji do ryzyka jest niemalejącą funkcją terminu odroczenia płatności" jest warunkiem dostatecznym dla warunku (2).

Otwarty pozostaje tutaj problem, jakie warunki są konieczne do tego, aby był spełniony warunek definicyjny (2).

Podsumowanie

Wyznaczona powyżej PV jest nieliniowym dyskontem zdeterminowanym przez awersję do ryzyka. Przebieg zmienności uzyskanej funkcji $PV(\cdot,\cdot)$ zależy jedynie od przebiegów zmienności miary awersji do ryzyka i założonego czynnika dyskontującego. Każda z tych charakterystyk stanowi element opisu środowiska ekonomicznego. W tej sytuacji stwierdzamy, że przebieg zmienności PV zdefiniowanej za pomocą (21) jest uzasadniony w pełni przesłankami ekonomicznymi. O własnościach miary awersji do ryzyka przyjęliśmy jedynie założenia wskazane we wprowadzeniu, to jest słabsze niż założenia przyjęte w pracy Piaseckiego [2015a]. Zostało pominięte założenie głoszące, że wzrost wartości dyskontowanej należności nie wpływa na awersję do ryzyka. Następnie zależność (21) zastosowano do wyznaczenia PV przy założeniach przyjętych w Piasecki [2015ba] i uzyskano zależność (23) będącą całką ogólną różniczkowego zagadnienia początkowego zapisanego w cytowanej pracy. Wszystko to pokazuje, że został zrealizowany główny cel badawczy niniejszego artykułu.

Przeprowadzone powyżej rozumowanie stanowi swoisty dowód tezy, że ujawnienie się awersji do ryzyka jest warunkiem koniecznym do tego, aby dyskonto było nieliniowe.

Czynnik dyskontujący jest przykładem czynnika fundamentalnego oceny. Awersja do ryzyka reprezentuje czynniki behawioralne oceny finansowej. Przeprowadzone tu badania dowodzą, że można wyznaczać PV, kierując się interakcją czynników behawioralnych i fundamentalnych.

W artykule zaproponowano dwa założenia o monotoniczności miary awersji do ryzyka. Podstawą przyjęcia tych założeń były ujawnione tam przypuszczenia. Nie jest to jednak wystarczająca podstawa do prowadzenia wiarygodnych badań. Z tej przyczyny jednym z koniecznych kroków dalszych badań powinna być obszerna kwerenda literaturowa w obszarze finansów behawioralnych. Przedmiotem tych poszukiwań powinny być prace zawierające wyniki potwierdzające lub zaprzeczające przyjętym założeniom o monotoniczności miary awersji do ryzyka.

Z punktu widzenia potrzeb finansów nazbyt wysoka jest złożoność matematyczna zależności (21) opisująca PV w przypadku ogólnym. Stąd konieczne staje się zbieranie informacji o możliwych przypadkach szczególnych. Na pewno istotnym źródłem tych informacji będzie kolekcja czynników dyskontujących przedstawionych w Doyle [2013]. Dla każdego z tych przypadków będzie można wyprowadzić prostą zależność opisującą PV, tak jak to już uczyniono w przypadku zależności (23).

Literatura

Arrow K.J. (1971), *Essays in the Theory of Risk Bearing*, North-Holland, Amsterdam.

Begg D., Fischer S., Dornbusch R. (2007), *Mikroekonomia*, PWE, Warszawa.

Chrzan P. (2001), *Matematyka finansowa. Podstawy teorii procentu*, Oikońomos, Katowice.

Doyle J.R. (2013), *Survey of Time Preference, Delay Discounting Model*, "Judgment and Decision Making", 8 (2).

Fichtenholz G.M. (1972), *Rachunek różniczkowy i całkowy*, Wyd. V, PWN, Warszawa.

Janssen J., Manca R., Volpe di Prignano E. (2009), *Mathematical Finance. Deterministic and Stochastic Model*, John Wiley & Sons, London.

Peccati L. (1972), *Su di una caratterizzazione del principio del criterio dell'attualizzazione*, Studium Parmense, Parma.

Piasecki K. (2007), *Modele matematyki finansowej. Instrumenty podstawowe*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Piasecki K. (2012), *Basis of Financial Arithmetic from the Viewpoint of the Utility Theory*, "Operations Research and Decisions", 22(3).

Piasecki K. (2015a), *Discounting under Impact of Risk Aversion*, "SSRN Electronic Journal", DOI: 10.2139/ssrn.2560989.

Piasecki K. (2015b), *Discounting under Impact of Temporal Risk Aversion − A Case of Discrete Time*, "Prace Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu", 381.

Piasecki K. (2015c), *Discounting under Impact of Temporal Risk Aversion − A Case of Continuous time* [w:] Pavel Jedlička (ed.), *Economic Development and Management of Regions.* Vol. 5, Gaudeamus, University of Hradec Králové, Hradec Králové.

Piasecki K., Ronka-Chmielowiec W. (2011), *Matematyka finansowa*, C.H. Beck, Warszawa.

Pratt J.W. (1964), *Risk Aversion in the Small and in the Large*, "Econometrica", 132.

DISCOUNTING UNDER THE IMPACT OF RISK AVERSION
− AN ATTEMPT TO GENERALIZATION

Summary: The main goal of this work is the continuation of studies on the risk aversion impact on present value. Our considerations are generalized here to the case where the risk aversion measure depends on the timing and value of cash flow at the same time. Constraint of volatility of applied risk aversion measure has been implied from the general definition of the present value. These considerations are supplemented by two axioms which are determining risk aversion measure, as a monotonic function of time and value of cash flow. Furthermore, it is shown that in the absence of risk aversion defined present value fulfills the conditions imposed by the Peccati's definition.

Keywords: present value, risk aversion, linear discount.