Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach

Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe
Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach
ISSN 2083-8611 Nr 366 · 2018

Stanisław Heilpern

Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu
Wydział Zarządzania, Informatyki i Finansów
Katedra Statystyki
stanislaw.heilpern@ue.wroc.pl

Joanna Dębicka

Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu
Wydział Zarządzania, Informatyki i Finansów
Katedra Statystyki
joanna.debicka@ue.wroc.pl

WTÓRNY RYNEK UBEZPIECZEŃ – PROBLEM OPTYMALIZACJI

Streszczenie: Artykuł poświęcony jest problemowi optymalizacji przepływów finansowych powstających w wyniku realizacji umowy na wtórnym rynku ubezpieczeń, rozpatrywanych z punktu widzenia ubezpieczonego. Ubezpieczony chory na przewlekłą chorobę, chcąc uzyskać fundusze na leczenie, odsprzedaje inwestorowi część praw do świadczenia ubezpieczeniowego. Zadanie polega na wyborze tej części w taki sposób, aby zmaksymalizować oczekiwaną kwotę dostępnych środków. Zakłada się przy tym, że ubezpieczony postępuje na rynku racjonalnie, uwzględniając swoje podejście do ryzyka. W pracy wykorzystano model wielostanowy i rozpatrzono różne teorie podejmowania decyzji w warunkach ryzyka i niepewności: maksymalizację wartości oczekiwanej, oczekiwanej użyteczności, użyteczności zależnej od porządku oraz teorię perspektyw. Przeanalizowano też wpływ parametrów funkcji użyteczności i funkcji zniekształcającej prawdopodobieństwo na wartość optymalnego wyboru, w przypadku gdy ubezpieczony postępuje zgodnie z teorią perspektyw.

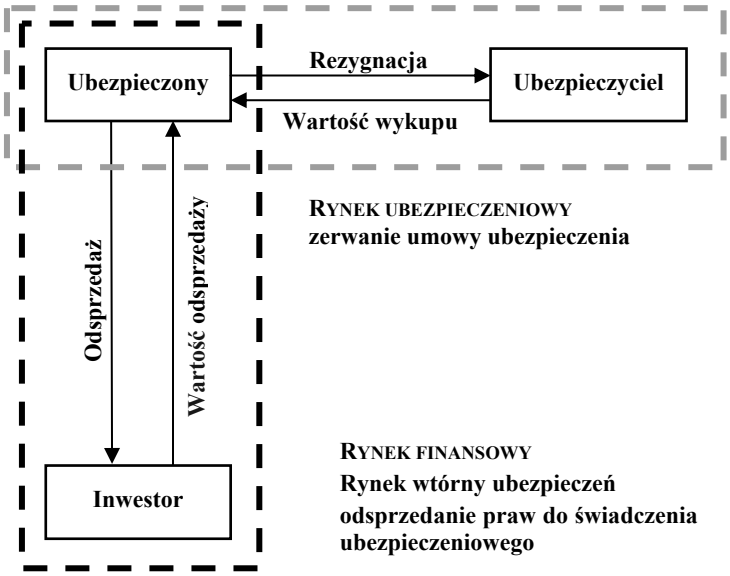
Słowa kluczowe: wtórny rynek ubezpieczeń, model wielostanowy, użyteczność, użyteczność zależna od porządku, teoria perspektyw.

JEL Classification: D81, G22, G120, C41.

Wprowadzenie

Dla ubezpieczonego posiadającego ubezpieczenie na życie, chorego na przewlekłą, nieuleczalną chorobę, istotnym problemem jest uzyskanie zabezpieczenia finansowego umożliwiającego dalsze leczenie. Jest ono zwykle w tym przypadku dość kosztowne. Jednym z rozwiązań, umożliwiającym pozyskanie funduszy z polisy ubezpieczeniowej, jest zerwanie umowy i otrzymanie od ubezpieczyciela tzw. wartości wykupu CVS (*cash surrender value*) [Dębicka, Heilpern, 2017ab]. Innym sposobem, popularnym np. w USA i krajach europej-

skich, jest odsprzedanie praw do świadczenia ubezpieczeniowego inwestorowi, który oferuje wtedy ubezpieczonemu wartość odsprzedaży VSP (*viatical settlement payment*) przewyższającą wartość wykupu, czyli CVS < VSP (por. np. [Bhuyan, 2009; Gatzert, 2010]). Schemat tego rozwiązania przedstawiony jest na rys. 1.

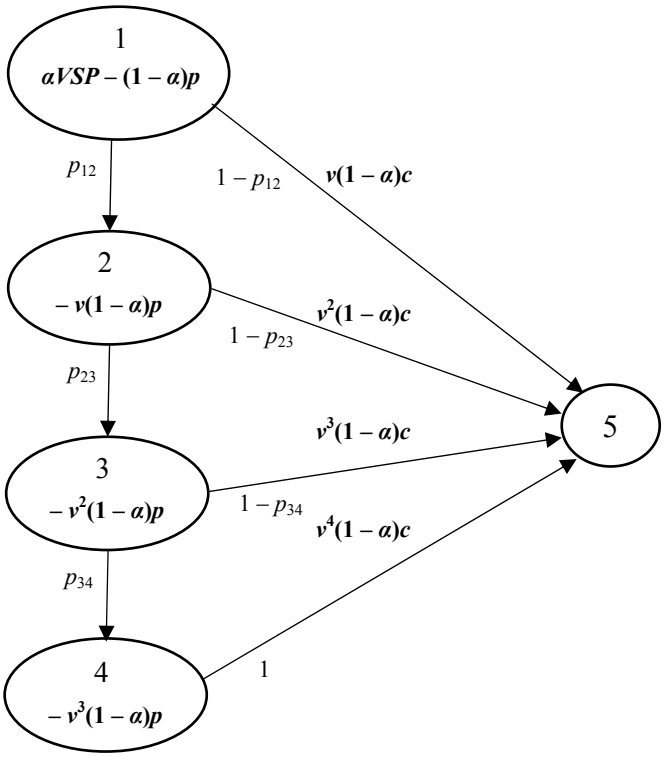


Rys. 1. Schemat pierwotnego i wtórnego rynku ubezpieczeniowego

Źródło: Dębicka, Heilpern [2017a].

Załóżmy, że x-letni mężczyzna posiada ubezpieczenie na całe życie. W czasie trwania ubezpieczenia zachoruje na nieuleczalną chorobę i chciałby odsprzedać inwestorowi część $0 \leq \alpha \leq 1$ swoich praw do świadczenia c wypłacalnego w przypadku śmierci (α jest parametrem odsprzedaży). Inwestor proponuje ubezpieczonemu wartość odsprzedaży *VSP* za całość praw do świadczenia c. W skrajnych przypadkach, gdy $\alpha = 0$, ubezpieczony nie odsprzedaje swoich praw do świadczenia, a gdy $\alpha = 1$, odsprzedaje całość. Ubezpieczony dobiera α tak, aby maksymalizować oczekiwaną kwotę dostępnych środków. Zakładamy, że postępuje on na rynku racjonalnie, uwzględniając swoje podejście do ryzyka [Dębicka, Heilpern, 2017b].

1. Model wielostanowy



Rys. 2. Model wielostanowy z przepływami pieniężnymi i strukturą probabilistyczną

Źródło: Dębicka, Heilpern [2017b].

Do modelowania zachowania ubezpieczonego na wtórnym rynku ubezpieczeniowym wykorzystamy model wielostanowy [Dębicka, Heilpern, 2017ab]. Przyjmiemy tutaj, że przestrzeń stanów modelu $S = \{1, 2, \ldots, 5\}$ będzie się składała z następujących stanów:

1. Oczekiwany czas życia ubezpieczonego jest mniejszy niż 4 lata.
2. Oczekiwany czas życia ubezpieczonego jest mniejszy niż 3 lata.
3. Oczekiwany czas życia ubezpieczonego jest mniejszy niż 2 lata.
4. Oczekiwany czas życia ubezpieczonego jest mniejszy niż rok.
5. Ubezpieczony umiera, będąc śmiertelnie chorym.

Rysunek 2 prezentuje model wielostanowy opisujący interesujący nas kontrakt zawarty na ubezpieczeniowym rynku wtórnym. Wewnątrz elips oraz z prawej strony strzałek znajdują się aktualne wartości przepływów pieniężnych, a z lewej strony – prawdopodobieństwa przejścia p_{ij} między stanami modelu, natomiast v jest czynnikiem dyskontującym.

Niech X będzie zmienną losową przedstawiającą całkowity przepływ pieniężny otrzymany przez ubezpieczonego po odsprzedaży części α polisy. Przyjmuje ona cztery wartości [Dębicka, Heilpern, 2017b]:

$$x_k = \alpha VSP + (1 - \alpha)b_k,$$

gdzie k = 1, 2, 3, 4 oraz $b_k = v^k c - p\sum_{i=0}^{k-1} v^i$. Wartości te spełniają następujące nierówności:

$$x_1 > x_2 > x_3 > x_4.$$

Na ogół składka p jest istotnie mniejsza od wielkości świadczenia c, więc zachodzi $x_4 > 0$. Rozkład zmiennej losowej X określony jest wzorem:

$$P(X = x_k) = q_k,$$

gdzie $q_1 = 1 - p_{12}$, $q_2 = p_{12}(1 - p_{23})$, $q_3 = p_{12}p_{23}(1 - p_{34})$ i $q_4 = p_{12}p_{23}p_{34}$.

Należy zaznaczyć, że wartość odsprzedaży VSP, proponowana przez inwestora, jest ograniczona zarówno z dołu, jak i z góry. Przyjmując, że ubezpieczony zapada na śmiertelną chorobę w l-tym roku trwania polisy, to wartość odsprzedaży $VSP(l)$ spełnia następujące nierówności [Dębicka, Heilpern, 2017a]:

$$V(l) < VSP(l) < EB(l) - EC(l),$$

gdzie $V(l)$ jest rezerwą składki netto, $EB(l)$ – oczekiwaną wartością przyszłych przychodów inwestora, a $EC(l)$ – oczekiwaną wartością składek płaconych przez inwestora.

2. Wartość oczekiwana

Załóżmy, że ubezpieczony ma neutralne podejście do ryzyka. Wtedy jego strategia wyboru wartości udziału odsprzedaży α będzie oparta na wartości oczekiwanej całkowitych przypływów finansowych, czyli:

$$EX = \sum_{k=1}^{4} x_k q_k = \alpha VSP + (1-\alpha)\sum_{k=1}^{4} b_k q_k.$$

Jest to funkcja liniowa ze względu na α. Przyjmuje więc największą wartość na jednym z końców przedziału określoności parametru α. W przypadku gdy $VSP > bq = \sum_{k=1}^{4} b_k q_k$, wtedy $\max(EX) = VSP$ i rozwiązaniem naszego zadania optymalizacyjnego jest $\alpha = 1$, czyli sytuacja, gdy ubezpieczony odsprzedaje wszystkie prawa do świadczenia. Jeżeli zachodzi $VSP < bq$, to $\max(EX) = bq$

oraz rozwiązaniem jest $\alpha = 0$, czyli ubezpieczony nie odsprzedaje swoich praw do polisy. Natomiast gdy $VSP = bq$, to max(EX) przyjmuje tę samą wartość dla każdego $0 \leq \alpha \leq 1$. Każda wartość parametru α jest wtedy „dobra" [Dębicka, Heilpern, 2017b].

3. Oczekiwana użyteczność

Przyjmijmy teraz, że ubezpieczony ma awersję do ryzyka i postępuje zgodnie z klasyczną teorią użyteczności [von Neumann, Morgenstern, 1944]. Wtedy ubezpieczony maksymalizuje oczekiwaną użyteczność:

$$E(U(X)) = \sum_{k=1}^{4} U(x_k) q_k \ ,$$

gdzie $U(x)$ jest funkcją użyteczności. W naszym przypadku

$$x_k = \alpha VSP + (1-\alpha)p - \sum_{i=1}^{k-1}(1-\alpha)pv^i + (1-\alpha)cv^k,$$

zastosujemy więc model zdyskontowanej użyteczności [Samuelson, 1937; Hey, 2003]. Całkowita użyteczność U jest wtedy sumą użyteczności u przepływów pieniężnych w każdym okresie, zdyskontowanych według stopy r. Otrzymujemy więc następującą postać całkowitej użyteczności [Dębicka, Heilpern, 2017b]:

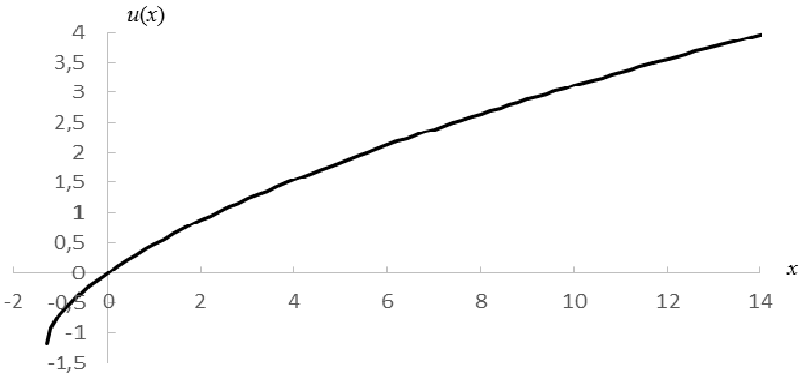
$$U(x_k) = u(\alpha VSP - (1-\alpha)p) + u((\alpha - 1)p)\sum_{i=1}^{k-1} v^i + u((1-\alpha)c)v^k.$$

Użyteczność $u(x)$ jest funkcją ciągłą, rosnącą, wklęsłą oraz spełniającą warunek $u(0) = 0$, ponieważ założyliśmy, że ubezpieczony ma awersję do ryzyka. Funkcja całkowitej użyteczności $U(x)$ również posiada te własności.

Załóżmy, że funkcja użyteczności ma następującą, potęgową postać:

$$u_1(x) = (x + p)^\beta - p^\beta,$$

gdzie $0 \leq \beta \leq 1$ oddaje stopień awersji do ryzyka. Dla $\beta = 1$ otrzymujemy funkcję liniową $u_1(x) = x$. Ubezpieczony charakteryzuje się wtedy neutralnym podejściem do ryzyka. Na rys. 3 przedstawiono wykres funkcji $u_1(x)$, gdy $\beta = 0{,}6$.



Rys. 3. Wykres funkcji użyteczności $u_1(x)$

Oczekiwana użyteczność przepływów pieniężnych ubezpieczonego przyjmuje wówczas następującą postać [Dębicka, Heilpern, 2017b]:

$$E(U(X)) = \alpha^{\beta}((VSP + p)^{\beta} + p^{\beta}A_p) + (c + p - \alpha c)^{\beta}A_c - p^{\beta}(1 + A_p + A_c),$$

gdzie $A_p = \sum_{k=2}^{4}\left(\sum_{i=1}^{k-1} v^i\right)q_k$ oraz $A_c = \sum_{k=1}^{4} v^k q_k$. Jest to funkcja wklęsła, a jej pochodna przyjmuje wartość zero dla

$$\alpha_0 = \frac{(cA_c)^{1/(\beta-1)}(c+p)}{((VSP+p)^{\beta} + p^{\beta}A_p)^{1/(\beta-1)} + c^{\beta/(\beta-1)}A_c^{1/(\beta-1)}}$$

i osiąga maksimum w tym punkcie.

4. Oczekiwana użyteczność zależna od porządku

Jedną z uogólnień klasycznej teorii użyteczności jest teoria oczekiwanej użyteczności zależna od porządku (ang. *the rank-dependent expected utility* [RDEU] *theory*) [Quiggin, 1982; Heilpern, 2004]. Według tej teorii ubezpieczony opiera swoje postępowanie na wtórnym rynku ubezpieczeń na funkcji użyteczności $U(x)$ i funkcji zniekształcającej prawdopodobieństwa $w(q)$. Funkcja w: $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$ jest niemalejąca oraz spełnia warunki: $w(0) = 0$ i $w(1) = 1$. Oczekiwana użyteczność przepływów pieniężnych ubezpieczonego jest wtedy całką Choqueta [Denneberg, 1994] opartą na zniekształconych prawdopodobieństwach:

$$E_w(U(X)) = \int_0^\infty w(S(x))dx - \int_0^\infty (1 - w(S(x)))dx,$$

gdzie $S(x) = 1 - F(x)$ jest funkcją przetrwania zmiennej losowej $Y = U(X)$, a $F(x)$ jest dystrybuantą Y. Gdy $w(q) = q$, to otrzymujemy klasyczną teorię użyteczności.

W naszym przypadku wszystkie wartości zmiennej losowej X są dodatnie, tzn. $x_i > 0$, a oczekiwana użyteczność przepływów pieniężnych wyraża się wzorem:

$$E_w(U(X)) = \sum_{k=1}^{4} U(x_k) w_k ,$$

gdzie: $w_1 = w(q_1)$, $w_2 = w(q_1 + q_2) - w(q_1)$, $w_3 = w(1 - q_4) - w(q_1 + q_2)$ oraz $w_4 = 1 - w(1 - q_4)$. Ponadto zachodzi warunek $\sum_{k=1}^{4} w_k = 1$. Łatwo zauważyć, że otrzymujemy postać oczekiwanej użyteczności podobnej jak w przypadku klasycznej wersji teorii użyteczności. Jedynie prawdopodobieństwa zostały zniekształcone – zamiast q_k mamy w_k, natomiast cała procedura znajdowania optymalnej wartości parametru α nie ulega zmianie.

5. Teoria skumulowanych perspektyw

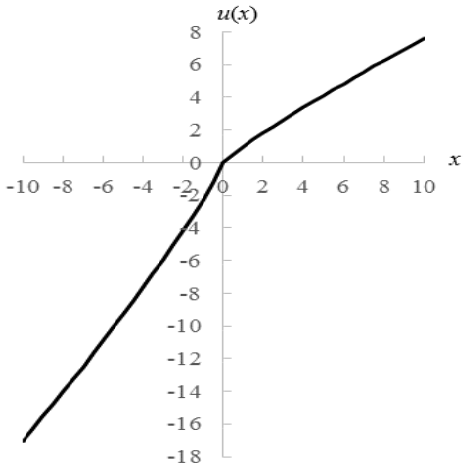
Innym uogólnieniem klasycznej teorii użyteczności jest teoria skumulowanych perspektyw [Tversky, Kahneman, 1992]. Ubezpieczony traktuje wtedy inaczej wartości dodatnie oraz ujemne. Jego funkcja użyteczności $u(x)$ jest wklęsła dla wartości dodatnich i wypukła dla ujemnych. Inne są też funkcje zniekształcające prawdopodobieństwa: $w_+(q)$ i $w_-(q)$. Ubezpieczony postępujący racjonalnie na wtórnym rynku ubezpieczeń powinien wybrać wartość parametru α, maksymalizując oczekiwaną użyteczność określoną wzorem:

$$E_{w_+, w_-}(U(X)) = \int_0^\infty w_+(S(x))dx - \int_{-\infty}^0 w_-(F(x))dx .$$

Twórcy teorii skumulowanych perspektyw (ang. *cumulated prospect theory* – CPT) w swojej wcześniejszej pracy [Kahneman, Twersky, 1972] zaproponowali następującą postać funkcji użyteczności:

$$u_2(x) = \begin{cases} x^\beta & x \geq 0 \\ -\lambda(-x)^\beta & x < 0 \end{cases},$$

gdzie $0 \leq \beta \leq 1$ i $\lambda > 1$. Autorzy na podstawie przeprowadzonych eksperymentów przyjęli, że $\beta = 0{,}88$ oraz $\lambda = 2{,}25$. Wykres tej funkcji użyteczności przedstawiony jest na rys. 4.

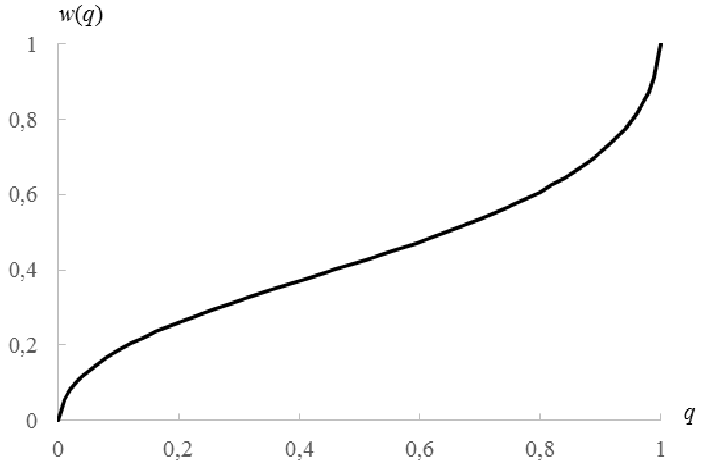


Rys. 4. Wykres funkcji użyteczności $u_2(x)$

Najczęściej funkcja zniekształcająca prawdopodobieństwa określona jest wzorem:

$$w(q) = \frac{q^{\gamma}}{(q^{\gamma} + (1-q)^{\gamma})^{1/\gamma}},$$

gdzie $0 \leq \gamma \leq 1$. Autorzy w pracy [Tversky, Kahneman, 1992] zaproponowali $\gamma_{+} = 0{,}61$ dla wartości dodatnich i $\gamma_{-} = 0{,}69$ – dla ujemnych. Rysunek 5 przedstawia wykres funkcji zniekształcającej prawdopodobieństwa, określonej dla wartości dodatnich.



Rys. 5. Wykres funkcji zniekształcającej prawdopodobieństwa, dla $\gamma = 0{,}61$

Jak już wspomniano, w naszym przypadku zmienna losowa X przyjmuje wartości dodatnie, będziemy więc jedynie wykorzystywać funkcję $w_+(q)$. Stosując jednak zdyskontowaną użyteczność, będziemy też obliczać użyteczność dla wartości ujemnych. Mianowicie wyrażenia $u(\alpha VSP - (1-\alpha)p)$, gdy $\alpha VSP < (1-\alpha)p$ oraz $u((\alpha - 1)p)$. Wtedy oczekiwana użyteczność określona jest wzorem [Heilpern, Dębicka, 2017b]:

$$E(U(X)) = \begin{cases} (\alpha VSP - (1-\alpha)p)^{\beta} + (1-\alpha)^{\beta} B & \alpha \geq \alpha_V \\ (1-\alpha)^{\beta} B - \lambda((1-\alpha)p - \alpha VSP)^{\beta} & \alpha < \alpha_V \end{cases},$$

gdzie $\alpha_V = \dfrac{p}{VSP + p}$, $A_p = \sum_{k=2}^{4}\left(\sum_{i=1}^{k-1} v^i\right) w_{+,k}$, $A_c = \sum_{k=1}^{4} v^k w_{+,k}$ oraz $B = A_c c^{\beta} - \lambda A_p p^{\beta}$.

Niech:

$$\alpha_0 = \frac{p(VSP+p)^{1/(\beta-1)} + B^{1/(\beta-1)}}{(VSP+p)^{\beta/(\beta-1)} + B^{1/(\beta-1)}} \text{ i } \alpha_1 = \frac{B^{1/(\beta-1)} - p(\lambda(VSP+p))^{1/(\beta-1)}}{B^{1/(\beta-1)} - \lambda^{1/(\beta-1)}(VSP+p)^{\beta/(\beta-1)}},$$

wtedy największa wartość oczekiwanej użyteczności jest osiągalna, gdy wartość parametru α równa się 0, α_0 lub α_1 [Dębicka, Heilpern, 2017b].

6. Przykład

Rozpatrzmy przypadek 50-letniego mężczyzny, który zachorował na raka płuc. Przyjmijmy dodatkowo, że założył on polisę w wieku $x = 20$ lat ($l = 30$). Niech świadczenie na wypadek śmierci wynosi $c = 100$ jednostek, wtedy składka $p = 0{,}014817c$. Ponadto przyjmijmy, że stopa procentowa $r = 2\%$, czyli czynnik dyskontujący $v = 0{,}98$.

Przy tych założeniach wartość odsprzedaży VSP zaproponowana przez inwestora spełnia następujące ograniczenia [Dębicka, Heilpern, 2017a]:

$$45{,}297 < VSP < 96{,}727.$$

Na podstawie odpowiednich wielostanowych tablic trwania życia [Dębicka, Zmyślona, 2016] możemy wyznaczyć prawdopodobieństwa przejścia p_{ij}:

$$p_{12} = 0{,}2043 \quad p_{23} = 0{,}5841 \quad p_{34} = 0{,}0594.$$

Wartość oczekiwana przepływów finansowych jest wtedy równa:

$$E(X) = \alpha VSP + 95{,}450(1-\alpha).$$

Gdy wartość odprzedaży 45,297 < *VSP* < 95,450, to optymalnym rozwiązaniem naszego zadania jest $\alpha = 0$, co oznacza, że ubezpieczony charakteryzujący się neutralnym podejściem do ryzyka nie odsprzedaje polisy. Natomiast gdy 95,450 < *VSP* < 96,727, to ubezpieczony odsprzedaje całą polisę, czyli $\alpha = 1$.

Z kolei gdy ubezpieczony ma awersję do ryzyka, to postępując racjonalnie, maksymalizuje oczekiwaną użyteczność opartą w tym przypadku na funkcji użyteczności

$$u_1(x) = (x + 1{,}4817)^{0{,}6} - 1{,}2661.$$

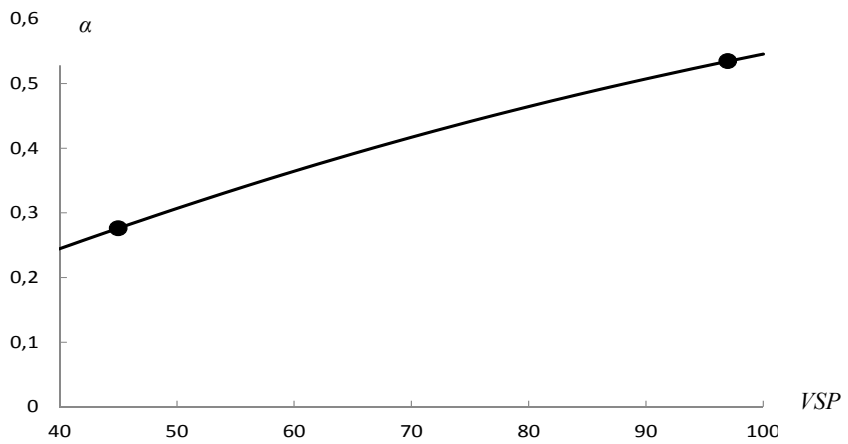
Oczekiwana użyteczność jest wtedy równa

$$E(U(X)) = ((VSP + 1{,}4817)^{0{,}6} + 0{,}4073)\alpha^{0{,}6} + 0{,}9741(101{,}4817 - 100\alpha)^{0{,}6} - 2{,}9065,$$

która największą wartość przyjmuje w punkcie

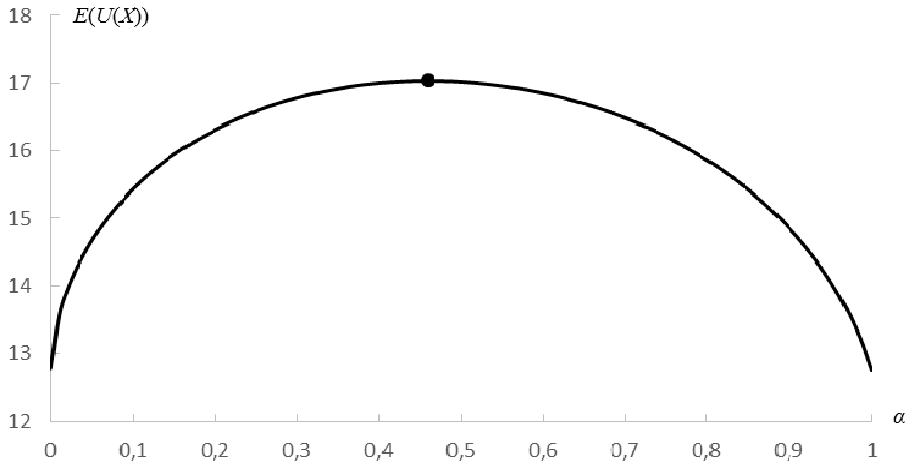
$$\alpha_0 = \frac{0{,}001084}{((VSP + 1{,}4817)^{0{,}6} + 0{,}4073)^{-2{,}5} + 0{,}001068}.$$

Rysunek 6 przedstawia wykres optymalnych wartości parametru α dla poszczególnych dopuszczalnych wartości odsprzedaży *VSP* z zaznaczonymi ograniczeniami.



Rys. 6. Wykres optymalnych wartości α dla różnych dopuszczalnych *VSP*

Wykres wartości oczekiwanej użyteczności $E(U(X))$ dla poszczególnych wartości parametru α i ustalonej wartości odsprzedaży *VSP* = 80 jest zaprezentowany na rys. 7.



Rys. 7. Wykres wartości oczekiwanej użyteczności dla różnych α i $VSP = 80$

Tabela 1. Optymalne wartości parametru α dla różnych wartości VSP i β

Wyszczególnienie		β						
		0,2	**0,4**	**0,6**	**0,8**	**0,9**	**0,98**	**1**
VSP	40	0,5084	0,4055	0,2445	0,0369	0,0006	1,31E-18	0
	45,297	0,5150	0,4237	0,2780	0,0578	0,0016	4,41E-16	0
	50	0,5202	0,4383	0,3068	0,0820	0,0038	4,59E-14	0
	60	0,5299	0,4659	0,3644	0,1524	0,0182	2,54E-10	0
	70	0,5382	0,4896	0,4169	0,2460	0,0663	3,87E-07	0
	80	0,5454	0,5104	0,4644	0,3542	0,1861	0,0002	0
	90	0,5518	0,5288	0,5071	0,4654	0,3926	0,0600	0
	95,450	0,5550	0,5380	0,5286	0,5234	0,5217	0,5207	dowolna α
	96,727	0,5557	0,5401	0,5334	0,5365	0,5513	0,6759	1
	100	0,5575	0,5453	0,5455	0,5691	0,6236	0,9214	1

Zbadajmy teraz wpływ stopnia awersji do ryzyka na wybór strategii postępowania ubezpieczonego na wtórnym rynku ubezpieczeniowym. Parametr β funkcji użyteczności $u_1(x)$ oddaje stopień awersji ubezpieczonego do ryzyka. Im mniejsza jego wartość, tym większa awersja do ryzyka.

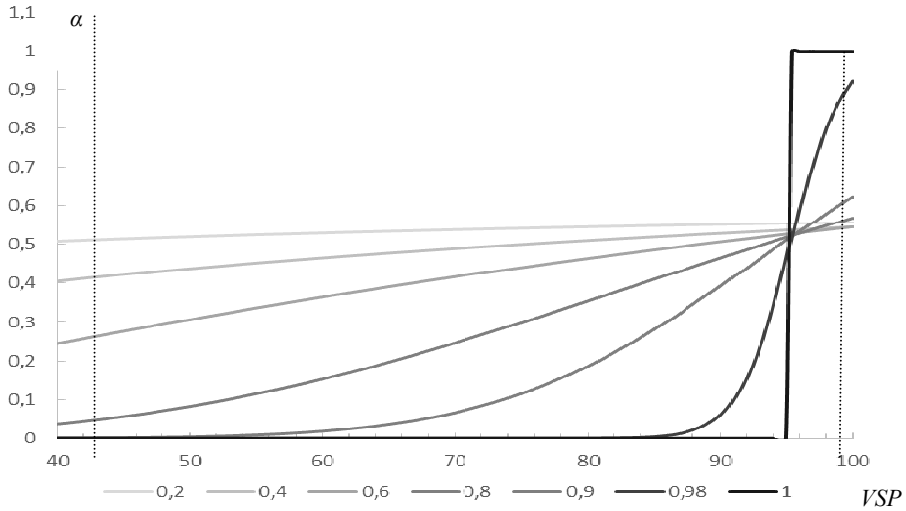
W tabeli 1 oraz na rys. 8 przedstawiono optymalne wartości parametru α dla różnych wartości odsprzedaży VSP oraz wartości parametru β oddającego stopień awersji ubezpieczonego do ryzyka. Widzimy, że dla wartości $VSP < 95{,}45$ większa awersja do ryzyka ubezpieczonego zwiększa wartość optymalnego parametru α, czyli ubezpieczony większą część świadczenia odsprzedaje inwestorowi. Dla większych wartości VSP prawidłowość ta już nie występuje. Wartość $\beta = 1$ odpowiada neutralnemu podejściu do ryzyka. Ubezpieczyciel maksymalizuje wtedy zwykłą wartość oczekiwaną przepływów finansowych.

Załóżmy teraz, że ubezpieczony postępuje na rynku ubezpieczeń zgodnie z teorią RDUE. Oprócz funkcji użyteczności $u_1(x)$ z parametrem $\beta = 0{,}6$ posiada również swoją funkcję zniekształcającą prawdopodobieństwa $w(q)$ z parametrem $\gamma = 0{,}61$. Wtedy oczekiwana użyteczność przepływów finansowych ubezpieczonego wynosi

$$E_w(U(X)) = ((VSP + 1{,}4817)^{0,6} + 0{,}9591)\alpha^{0,6} + 0{,}9655(101{,}4817 - 100\alpha)^{0,6} - 3{,}4475,$$

a optymalna wartość parametru α jest równa

$$\alpha_0 = \frac{0{,}001108}{((VSP + 1{,}4817)^{0,6} + 0{,}9591)^{-2,5} + 0{,}001092}.$$



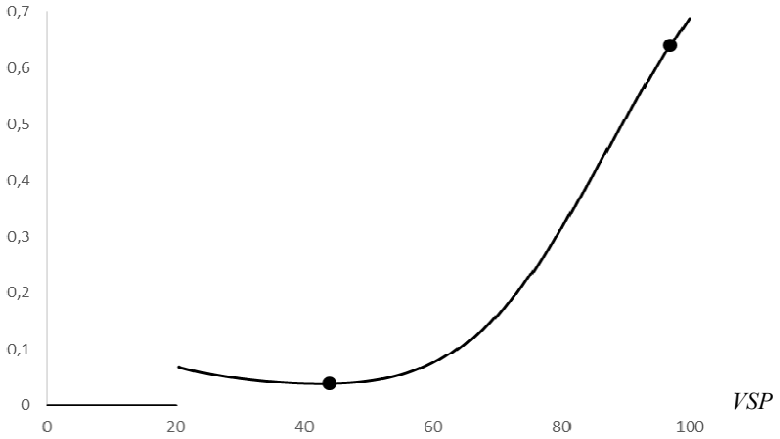
Rys. 8. Wykres optymalnych wartości α dla różnych wartości VSP i β

Zakładając, że postępowanie ubezpieczonego jest zgodne z teorią perspektyw, otrzymujemy następującą postać oczekiwanej użyteczności przepływów finansowych:

$$E_{w+}(U(X)) = \begin{cases} (\alpha VSP - 1{,}4817(1-\alpha))^{0,88} + 53{,}1518(1-\alpha)^{0,88} & \alpha \geq \alpha_V \\ 53{,}1518(1-\alpha)^{0,88} - 2{,}25(1{,}4817(1-\alpha) - \alpha VSP)^{0,88} & \alpha < \alpha_V \end{cases},$$

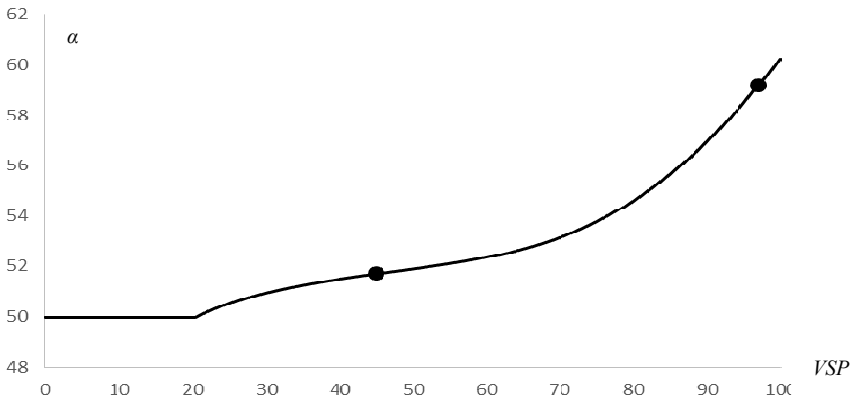
gdzie: $\alpha_V = \dfrac{1{,}4817}{VSP + 1{,}4817}$, funkcją użyteczności jest $u_2(x)$ z parametrem $\beta = 0{,}88$ i $\lambda = 2{,}25$, a funkcją zniekształcającą prawdopodobieństwa – $w(q)$ z $\gamma_+ = 0{,}61$. Rysunek 9 zawiera wykres optymalnych wartości parametru α dla róż-

nych wartości *VSP*, a rys. 10 – optymalne wartości oczekiwanej użyteczności przypływów finansowych.



Rys. 9. Wykres optymalnych wartości α dla różnych wartości *VSP* (CPT)

Wykres na rys. 9 posiada punkt nieciągłości, ale znajduje się on poza obszarem dopuszczalnych wartości *VSP*, w obrębie których jest on funkcją rosnącą, czyli wraz ze wzrostem wartości *VSP* rośnie wartość optymalnej wartości parametru α. Ponadto rosną też optymalne wartości oczekiwanej użyteczności przepływów finansowych (rys. 10).



Rys. 10. Wykres optymalnych wartości $E_{w+}(U(X))$ dla różnych wartości *VSP* (CPT)

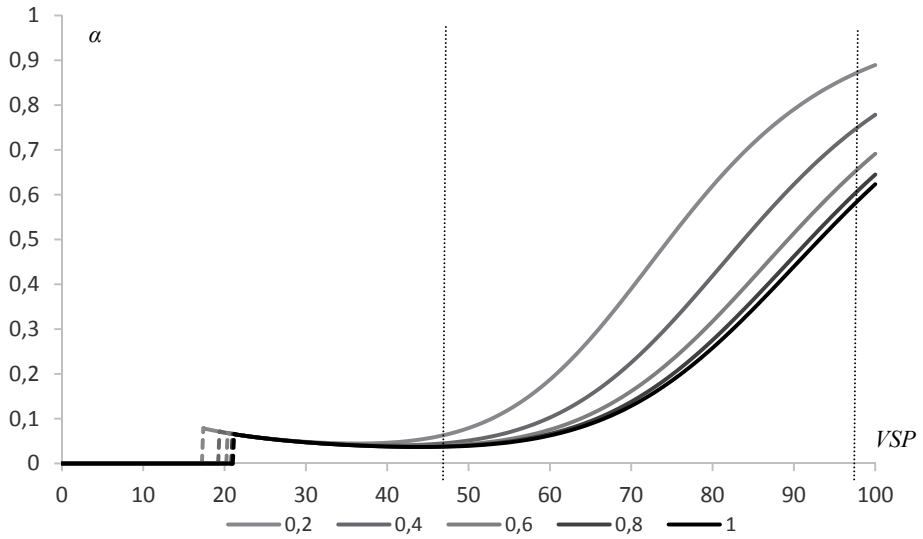
Zbadajmy teraz wpływ parametru γ, oddającego stopień zniekształcenia prawdopodobieństwa, na wartość optymalnego współczynnika α. Wartości tego współczynnika dla różnych wartości *VSP* i γ podane są w tabeli 2 oraz na rys. 11. Widzimy, że im większe zniekształcenie prawdopodobieństwa oraz mniejsza wartość γ, to wartości optymalnego α są większe. Na rys. 11 można zaobserwować punkty nieciągłości wykresów, jednak występują one dla wartości *VSP* poza ich dopuszczalnym przedziałem.

Tabela 2. Optymalne wartości parametru α dla różnych wartości γ

Wyszczególnienie		γ				
		0,2	0,4	0,6	0,8	1
VSP	40	0,0464	0,0404	0,0387	0,0381	0,0379
	45,297	0,0572	0,0429	0,0389	0,0375	0,0370
	50	0,0790	0,0513	0,0432	0,0405	0,0395
	55	0,1209	0,0699	0,0544	0,0492	0,0472
	60	0,1871	0,1025	0,0754	0,0661	0,0625
	65	0,2789	0,1535	0,1100	0,0946	0,0885
	70	0,3901	0,2252	0,1614	0,1379	0,1285
	75	0,5083	0,3158	0,2311	0,1983	0,1849
	80	0,6197	0,4188	0,3173	0,2755	0,2580
	85	0,7150	0,5245	0,4143	0,3657	0,3448
	90	0,7905	0,6232	0,5139	0,4624	0,4395
	95	0,8476	0,7087	0,6081	0,5577	0,5346
	96,727	0,8636	0,7346	0,6383	0,5890	0,5663
	100	0,8894	0,7784	0,6912	0,6450	0,6234

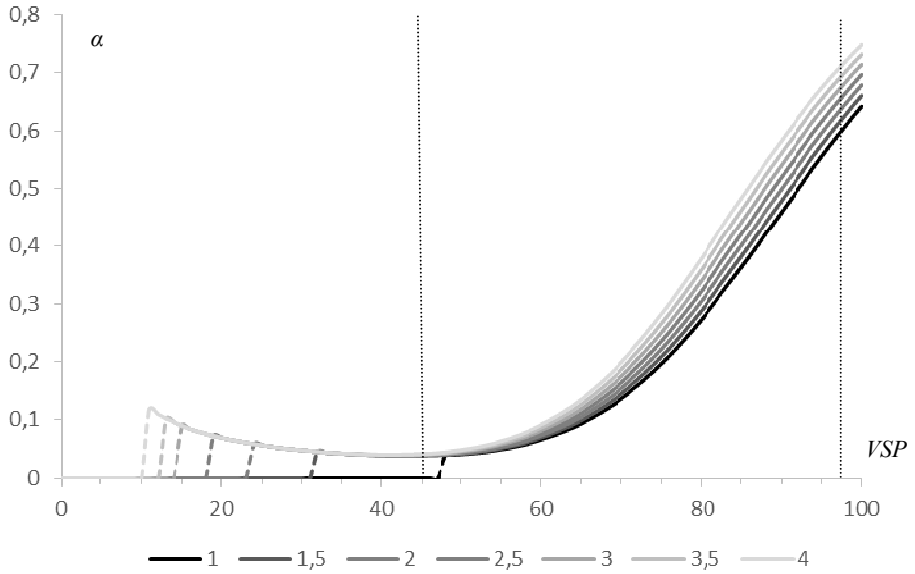
Tabela 3. Optymalne wartości parametru α dla różnych wartości λ

Wyszczególnienie		λ						
		1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
VSP	40	0	0,0383	0,0385	0,0388	0,0391	0,0393	0,0397
	45,297	0	0,0379	0,0385	0,0391	0,0397	0,0404	0,0412
	47,419	0,0383	0,0390	0,0397	0,0405	0,0414	0,0424	0,0435
	50	0,0404	0,0414	0,0425	0,0436	0,0449	0,0463	0,0479
	55	0,0489	0,0508	0,0529	0,0552	0,0577	0,0604	0,0633
	60	0,0657	0,0691	0,0728	0,0768	0,0812	0,0860	0,0912
	65	0,0938	0,0994	0,1056	0,1122	0,1194	0,1271	0,1355
	70	0,1367	0,1454	0,1547	0,1647	0,1754	0,1869	0,1992
	75	0,1965	0,2088	0,2218	0,2356	0,2503	0,2657	0,2821
	80	0,2732	0,2890	0,3056	0,3230	0,3411	0,3599	0,3794
	85	0,3630	0,3817	0,4009	0,4207	0,4410	0,4618	0,4830
	90	0,4594	0,4795	0,5000	0,5206	0,5414	0,5623	0,5832
	95	0,5547	0,5747	0,5947	0,6145	0,6342	0,6537	0,6729
	96,727	0,5861	0,6057	0,6252	0,6445	0,6635	0,6822	0,7006
	100	0,6423	0,6608	0,6790	0,6969	0,7144	0,7315	0,7481



Rys. 11. Wartości optymalnego parametru α dla różnych wartości i *VSP* i γ

Parametr λ oddaje podejście ubezpieczonego do strat, czyli wartości ujemnych. Większa wartość tego parametru wskazuje na większą różnicę w postrzeganiu wartości ujemnych i dodatnich. Wzrost wartości λ powoduje większą wartość optymalnego parametru α, czyli należy odsprzedać większą część polisy ubezpieczeniowej. Również w tym przypadku występują punkty nieciągłości na wykresach przedstawionych na rys. 12. Jednak dla wartości parametru λ bliskich 1, czyli gdy jest słabe rozróżnianie zarówno wartości ujemnych, jak i dodatnich przez ubezpieczonego, punkty nieciągłości występują w przedziale dopuszczalnych wartości *VSP*. Wtedy dla wartości $45{,}297 \leq VSP < 47{,}419$ ubezpieczony nie powinien odsprzedawać nawet żadnej części swojej polisy.



Rys. 12. Wartości optymalnego parametru α dla różnych wartości i *VSP* i γ

Podsumowanie

W artykule rozpatrywano zagadnienie optymalizacji przepływów finansowych na wtórnym rynku ubezpieczeniowym. Ubezpieczony, chory na przewlekłą, nieuleczalną chorobę, odsprzedaje inwestorowi część swoich świadczeń z ubezpieczenia na całe życie. Zagadnienie polega na wydzieleniu optymalnej, z punktu widzenia ubezpieczonego, części polisy. W badaniu uwzględniono podejście ubezpieczyciela do ryzyka i niepewności, biorąc pod uwagę różne teorie podejmowania decyzji. Przeanalizowano wpływ stopnia awersji do ryzyka, różnego traktowania zysków i strat oraz stopnia zniekształcenia prawdopodobieństwa na optymalny wybór części polisy odsprzedanej inwestorowi. W przyszłości autorzy rozpatrzą dodatkowo wpływ wieku ubezpieczonego w momentach: zakupu polisy oraz zachorowania, a także płci ubezpieczonego.

Literatura

Bhuyan V.B. (2009), *Life Markets: Trading Mortality and Longevity Risk with Life Settlements and Linked Securities*, Wiley, New York.

Denneberg D. (1994), *Lectures on Non-additive Measure and Integral*, Kluwer, Boston.

Dębicka J., Heilpern S. (2017a), *Investor's Expected Profit from Viatical Settlements*, 20-th AMSE. Applications of Mathematics in Economics. International Scientific Conference: Szklarska Poręba, Wroclaw University Press, http://www.amse.ue.wroc.pl/papers/2017/Debicka_Heilpern.pdf (dostęp: 20.08.2017).

Dębicka J., Heilpern S. (2017b), *The Optimization of Insurance Contracts in the Viatical Markets* (nieopublikowany).

Dębicka J., Zmyślona B. (2016), *Construction of Multistate Life Tables for Critical Illnes Insurance – Influence of Age and Sex on the Incidence of Health Inequalities*, „Śląski Przegląd Statystyczny", nr 14(20), s. 41-59.

Gatzert N. (2010), *The Secondary Market for Life Insurance in the United Kingdom, Germany, and the United States: Comparison and Overview*, "Risk Management and Insurance Review", No. 13(2), s. 279-301.

Heilpern S. (2004), *A Rank-dependent Generalization of Zero Utility Principle*, "Insurance: Mathematics and Economics", Vol. 33, s. 67-73.

Hey J.D. (2003), *Intermediate Microeconomics: People are Different*, McGraw-Hill, London.

Kahneman D., Tversky A. (1979), *Prospect Theory: A Analysis of Decision Under Risk*, "Econometrica", Vol. 47, s. 313-327.

Neumann J. von, Morgenstern O. (1944), *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton Univesity Press, Princeton.

Quiggin J. (1982), *A Theory of Anticipated Utility*, "Journal of Economic Behavior and Organization", Vol. 3, s. 323-343.

Samuelson P.A. (1937), *A Note on Measurement of Utility*, "Review of Economic Studies", Vol. 4(2), s. 155-161.

Tversky A., Kahneman D. (1992), *Advances in Prospect Theory: Cumulative Representation of Uncertainty*, "Journal of Risk and Uncertainty", Vol. 5, s. 297-323.

VIATICAL INSURANCE MARKET – OPTIMIZATION PROBLEM

Summary: The paper is devoted to the optimization problem on the viatical insurence market from the insured point of view. The insured is terminally ill and he resell the part of his policy to the investor to obtain finance for treatment. The task is to select this part in such a way as to maximize the expected amount of available funds. We assume, that the insured acts rationally on the market, taking into account their approach to risk. The multistate model and the different theories of the decision-making under risk and uncertainty: the Utility Theory, the Rank-Dependent Expected Utility Theory and the Prospect Theory are used in the paper. The influence of the values of the utility function parameter and the parameter of function that distorts the probability on the values of the optimal resale parameter α, when the insured follows the prospect theory is studied, too.

Keywords: viatical market, multistate model, utility, rank-dependent utility, cumulative prospect theory.