Uniwersytet
Ekonomiczny
w Katowicach

Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe
Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach
ISSN 2083-8611 Nr 298 · 2016

Współczesne Finanse 7

Krzysztof Piasecki

Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu
Wydział Informatyki i Gospodarki Elektronicznej
Katedra Badań Operacyjnych
k.piasecki@ue.poznan.pl

O INTUICYJNIE ROZMYTYCH REKOMENDACJACH INWESTYCYJNYCH*

Streszczenie: Stopa zwrotu została przestawiona w artykule jako intuicyjnie rozmyty zbiór probabilistyczny. W takim przypadku oczekiwana stopa zwrotu jest wyznaczona za pomocą intuicyjnie rozmytego zbioru w przestrzeni liczb rzeczywistych. Ten wynik jest teoretyczną przesłanką dla nowych strategii inwestycyjnych. Wszystkie te strategie są rezultatem porównania intuicyjnie rozmytego indeksu zysku i pewnej granicznej wartości. W ten sposób otrzymujemy intuicyjnie rozmyte rekomendacje inwestycyjne. Kryteria równowagi finansowej są szczególnymi przypadkami porównań indeksu zysku oraz wartości granicznej. W pracy uogólniono kryteria: Sharpe'a, Jensena i Treynora. Ponadto do przypadku intuicyjnie rozmytego oczekiwanego zwrotu uogólniono kryteria bezpieczeństwa: Roya, Kataoka i Telsera. Uzyskane wyniki pokazują, że proponowana teoria jest przydatna w praktyce inwestycyjnej.

Słowa kluczowe: nieprecyzyjna stopa zwrotu, rekomendacja inwestycyjna, intuicyjny zbiór rozmyty.

Wprowadzenie

Podstawowym przedmiotem rozważań analizy kapitałowej jest stopa zwrotu. Jest ona wyznaczana za pomocą wartości bieżącej (PV) i przewidywanej wartości przyszłej (FV). W zgodzie z tezą o niepewności [Kaplan, Barish, 1967; Mises, 1962], każdy przyszły przepływ finansowy jest niepewny. Z tego powodu FV jest przedstawiana jako zmienna losowa. PV jest identyfikowana z teraźniejszym

* Projekt został sfinansowany ze środków Narodowego Centrum Nauki przyznanych na podstawie decyzji numer DEC-2012/05/B/HS4/03543.

ekwiwalentem płatności dostępnej w niewcześniejszym ustalonym momencie czasu. Z tej przyczyny PV zaczęła być szacowana jako wartość nieprecyzyjna.

Propozycja przedstawienia PV, nieprecyzyjnie oszacowanej jako liczby rozmytej, jest już dobrze ugruntowaną ideą. Przekrojowy przegląd literatury poświęconej tej tematyce znaleźć można np. w: [Piasecki, 2011a]. Tam też wykazano, że dla dowolnych rozmytej PV i losowej FV stopa zwrotu jest opisana za pomocą rozmytego zbioru probabilistycznego. Możliwości zastosowania tak oszacowanych stóp zwrotu do podejmowania decyzji inwestycyjnych opisano w: [Piasecki, 2011a, 2011b, 2014].

K. Piasecki [2013] uzasadnia na gruncie ekonomii przykład PV oszacowanej nieprecyzyjnie jako intuicyjny zbiór rozmyty (IFS[1]). Konsekwencją tego jest przedstawienie takiej stopy zwrotu, która jest wyznaczana z zastosowaniem intuicyjnej rozmytej PV i losowej FV [Piasecki, 2015a, 2015b]. Wykazano m.in., że tak wyznaczona stopa zwrotu jest probabilistycznym IFS [Zhang, Jia, Jiang, 2009]. Każdą stopę zwrotu daną jako probabilistyczny IFS nazywać będziemy intuicyjnie rozmytą stopą zwrotu (IFRR[2]). Na kolejnym przykładzie IFRR [Echaust, Piasecki, 2016] uzasadniono sugestię, że w modelu Blacka-Littermana [1990] stopa zwrotu *a posteriori* może być wyznaczona jako IFRR. K. Piasecki [2015a, 2015b] pokazał, że oczekiwana IFRR jest IFS.

K. Piasecki [2014] przedstawia strategie inwestycyjne determinowane przez oczekiwaną rozmytą stopę zwrotu. Wynikiem stosowania takiej strategii było przypisanie każdemu instrumentowi finansowemu nieprecyzyjnej rekomendacji inwestycyjnej. Wyniki zostaną w tym artykule uogólnione do przypadku oczekiwanej IFRR.

1. Wybrane elementy teorii IFS

W celu nadania dalszym rozważaniom jednoznacznego charakteru, zostaną przedstawione wybrane podstawowe pojęcia teorii IFS. Punktem odniesienia do tego opisu jest rodzina $\mathcal{F}(\mathbb{X})$ wszystkich rozmytych podzbiorów przestrzeni $\mathbb{X}$. Każdy podzbiór rozmyty $A \in \mathcal{F}(\mathbb{X})$ jest opisany za pomocą swej funkcji przynależności $\mu_A \in [0,1]^{\mathbb{X}}$. W ujęciu logik wielowartościowych wartość $\mu_A(x)$ funkcji przynależności jest interpretowana jako wartość logiczna zdania $x \in A$.

[1] Ang. *Intuitionistic Fuzzy Set*.
[2] Ang. *Intuitionistic Fuzzy Return Rate*.

K. Atanassov oraz S. Stoeva [1985] zdefiniowali pojęcie „intuicyjnego zbioru rozmytego (IFS) A" jako zbioru trójek uporządkowanych:

$$A = \{(x, \mu_A(x), \nu_A(x)) : x \in \mathbb{X}\} \tag{1.1}$$

gdzie funkcja wykluczenia $\nu_A \epsilon [0,1]^{\mathbb{X}}$ spełnia tożsamościowo warunek:

$$\nu_A(x) \leq 1 - \mu_A(x) \tag{1.2}$$

W ujęciu logik wielowartościowych wartość $\nu_A(x)$ funkcji wykluczenia jest interpretowana jako wartość logiczna zdania $x \notin A$. Za pomocą symbolu $\mathcal{I}(\mathbb{X})$ oznaczamy rodzinę wszystkich IFS przestrzeni $\mathbb{X}$.

Korzystając z określonych powyżej funkcji przynależności i wykluczenia, możemy teraz za pomocą tożsamości:

$$\pi_A(x) = 1 - \mu_A(x) - \nu_A(x) \tag{1.3}$$

określić funkcję nierozstrzygnięcia $\pi_A \in [0,1]^{\mathbb{X}}$. Wartość $\pi_A(x)$ określa stopień naszego niezdecydowania, co do oceny wzajemnych relacji pomiędzy elementem $x \in \mathbb{X}$, a $A \in \mathcal{I}(\mathbb{X})$. Z tej przyczyny funkcja nierozstrzygnięcia π_A może być interpretowana jako obraz niepewności w ujęciu F.H. Knighta [1921].

Dla dowolnych $A, B \in \mathcal{I}(\mathbb{R})$ potrzebne działania teoriomnogościowe są zdefiniowane w następujący sposób:

$$A^C = \{(x, \nu_A(x), \mu_A(x)) : x \in \mathbb{X}\} \tag{1.4}$$

$$A \cap B = \{(x, \mu_A(x) \wedge \mu_B(x), \nu_A(x) \vee \nu_B(x)) : x \in \mathbb{X}\} \tag{1.5}$$

Dla przestrzeni liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ dowolny IFS $A \in \mathcal{I}(\mathbb{R})$ nazywać będziemy intuicyjnym oszacowaniem. Na iloczynie kartezjańskim $\mathcal{I}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ definiujemy relację $X \succcurlyeq Y$, co czytamy:

Intuicyjne oszacowanie X jest większe równe od liczby rzeczywistej Y. (1.6)

Relacja ta jest intuicyjnie rozmytym preporządkiem określonym przez swe funkcję przynależności $\mu_{\succcurlyeq} \in [0,1]^{\mathcal{I}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}}$ i funkcję wykluczenia $\nu_{\succcurlyeq} \in [0,1]^{\mathcal{I}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}}$, wyznaczone za pomocą tożsamości:

$$\mu_{\succcurlyeq}(X, Y) = \sup\{\mu_X(u) : u \geq Y\} \tag{1.7}$$

$$\nu_{\succcurlyeq}(X, Y) = \inf\{\nu_X(u) : u \geq Y\} \tag{1.8}$$

W podobny sposób, na iloczynie kartezjańskim $\mathcal{I}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ definiujemy relację $X \preccurlyeq Y$, co czytamy:

Intuicyjne oszacowanie X jest mniejsze równe od liczby rzeczywistej Y. (1.9)

Relacja ta jest intuicyjnie rozmytym preporządkiem określonym przez swe funkcję przynależności $\mu_{\preccurlyeq} \in [0,1]^{\mathcal{I}(\mathbb{R})\times\mathbb{R}}$ i funkcję wykluczenia $\nu_{\preccurlyeq} \in [0,1]^{\mathcal{I}(\mathbb{R})\times\mathbb{R}}$, wyznaczone za pomocą tożsamości:

$$\mu_{\preccurlyeq}(X,Y) = \sup\{\mu_X(u): u \leq Y\} \tag{1.10}$$

$$\nu_{\preccurlyeq}(X,Y) = \inf\{\nu_X(u): u \leq Y\} \tag{1.11}$$

2. Intuicyjne oszacowanie oczekiwanej stopy zwrotu

Dla ustalonego horyzontu czasowego $t > 0$ inwestycji podstawową charakterystyką korzyści płynących z posiadania wybranego instrumentu finansowego jest stopa zwrotu $\tilde{r}: \Omega = \{\omega\} \longrightarrow \mathbb{R}$, gdzie zbiór Ω jest zbiorem elementarnych stanów rynku finansowego. Wartość tej stopy jest obarczona ryzykiem niepewności, co do przyszłego stanu rzeczy. W praktyce analizy rynków finansowych przyjęto opisywanie ryzyka niepewności za pomocą rozkładu prawdopodobieństwa stopy zwrotu $\tilde{r}_t$ wyznaczonego przez dystrybuantę $F_r: \mathbb{R} \longrightarrow [0;1]$. Z drugiej strony, dystrybuanta F_r w jednoznaczny sposób określa rozkład prawdopodobieństwa $P: 2^{\Omega} \supset \tilde{r}^{-1}(\mathcal{B}) \longrightarrow [0;1]$, gdzie symbol $\mathcal{B}$ oznacza najmniejsze σ-ciało borelowskie zawierające wszystkie przedziały prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$. Rozważanemu instrumentowi finansowemu przypisujemy IFRR $\mathcal{R}$ określoną za pomocą swych funkcji przynależności $\rho_{\mathcal{R}} \in [0;1]^{\mathbb{R}\times\Omega}$ i funkcji wykluczenia $\varphi_{\mathcal{R}} \in [0;1]^{\mathbb{R}\times\Omega}$. Przykłady takich IFRR znajdziemy w wielu publikacjach [Piasecki, 2015a, 2015b; Echaust, Piasecki, 2016]. Oczekiwana IFRR jest IFS:

$$R = \{(x, \rho_R(x), \varphi_R(x)): x \in \mathbb{R}\} \tag{2.1}$$

gdzie funkcje przynależności i wykluczenia są określone przez tożsamości:

$$\rho_R(x) = \int_{\Omega} \rho_{\mathcal{R}}(x,\omega)dP \tag{2.2}$$

$$\varphi_R(x) = \int_{\Omega} \varphi_{\mathcal{R}}(x,\omega)dP \tag{2.3}$$

3. Inwestycyjne rekomendacje zależne od oczekiwanej stopy zwrotu

Zalecenie inwestycyjne to porada udzielona inwestorowi przez doradców. Dla wygody, te zalecenia mogą być wyrażone przy pomocy standardowych porad. Doradcy mogą używać różnych terminologii i różnej liczby słów tworzących tezaurus porad [www 1]. W tym artykule naszą uwagę skupimy na 5-wyrazowym tezaurusie porad. Zastosowane tutaj zostanie podejście, które zaproponował

K. Piasecki [2014]. Warto zauważyć, że to samo podejście w innym kontekście inwestycyjnym zastosowali P. Nowak i M. Romaniuk [2015]. Mowa o następującym tezaurusie porad:

1. **Kupuj** sugerująca, że rozważany papier wartościowy jest istotnie niedoceniony.
2. **Doważaj** sugerująca, że rozważany papier wartościowy jest niedoceniony.
3. **Trzymaj** sugerująca, że oceniany papier wartościowy jest właściwie wyceniony.
4. **Odważaj** sugerująca, że rozważany papier wartościowy jest przeceniony.
5. **Sprzedaj** sugerująca, że rozważany papier wartościowy jest istotnie przeceniony.

W tej sytuacji tezaurus porad tworzy zbiór:

$$\mathbb{A} = \{\mathcal{B}, \mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{R}, \mathcal{S}\} \tag{3.1}$$

gdzie poszczególne element oznaczają:

$\mathcal{B}$ poradę **Kupuj** (**B**uy)

$\mathcal{A}$ poradę **Doważaj** (**A**ccumulate)

$\mathcal{H}$ poradę **Trzymaj** (**H**old)

$\mathcal{R}$ poradę **Odważaj** (**R**educe)

$\mathcal{S}$ poradę **Sprzedaj** (**S**ell)

Weźmy pod uwagę ustalony papier wartościowy $\check{S} \in \mathbb{Y}$ z oczekiwaną stopą zwrotu $r_s \in \mathbb{R}$, gdzie symbol $\mathbb{Y}$ oznacza zbiór rozważanych instrumentów finansowych. Wtedy kryterium kompetentnego wyboru rekomendacji może być przedstawione jako porównanie wartości $g(r_s)$ i $\hat{G}$ zdefiniowanych następująco:

– $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest indeksem zysku zdefiniowanym jako merytorycznie uzasadniona funkcja rosnąca,
– $\hat{G}$ jest merytorycznie uzasadnioną wartością graniczną.

Posługując się tym kryterium, definiujemy funkcję wyboru porad $\Lambda: \mathbb{Y} \longrightarrow 2^{\mathbb{A}}$ następująco:

$$\begin{cases} \mathcal{B} \in \Lambda(\check{S}) \Leftrightarrow g(r_s) > \hat{G} \Leftrightarrow g(r_s) \geq \hat{G} \wedge \neg\, g(r_s) \leq \hat{G}, \\ \mathcal{A} \in \Lambda(\check{S}) \Leftrightarrow g(r_s) \geq \hat{G}, \\ \mathcal{H} \in \Lambda(\check{S}) \Leftrightarrow g(r_s) = \hat{G} \Leftrightarrow g(r_s) \geq \hat{G} \wedge\, g(r_s) \leq \hat{G}\,, \\ \mathcal{R} \in \Lambda(\check{S}) \Leftrightarrow g(r_s) \leq \hat{G} \\ \mathcal{S} \in \Lambda(\check{S}) \Leftrightarrow g(r_s) < \hat{G} \Leftrightarrow \neg\, g(r_s) \geq \hat{G} \wedge g(r_s) \leq \hat{G}. \end{cases} \tag{3.2}$$

W ten sposób wyznaczamy podzbiór $\Lambda(\check{S})$ wszystkich porad stanowiących rekomendację inwestycyjną wystawioną papierowi wartościowemu $\check{S}$. Taka rekomendacja może być przydatnym punktem wyjścia szczegółowej strategii zarządzania portfelem aktywów finansowych. Z drugiej strony, słabym punktem zaproponowanej funkcji wyboru jest pomijanie rezultatów analizy fundamentalnej i wpływu czynników behawioralnych. Analizując powyższą funkcję wyboru, łatwo można dostrzec brak silnego rozgraniczenia pomiędzy poradami **Kupuj** i **Doważaj** oraz pomiędzy **Sprzedaj** i **Odważaj**. Uzasadnienia sposobu rozróżniania tych porad możemy szukać na gruncie analizy fundamentalnej i pomiędzy behawioralnymi aspektami procesów inwestycyjnych.

4. Inwestycyjne rekomendacje zależne od oczekiwanej IFRR

K. Piasecki oraz K. Echaust [Piasecki, 2015a, 2015b; Echaust, Piasecki, 2016] pokazali, że IFRR może być zależna od fundamentalnych i behawioralnych czynników. Stanowi to przesłankę do przedstawienia modelu rekomendacji inwestycyjnej zależnej od IFRR. Załóżmy, że zwrot z rozpatrywanego papieru wartościowego $\check{S} \in \mathbb{Y}$ jest reprezentowany przez oczekiwaną IFRR $R_s \in \mathcal{I}(\mathbb{R})$.

W pierwszym kroku poszerzamy dziedzinę indeksu zysku do zbioru $\mathcal{I}(\mathbb{R})$. Zgodnie z zasadą rozszerzenia Zadeha, dla dowolnej oczekiwanej IFRR R opisanej przez swe funkcje przynależności $\rho_R \in [0;1]^{\mathbb{R}}$ i wykluczenia $\varphi_R \in [0;1]^{\mathbb{R}}$, wartość indeksu zysku $g(R)$ jest opisana przez funkcję przynależności $\gamma \in [0;1]^{\mathbb{R}}$ i funkcję wykluczenia $\delta \in [0;1]^{\mathbb{R}}$. Funkcje te są opisane za pomocą tożsamości:

$$\gamma(x) = \sup\{\rho_R(r): x = g(r)\} = \rho_R\left(g^{-1}(x)\right), \tag{4.1}$$

$$\delta(x) = \inf\{\varphi_R(r): x = g(r)\} = \varphi_R\left(g^{-1}(x)\right), \tag{4.2}$$

W ten sposób zdefiniowaliśmy intuicyjnie rozmyty indeks zysku $g: \mathcal{I}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{I}(\mathbb{R})$.

W drugim kroku funkcję wyboru porad Λ uogólniamy do przypadku, gdy indeks zysku jest funkcją rozmytej IFRR. Zgodnie z regułą rozszerzenia Zadeha, rekomendacja inwestycyjna $\Lambda(\check{S})$ wystawiona papierowi wartościowemu $\check{S}$ jest IFS określonym przez funkcję przynależności $\lambda(\cdot\,|\check{S}) \in [0;1]^{\mathbb{R}}$ i funkcję wykluczenia $\kappa(\cdot\,|\check{S}) \in [0;1]^{\mathbb{R}}$. Zgodnie z (1.4), (1.5), (1.7), (1.8), (1.10), (1.11), (3.2), (4.1) i (4.2) funkcja przynależności $\lambda(\cdot\,|\check{S})$ określona jest za pomocą zależności:

$$\lambda(\mathcal{B}|\check{S}) = \sup\{\gamma(x): x \geq \check{G}\} \wedge \inf\{\delta(x): x \leq \check{G}\} \tag{4.3}$$

$$\lambda(\mathcal{A}|\check{S}) = \sup\{\gamma(x): x \geq \check{G}\} = \sup\{\rho_R\left(g^{-1}(x)\right): x \geq \check{G}\} \tag{4.4}$$

$$\lambda(\mathcal{H}|\check{S}) = \sup\{\gamma(x): x \geq \check{G}\} \wedge \sup\{\gamma(x): x \leq \check{G}\} \tag{4.5}$$

$$\lambda(\mathcal{R}|\check{S}) = \sup\{\gamma(x): x \leq \check{G}\} = \sup\{\rho_R\left(g^{-1}(x)\right): x \leq \check{G}\} \tag{4.6}$$

$$\lambda(\mathcal{B}|\check{S}) = \sup\{\gamma(x): x \geq \check{G}\} \wedge \inf\{\delta(x): x \leq \check{G}\} \tag{4.7}$$

W podobny sposób określamy funkcję wykluczenia $\kappa(\cdot\,|\breve{S})$. Mamy tutaj następujące zależności:

$$\kappa(\mathcal{B}|\breve{S}) = \inf\{\delta(x): x \geq \breve{G}\} \vee \sup\{\gamma(x): x \leq \breve{G}\} \tag{4.8}$$

$$\kappa(\mathcal{A}|\breve{S}) = \inf\{\delta(x): x \geq \breve{G}\} = \inf\{\varphi_R(g^{-1}(x)): x \geq \breve{G}\} \tag{4.9}$$

$$\kappa(\mathcal{H}|\breve{S}) = \inf\{\delta(x): x \geq \breve{G}\} \vee \inf\{\delta(x): x \leq \breve{G}\} \tag{4.10}$$

$$\kappa(\mathcal{R}|\breve{S}) = \inf\{\delta(x): x \leq \breve{G}\} = \inf\{\varphi_R(g^{-1}(x)): x \leq \breve{G}\} \tag{4.11}$$

$$\kappa(\mathcal{B}|\breve{S}) = \inf\{\delta(x): x \geq \breve{G}\} \vee \sup\{\gamma(x): x \leq \breve{G}\} \tag{4.12}$$

W ten sposób wyznaczamy funkcję wyboru porad $\widetilde{\Lambda}: \mathbb{Y} \longrightarrow \mathcal{I}(\mathbb{A})$. Wartość $\lambda(A|\breve{S})$ jest interpretowana jako stopień rekomendacji porady $A \in \mathbb{A}$ dla papieru wartościowego $\breve{S} \in \mathbb{Y}$. Wartość $\kappa(A|\breve{S})$ jest interpretowana jako stopień odrzucenia porady $A \in \mathbb{A}$ dla papieru wartościowego $\breve{S} \in \mathbb{Y}$. Każda z tych wartości opisuje rekomendację inwestycyjną wystawioną instrumentowi finansowemu $\breve{S} \in \mathbb{Y}$ przez doradcę. Inwestor część odpowiedzialności za podejmowane przez siebie inwestycje przerzuca na doradców lub na stosowane narzędzia analityczne. Z tego powodu inwestor w znakomitej części ogranicza swoje wybory decyzji inwestycyjnych do alternatyw rekomendowanych przez doradców lub stosowane instrumentarium analityczne. Dzięki temu inwestor minimalizuje ryzyko osobistej odpowiedzialności za podjętą decyzję finansową. Szerzej ten problem opisał K. Piasecki [1990]. Oznacza to, że ostatecznymi kryteriami podjęcia decyzji inwestycyjnej mogą być kryteria maksymalizacji wartości funkcji przynależności $\lambda(\cdot\,|\breve{S})$ i minimalizacji wartości funkcji wykluczenia $\kappa(\cdot\,|\breve{S})$. Zauważmy, że:

$$\lambda(\mathcal{B}|\breve{S}) = \lambda(\mathcal{A}|\breve{S}) \wedge \kappa(\mathcal{R}|\breve{S}) \tag{4.13}$$

$$\lambda(\mathcal{H}|\breve{S}) = \lambda(\mathcal{A}|\breve{S}) \wedge \lambda(\mathcal{R}|\breve{S}) \tag{4.14}$$

$$\lambda(\mathcal{B}|\breve{S}) = \lambda(\mathcal{R}|\breve{S}) \wedge \kappa(\mathcal{A}|\breve{S}) \tag{4.15}$$

$$\kappa(\mathcal{B}|\breve{S}) = \kappa(\mathcal{A}|\breve{S}) \vee \lambda(\mathcal{R}|\breve{S}) \tag{4.16}$$

$$\kappa(\mathcal{H}|\breve{S}) = \kappa(\mathcal{A}|\breve{S}) \vee \kappa(\mathcal{R}|\breve{S}) \tag{4.17}$$

$$\kappa(\mathcal{B}|\breve{S}) = \kappa(\mathcal{R}|\breve{S}) \vee \lambda(\mathcal{A}|\breve{S}) \tag{4.18}$$

To dowodzi, że znajomość jedynie wartości $\lambda(\mathcal{A}|\breve{S}), \lambda(\mathcal{R}|\breve{S}), \kappa(\mathcal{A}|\breve{S})$, $\kappa(\mathcal{R}|\breve{S})$ wystarcza do wyznaczenia intuicyjnie rozmytej rekomendacji inwestycyjnej. Z tego powodu, badając specyficzne metody wystawiania rekomendacji, będziemy określać jedynie te cztery wartości.

Zastosowanie oczekiwanej IFRR pozwoliło na precyzyjne rozgraniczenie pomiędzy poradami **Kupuj** a **Doważaj** oraz pomiędzy poradami **Sprzedaj** a **Odważaj**. W kolejnych dwóch sekcjach zostaną przedstawione przykłady procedur wyznaczania intuicyjnie rozmytych rekomendacji inwestycyjnych. Za każdym razem są to uogólnienia dobrze znanych z literatury przedmiotu procedur wyznaczania rekomendacji inwestycyjnych [np. Piasecki, 2007].

5. Kryteria równowagi finansowej

Każdy model równowagi finansowej jest dany jako porównanie oczekiwanego zwrotu z rozpatrywanego instrumentu finansowego $\breve{S}$ z oczekiwanym zwrotem z portfela rynkowego $\breve{M}$.

5.1. Kryterium Sharpe'a

W podrozdziale tym dowolny papier wartościowy $\breve{Y} \in \mathbb{Y}$ jest reprezentowany przez parę $\left(r_y, \sigma_y^2\right) \in \mathbb{R}^2$, gdzie:

- r_y jest oczekiwaną stopę zwrotu z $\breve{Y}$,
- σ_y^2 jest wariancją stopy zwrotu z $\breve{Y}$.

Odchylenie standardowe σ_y jest tutaj traktowane jako ilościowa ocena ryzyka obarczającego instrument finansowy $\breve{Y} \in \mathbb{Y}$. Zakładamy, że istnieje reprezentowany przez parę $(r_0, 0)$ instrument wolny od ryzyka. Jeśli rozpatrywany papier wartościowy $\breve{S}$ jest reprezentowany przez parę (r_s, σ_s^2), to W.F. Sharpe [1966] definiuje wartość indeksu zysku $g(r_s)$ jako określoną przez zależność:

$$g(r_s) = \frac{r_s - r_0}{\sigma_s} \tag{5.1}$$

jednostkową premię za ryzyko. Portfel rynkowy $\breve{M}$ jest reprezentowany przez parę (r_M, σ_M^2). Wtedy wartość graniczna $\hat{G}$ jest definiowana jako jednostkowa premia za ryzyko portfela rynkowego określona przez zależność:

$$\hat{G} = \frac{r_M - r_0}{\sigma_M}. \tag{5.2}$$

Rozważmy teraz przypadek, kiedy oczekiwany zwrot z papieru wartościowego $\breve{S}$ jest reprezentowany przez oczekiwaną IFRR $R_S \in \mathcal{I}(\mathbb{R})$, opisaną przez swe funkcje przynależności $\rho_S \in [0;1]^{\mathbb{R}}$ i wykluczenia $\varphi_S \in [0;1]^{\mathbb{R}}$. Zgodnie z (4.4), (4.6), (4.9) i (4.11):

$$\lambda\left(\mathcal{A}\middle|\breve{S}\right) = \sup\left\{\rho_S(\sigma_s \cdot x + r_0) : x \geq \frac{r_M - r_0}{\sigma_M}\right\} \tag{5.3}$$

$$\lambda(\mathcal{R}|\breve{S}) = \sup\left\{\rho_S(\sigma_S \cdot x + r_0) : x \leq \frac{r_M - r_0}{\sigma_M}\right\} \tag{5.4}$$

$$\kappa(\mathcal{A}|\breve{S}) = \inf\left\{\varphi_S(\sigma_S \cdot x + r_0) : x \geq \frac{r_M - r_0}{\sigma_M}\right\} \tag{5.5}$$

$$\kappa(\mathcal{R}|\breve{S}) = \inf\left\{\varphi_S(\sigma_S \cdot x + r_0) : x \leq \frac{r_M - r_0}{\sigma_M}\right\} \tag{5.6}$$

Wartości $\lambda(\mathcal{B}|\breve{S})$, $\lambda(\mathcal{H}|\breve{S})$, $\lambda(\mathcal{B}|\breve{S})$, $\kappa(\mathcal{B}|\breve{S})$, $\kappa(\mathcal{H}|\breve{S})$, $\kappa(\mathcal{B}|\breve{S})$ są wyznaczone odpowiednio za pomocą zależności (4.13)-(4.18).

5.2. Kryterium Jensena

Na rynku kapitałowym obserwujemy wolną od ryzyka stopę zwrotu $r_0 \in \mathbb{R}$ i oczekiwaną stopę zwrotu $r_M \in \mathbb{R}$ z portfela rynkowego $\breve{M}$. Papier wartościowy $\breve{S}$ jest reprezentowany przez parę (r_s, β_s), gdzie β_s jest współczynnikiem kierunkowym modelu CAPM przypisanemu $\breve{S}$. Portfel rynkowy $\breve{M}$ jest reprezentowany przez parę (r_M, σ_M^2). M.C. Jensen [1969] definiuje wartość indeksu zysku $g(r_s)$ jako określoną przez zależność:

$$g(r_s) = r_s - \beta_s \cdot (r_M - r_0) \tag{5.7}$$

premię za nadwyżkę ryzyka. Wtedy wartość graniczna $\hat{G}$ jest definiowana jako wolna od ryzyka stopa zwrotu:

$$\hat{G} = r_0 \tag{5.8}$$

Rozważmy przypadek, kiedy oczekiwany zwrot z papieru wartościowego $\breve{S}$ jest reprezentowany przez oczekiwaną IFRR $R_s \in \mathcal{I}(\mathbb{R})$, opisaną przez swe funkcje przynależności $\rho_S \in [0;1]^{\mathbb{R}}$ i wykluczenia $\varphi_S \in [0;1]^{\mathbb{R}}$. Zgodnie z (4.4), (4.6), (4.9) i (4.11):

$$\lambda(\mathcal{A}|\breve{S}) = \sup\{\rho_s(r) : r - \beta_s \cdot (r_M - r_0) \geq r_0\} \tag{5.9}$$

$$\lambda(\mathcal{R}|\breve{S}) = \sup\{\rho_s(r) : r - \beta_s \cdot (r_M - r_0) \leq r_0\} \tag{5.10}$$

$$\kappa(\mathcal{A}|\breve{S}) = \inf\{\varphi_s(r) : r - \beta_s \cdot (r_M - r_0) \geq r_0\} \tag{5.11}$$

$$\kappa(\mathcal{R}|\breve{S}) = \inf\{\varphi_s(r) : r - \beta_s \cdot (r_M - r_0) \leq r_0\} \tag{5.12}$$

Wartości $\lambda(\mathcal{B}|\breve{S})$, $\lambda(\mathcal{H}|\breve{S})$, $\lambda(\mathcal{B}|\breve{S})$, $\kappa(\mathcal{B}|\breve{S})$, $\kappa(\mathcal{H}|\breve{S})$, $\kappa(\mathcal{B}|\breve{S})$ są wyznaczone odpowiednio za pomocą zależności (4.13)-(4.18).

5.3. Kryterium Treynora

Ponownie przyjmujemy założenia przyjęte już w podrozdziale 5.2. Dodatkowo zakładamy, że zwrot z instrumentu finansowego $\breve{S}$ jest dodatnio skorelowany ze zwrotem z portfela rynkowego $\breve{M}$, co zapisujemy:

$$\beta_s > 0 \tag{5.13}$$

Współczynnik kierunkowy β_s jest traktowany jako ilościowa ocena ryzyka obarczającego instrument finansowy $\breve{S} \in \mathbb{Y}$. J.L. Treynor [1965] definiuje wartość indeksu zysku $g(r_s)$ jako określoną przez zależność:

$$g(r_s) = \frac{r_s - r_0}{\beta_s} \tag{5.14}$$

jednostkową premię za ryzyko. Wtedy wartość graniczna $\hat{G}$ jest definiowana jako jednostkowa premia za ryzyko portfela rynkowego określona przez zależność:

$$\hat{G} = r_M - r_0 \tag{5.15}$$

gdyż mamy $\beta_M = 1$.

Rozważmy przypadek, kiedy oczekiwany zwrot z papieru wartościowego $\breve{S}$ jest reprezentowany przez oczekiwaną IFRR $R_s \in \mathcal{I}(\mathbb{R})$, opisaną przez swe funkcje przynależności $\rho_S \in [0;1]^{\mathbb{R}}$ i wykluczenia $\varphi_S \in [0;1]^{\mathbb{R}}$. Zgodnie z (4.4), (4.6), (4.9) i (4.11):

$$\lambda(\mathcal{A}|\breve{S}) = \sup\{\rho_s(\beta_s \cdot x + r_0): x \geq r_M - r_0\} \tag{5.16}$$

$$\lambda(\mathcal{R}|\breve{S}) = \sup\{\rho_s(\beta_s \cdot x + r_0): x \leq r_M - r_0\} \tag{5.17}$$

$$\kappa(\mathcal{A}|\breve{S}) = \inf\{\varphi_s(\beta_s \cdot x + r_0): x \geq r_M - r_0\} \tag{5.18}$$

$$\kappa(\mathcal{R}|\breve{S}) = \inf\{\varphi_s(\beta_s \cdot x + r_0): x \leq r_M - r_0\} \tag{5.19}$$

Wartości $\lambda(\mathcal{B}|\breve{S})$, $\lambda(\mathcal{H}|\breve{S})$, $\lambda(\mathcal{B}|\breve{S})$, $\kappa(\mathcal{B}|\breve{S})$, $\kappa(\mathcal{H}|\breve{S})$, $\kappa(\mathcal{B}|\breve{S})$ są wyznaczone odpowiednio za pomocą zależności (4.13)-(4.18). Rekomendacje inwestycyjne uzyskane za pomocą kryterium Treynora są identyczne z rekomendacjami uzyskanymi za pomocą kryterium Jensena w przypadku spełnienia warunku (5.13) [Piasecki, 2007].

6. Kryteria prymatu bezpieczeństwa

Rozważmy stopę zwrotu $\tilde{r}(\omega)$ z ustalonego papieru wartościowego. Dla każdej założonej wartości $r \in \mathbb{R}$ oczekiwanej stopy zwrotu rozkład prawdopodobieństwa stopy zwrotu jest dany za pomocą ciągłej i rosnącej dystrybuanty

$F(\cdot\,|r)\colon \mathbb{R} \longrightarrow [0;1]$. Wtedy kryterium bezpieczeństwa [Roy, 1952] jest dane następująco:

$$F(L|r) = \varepsilon \tag{6.1}$$

gdzie:
L – minimalna akceptowalna stopa zwrotu,
ε – jest równe prawdopodobieństwu realizacji stopy zwrotu poniżej akceptowalnego minimum.

Realizacja stopy zwrotu poniżej akceptowalnego minimum jest identyfikowana jako strata. Dlatego zmienna ε opisuje prawdopodobieństwo straty.

Weźmy pod uwagę instrument finansowy $\check{S}$ z oczekiwaną stopą zwrotu r_s. Rozkład prawdopodobieństwa zwrotu z tego instrumentu jest opisany za pomocą dystrybuanty $F(\cdot\,|r_s)\colon \mathbb{R} \longrightarrow [0;1]$. Rozpatrywane mogą być wtedy kryteria wymienione w kolejnych podrozdziałach.

6.1. Kryterium Roy'a

Kryterium optymalizacji Roya [1952] polega na minimalizacji prawdopodobieństwa straty przy zadanej minimalnej akceptowalnej stopie zwrotu $L \in \mathbb{R}$. Wszystko to pozwala określić wartość indeksu zysku $g(r_s)$ za pomocą zależności:

$$g(r_s) = -F(L|r_s) \tag{6.2}$$

Dodatkowo, dla zapewnienia bezpieczeństwa inwestycji, inwestor zakłada maksymalny poziom ε^* prawdopodobieństwa straty. Wtedy wartość graniczna $\hat{G}$ jest określona następująco:

$$\hat{G} = -\varepsilon^* \tag{6.3}$$

Rozważmy teraz przypadek, kiedy oczekiwany zwrot z papieru wartościowego $\check{S}$ jest reprezentowany przez oczekiwaną IFRR $R_S \in \mathcal{I}(\mathbb{R})$, opisaną przez swe funkcje przynależności $\rho_S \in [0;1]^{\mathbb{R}}$ i wykluczenia $\varphi_S \in [0;1]^{\mathbb{R}}$. Zgodnie z (4.4), (4.6), (4.9) i (4.11):

$$\lambda\big(\mathcal{A}\big|\check{S}\big) = \sup\{\rho_S(r)\colon F(L|r) \le \varepsilon^*\} \tag{6.4}$$

$$\lambda\big(\mathcal{R}\big|\check{S}\big) = \sup\{\rho_S(r)\colon F(L|r) \ge \varepsilon^*\} \tag{6.5}$$

$$\kappa\big(\mathcal{A}\big|\check{S}\big) = \inf\{\varphi_S(r)\colon F(L|r) \le \varepsilon^*\} \tag{6.6}$$

$$\kappa\big(\mathcal{R}\big|\check{S}\big) = \inf\{\varphi_S(r)\colon F(L|r) \ge \varepsilon^*\} \tag{6.7}$$

Wartości $\lambda(\mathcal{B}|\check{S})$, $\lambda(\mathcal{H}|\check{S})$, $\lambda(\mathcal{B}|\check{S})$, $\kappa(\mathcal{B}|\check{S})$, $\kappa(\mathcal{H}|\check{S})$, $\kappa(\mathcal{B}|\check{S})$ są wyznaczone odpowiednio za pomocą zależności (4.13)-(4.18).

6.2. Kryterium Kataoki

Kryterium optymalizacji S. Kataoki [1963] polega na maksymalizacji minimalnej akceptowalnej stopy zwrotu przy zadanym prawdopodobieństwie straty $\varepsilon > 0$. Wszystko to pozwala określić wartość indeksu zysku $g(r_s)$ za pomocą zależności:

$$g(r_s) = F^{-1}(\varepsilon|r_s) \tag{6.8}$$

Dodatkowo, dla zapewnienia bezpieczeństwa inwestycji, inwestor zakłada minimalny poziom stopy zwrotu poziom $L^* \in \mathbb{R}$. Wtedy wartość graniczna $\hat{G}$ jest określona następująco:

$$\hat{G} = L^* \tag{6.9}$$

Rozważmy przypadek, kiedy oczekiwany zwrot z papieru wartościowego $\check{S}$ jest reprezentowany przez oczekiwaną IFRR $R_s \in \mathcal{I}(\mathbb{R})$, opisaną przez swe funkcje przynależności $\rho_S \in [0;1]^{\mathbb{R}}$ i wykluczenia $\varphi_S \in [0;1]^{\mathbb{R}}$. Zgodnie z (4.4), (4.6), (4.9) i (4.11):

$$\lambda(\mathcal{A}|\check{S}) = \sup\{\rho_s(r): F^{-1}(\varepsilon|r) \geq L^*\} \tag{6.10}$$

$$\lambda(\mathcal{R}|\check{S}) = \sup\{\rho_s(r): F^{-1}(\varepsilon|r) \leq L^*\} \tag{6.11}$$

$$\kappa(\mathcal{A}|\check{S}) = \inf\{\varphi_s(r): F^{-1}(\varepsilon|r) \geq L^*\} \tag{6.12}$$

$$\kappa(\mathcal{R}|\check{S}) = \inf\{\varphi_s(r): F^{-1}(\varepsilon|r) \leq L^*\} \tag{6.13}$$

Wartości $\lambda(\mathcal{B}|\check{S})$, $\lambda(\mathcal{H}|\check{S})$, $\lambda(\mathcal{B}|\check{S})$, $\kappa(\mathcal{B}|\check{S})$, $\kappa(\mathcal{H}|\check{S})$, $\kappa(\mathcal{B}|\check{S})$ są wyznaczone odpowiednio za pomocą zależności (4.13)-(4.18).

6.3. Kryterium Telsera

Kierując się bezpieczeństwem i zyskownością inwestycji, inwestor zakłada minimalny poziom L^* akceptowalnego zwrotu i maksymalny poziom ε^* prawdopodobieństwa straty. Para (L^*, ε^*) określa wymagane warunki bezpieczeństwa. Jeśli jest spełniony warunek:

$$F(L^*|r_s) \leq \varepsilon^* \tag{6.14}$$

to instrument finansowy $\check{S} \in \mathbb{Y}$ jest nazywany bezpiecznym.

Kryterium optymalizacji Telsera [1955] polega na maksymalizacji stopy zwrotu z bezpiecznego instrumentu finansowego. Pozwala to określić wartość indeksu zysku $g(r_s)$ za pomocą zależności:

$$g(r_s) = r_s \tag{6.15}$$

Dodatkowo, dla zapewnienia zyskowności inwestycji, inwestor bierze pod uwagę stopę równowagi finansowej $r^* > L^*$. Wtedy wartość graniczna $\hat{G}$ jest określona następująco:

$$\hat{G} = r^* > L^* \tag{6.16}$$

Rozważmy przypadek, kiedy oczekiwany zwrot z papieru wartościowego $\check{S}$ jest reprezentowany przez oczekiwaną IFRR $R_s \in \mathcal{I}(\mathbb{R})$, opisaną przez swe funkcje przynależności $\rho_S \in [0;1]^{\mathbb{R}}$ i wykluczenia $\varphi_S \in [0;1]^{\mathbb{R}}$. Zgodnie z (4.4), (4.6), (4.9) i (4.11):

$$\lambda(\mathcal{A}|\check{S}) = \sup\{\rho_S(r): r \geq r^*\} \tag{6.17}$$

$$\lambda(\mathcal{R}|\check{S}) = \sup\{\rho_S(r): r \leq r^*\} \tag{6.18}$$

$$\kappa(\mathcal{A}|\check{S}) = \inf\{\varphi_S(r): r \geq r^*\} \tag{6.19}$$

$$\kappa(\mathcal{R}|\check{S}) = \inf\{\varphi_S(r): r \leq r^*\} \tag{6.20}$$

Wartości $\lambda(\mathcal{B}|\check{S})$, $\lambda(\mathcal{H}|\check{S})$, $\lambda(\mathcal{B}|\check{S})$, $\kappa(\mathcal{B}|\check{S})$, $\kappa(\mathcal{H}|\check{S})$, $\kappa(\mathcal{B}|\check{S})$ są wyznaczone odpowiednio za pomocą zależności (4.13)-(4.18). Dziedzina kryterium Telsera jest oczywiście ograniczona do bezpiecznych instrumentów finansowych $\check{S} \in \mathbb{Y}$ spełniających warunek (6.14).

Podsumowanie

Nieprecyzyjne oszacowanie oczekiwanej stopy zwrotu jest konsekwencją uwzględnienia behawioralnych aspektów finansów [Piasecki, 2011b, 2013, 2015a, 2015b; Echaust, Piasecki, 2016]. Z tej przyczyny otrzymane tutaj rezultaty mogą zostać zastosowane w behawioralnych finansach jako normatywny model decyzji inwestycyjnych. Dzięki temu uzyskujemy teoretyczne podstawy dla konstrukcji takiego systemu wspomagania decyzji inwestycyjnych, który uwzględnia przesłanki behawioralne. W ten sposób zostało wykazane, że przesłanki behawioralne mogą *explicite* wpływać na proces podejmowania decyzji inwestycyjnej.

Uzyskane w prezentowanych badaniach wyniki są uogólnieniem – do przypadku intuicyjnie rozmytej stopy zwrotu – normatywnej teorii decyzji finansowych [Piasecki, 2014] dla rozmytej stopy zwrotu.

Literatura

Atanassov K., Stoeva S. (1985), *Intuitionistic Fuzzy Sets* [w:] J. Albrycht, H. Wiśniewski (red.), *Proceedings of Polish Symposium on Interval and Fuzzy Mathematics*, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań.

Black F., Litterman R. (1990), *Asset Allocation: Combining Investor Views with Market Equilibrium*, „The Journal of Fixed Income", No. 1, DOI: 10.3905/jfi.1991.408013.

Echaust K., Piasecki K. (2016), *Black-Litterman Model with Intuitionistic Fuzzy Posterior Return*, "SSRN Electronic Journal", No. 1, DOI:10.2139/ssrn.2010280.

Jensen M.C. (1969), *Risk and Pricing of Capital Assets, and the Evaluation of Investments Portfolios*, "Journal of Business", Vol. 42, No. 2, s. 167-247.

Kaplan S., Barish N.N. (1967), *Decision-Making Allowing Uncertainty of Future Investment Opportunities*, "Management Science", Vol. 13, No. 10, s. B569-B577.

Kataoka S. (1963), *A Stochastic Programming Model*, "Econometrica", Vol. 31, No. 1/2, s. 181-196.

Knight F.H. (1921), *Risk, Uncertainty, and Profit*, Hart, Schaffner & Marx, Houghton Mifflin Company, Boston MA.

Mises L. von (1962), *The Ultimate Foundation of Economic Science An Essay on Method*, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton.

Nowak P., Romaniuk M. (2015), *Catastrophe Bond Pricing for the Two-factor Vasicek Interest Rate Model with Automatized Fuzzy Decision Making*, "Soft Computing", No. 19, DOI 10.1007/s00500-015-1957-1.

Piasecki K. (1990), *Decyzje i wiarygodne prognozy*, „Zeszyty Naukowe Akademii Ekonomicznej w Poznaniu", z. 106, s. 2.

Piasecki K. (2007), *Modele matematyki finansowej. Instrumenty podstawowe*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Piasecki K. (2011a), *Effectiveness of Securities with Fuzzy Probabilistic Return*, "Operations Research and Decisions", No. 21(2), s. 65-78.

Piasecki K. (2011b), *Rozmyte zbiory probabilistyczne jako narzędzie finansów behawioralnych*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonmiznego w Poznaniu, DOI: 10.13140/2.1.2506.6567.

Piasecki K. (2013), *Intuitionistic Assessment of Behavioural Present Value*, "Folia Oeconomica Stetinensia", No. 13(21)(2), DOI: 10.2478/foli-2013-0021.

Piasecki K. (2014), *On Imprecise Investment Recommendations*, "Studies in Logic, Grammar and Rhetoric", No. 37(50), s. 179-194, DOI: 10.2478/slrg-2014-0024.

Piasecki K. (2015a), *O stopie zwrotu oszacowanej przez intuicyjny rozmyty zbiór probabilistyczny*, „Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach", nr 248, s. 195-205.

Piasecki K. (2015b), *On Return Rate Estimated by Intuitionistic Fuzzy Probabilistic Set*, [w:] D. Martincik, J. Ircingova, P. Janecek (red.), *Mathematical Methods in Economics MME 2015*, Publishing House of Faculty of Economics, University of West Bohemian, Plzen.

Roy A.D. (1952), *Safety-first and the Holding of Assets*, "Econometrics", No. 20, s. 431-449.

Sharpe W.F. (1966), *Mutual Fund Performance*, "Journal of Business", No. 19, s. 119-138.

Telser L.G. (1955), *Safety First and Hedging*, "The Review of Economic Studies", Vol. 23, No. 2, s. 1-16.

Treynor J.L. (1965), *How to Rate Management of Investment Fund*, "Harvard Business Review", No. 43, s. 63-75.

Zhang Q., Jia B., Jiang S. (2009), *Interval-valued Intuitionistic Fuzzy Probabilistic Set and some of its Important Properties*, Proceedings of the 1st International Conference on Information Science and Engineering ICISE2009, Guangzhou.

[www 1] http://www.marketwatch.com/tools/guide.asp (dostęp: 1.09.2013).

THE INTUITIONISTIC FUZZY INVESTMENT RECOMMENDATIONS

Summary: The return rate is considered here as an intuitionistic fuzzy probabilistic set. Then the expected return is obtained as an intuitionistic fuzzy subset in the real line. This result is a theoretical foundation for new investment strategies. All considered strategies result of comparison profit fuzzy index and limit value. In this way we obtain an imprecise investment recommendation. Financial equilibrium criteria are a special case of comparison the profit index and the limit value. There are generalized the following criteria: the Sharpe's Ratio, the Jensen's Alpha and the Treynor's Ratio. Moreover, the safety-first criteria are generalized here for the fuzzy case. The Roy's Criterion, the Kataoka's Criterion and the Telser's Criterion are also generalized. Obtained here results show, that proposed theory is useful for the investment applications.

Keywords: imprecise return rate, investment recommendation, intuitionistic fuzzy set.