



**Monika Hadaś-Dyduch**

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach  
Wydział Ekonomii  
Katedra Metod Statystyczno-Matematycznych w Ekonomii  
monika.dyduch@ue.katowice.pl

## **ZASTOSOWANIE ANALIZY FALKOWEJ DO OCENY PODOBIEŃSTWA WOJEWÓDZTWA ŚLĄSKIEGO Z INNYMI WOJEWÓDZTWAMI**

**Streszczenie:** Obserwowane zmiany demograficzne wskazują, że sytuacja ludnościowa poszczególnych regionów Polski jest trudna. Zachodzące zmiany odbijają się na rynku pracy, który z kolei ma wpływ na inne rynki. Z uwagi na wagę i skalę problemu, jakimi są praca, zatrudnienie, bezrobocie, ruch naturalny, nakłady inwestycyjne itd., w artykule podjęto próbę porównania w tym kontekście poszczególnych regionów Polski do województwa śląskiego.

Badanie oparto na falce Daubechies, czyli falce ciągłej o nośniku zwartym. Jest to falka doskonale zlokalizowana w czasie. Charakteryzuje się dokładną aproksymacją funkcji oraz stosunkowo prostą postacią.

Jako kluczowy cel artykułu przyjęto wyodrębnienie grupy regionów najbardziej podobnych do województwa śląskiego. Rozważania teoretyczno-matematyczne zostały aplikowane do analizy na danych rzeczywistych.

**Słowa kluczowe:** falki, korelacja, bezrobocie, podobieństwo, kointegracja.

**JEL Classification:** A12, C15, C60.

### **Wprowadzenie**

Analizę podobieństwa można wykonywać różnymi metodami i sposobami [Batóg i Dmytrów, 2017; Strojny, 2016; Turczach i Zwiech, 2016; Podogrodzka, 2016]. W artykule do tego celu zastosowano analizę falkową. Wybranie tej metody wydaje się zasadne z uwagi na fakt, że falki są funkcjami, które spełniają pewne matematyczne wymagania, tworzą reprezentację sygnałów lub danych. Analiza falkowa dzieli dane wejściowe na składniki o różnej częstotliwości,

analizując następnie każdy element z rozdzielczością dopasowaną do jego skali. Aby zobrazować sytuację, można powiedzieć, że ze względu na swoją zdolność do dostosowywania skali analiza falkowa pozwala na jednoczesną obserwację zarówno całości obrazu, jak i najdrobniejszych jego szczegółów, tzn. że można obserwować szereg na różnych poziomach rozdzielczości przez jego rozkład na dwie części – część uproszczoną oraz detal. Przy czym na każdym kolejnym poziomie aproksymacja z poziomu poprzedniego zostaje rozłożona ponownie na dwie części – aproksymację i detal.

Celem artykułu jest analiza podobieństw pomiędzy województwami w kontekście zmienności badanych wskaźników. Z uwagi na dużą skalę badania w artykule ograniczono się do przedstawienia wyników dotyczących województwa śląskiego, to znaczy do wskazania województw najbardziej podobnych do województwa śląskiego. Za wskaźniki będące podstawą analizy przyjęto: stopę bezrobocia rejestrowanego (dane miesięczne), stopę napływu bezrobotnych zarejestrowanych (dane miesięczne), przeciętne miesięczne wynagrodzenia brutto w sektorze przedsiębiorstw wg PKD 2007 (dane krótkookresowe), ruch naturalny ludności (dane kwartalne). Dane niezbędne do przeprowadzenia badania zostały pobrane z Banku Danych Lokalnych.

## 1. Teoretyczne i empiryczne podejście do analizy falkowej

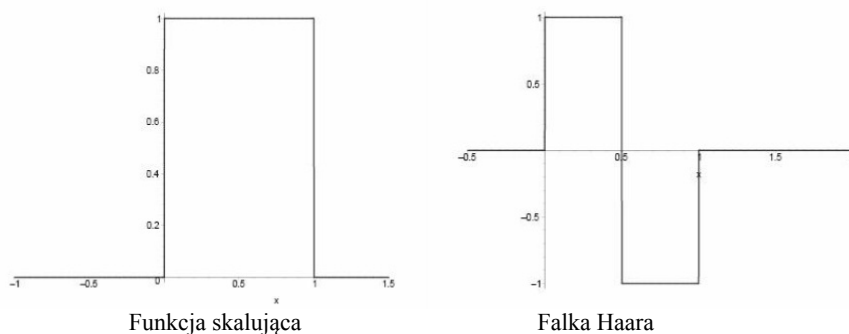
Narodziny teorii falkowej sięgają połowy lat 80. XX w., czyli okresu, w którym literatura naukowa dotycząca przetwarzania sygnałów silnie rozwija zagadnienie dotyczące kwadraturowych filtrów lustrzanych (*Quadrature Mirror Filters*, QMF). Należy nadmienić, że problem kwadraturowych filtrów lustrzanych został zainicjowany w połowie lat 70. XX w. „Istotny wkład w rozwój badań nad kwadraturowymi filtrami lustrzanymi wniósł Vaidyan. Wprowadził on struktury kratowe do realizacji filtrów o skończonej odpowiedzi impulsowej (ang. *Finite Impulse Response*, FIR). Wykazał również, że stanowią one skuteczną metodę parametryzacji i implementacji filtrów QMF oraz (...) że struktura kratowa gwarantuje idealną rekonstrukcję (ang. *Perfect Reconstruction*, PR) sygnału, bez względu na kwantyzację współczynników, co czyni tę strukturę idealną do celów optymalizacji (...)” [Stolarek, 2011].

Związek pomiędzy teorią falek a kwadraturowymi filtrami lustrzanymi został bardzo szybko dostrzeżony przez naukowców. Zaczęli oni równolegle pracować nad pączkującą dopiero teorią falkową. Dostrzeżono, że każda funkcja skalująca (funkcja bazowa przekształcenia falkowego) wraz z odpowiadającą jej falką tworzą bank kwadraturowych filtrów lustrzanych, jednak przeciwna

zależność nie musi być prawdziwa (zob. więcej w [Stolarek, 2011; Hadaś-Dyduch, 2015b, 2016]). Pojawiające się w tamtym okresie artykuły naukowe z zakresu analizy falkowej, właściwie artykuły zainicjowane kwadraturowymi filtrami lustrzanymi, uznawane są za początek współczesnej teorii falek. W 1984 r. Morlet i Grossman wprowadzili do leksykonu matematycznego słowo *wavelet*, czyli falka [Donghong i in., 2014; Sridhar, Kumar i Ramanaiah, 2013; Sundararajan, 2016; Hadaś-Dyduch, 2015a].

Analiza falkowa polega na dekompozycji szeregu na składowe będące przesuniętymi i przeskalowanymi wersjami pewnej funkcji zwanej falką podstawową. Funkcja matka jest funkcją, która wyciąłkuje się do zera i ma jednostkową energię [Walnut, 2013]. „Dekompozycja ta może mieć różny charakter w zależności od rodzaju zastosowanej transformaty falkowej. W przypadku tzw. analizy dyskretnej (...), która pojawia się najczęściej w zastosowaniach prognostycznych, efektem transformacji są współczynniki falkowe zdefiniowane dla oktaf częstotliwości, co skutkuje oszczędną reprezentacją danych. Ponadto rozważanie wyłącznie oktaf częstotliwości może być uzasadnione w przypadku analizy procesów ekonomicznych, dla których – jak się wydaje – posługiwanie się przedziałami częstotliwości, a nie pojedynczymi częstotliwościami, nie powinno wiązać się z nadmierną utratą informacji, co nastąpi w szczególności w przypadku procesów, których dynamika zależy od diadykowej skali czasu” [Bruzda, 2012].

Najprostsza falka powstała już w 1910 r. (falka Haara). Zwana była pierwotnie rozwinięciem Haara od nazwiska twórcy falki – Alfreda Haara. Falki Haara stanowią rodzinę funkcji ortogonalnych i ortonormalnych [Graps, 1995; Gomes i Velho, 2015]. Wykres falki Haara ilustruje rys. 1, gdzie wartości tej funkcji zostały ograniczone tylko do punktów, w których falka Haara jest różna od zera.



**Rys. 1.** Zestawienie funkcji skalującej falki Haara oraz falki Haara

Źródło: Opracowanie własne.

Matematycznie falkę Haara przedstawioną na rys. 1 możemy zapisać jako funkcję postaci [Lepik i Hein, 2014]:

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ -1 & \text{dla } \left[\frac{1}{2}, 1\right) \\ 0 & \text{dla pozostałych } x \end{cases}. \quad (1)$$

Należy nadmienić, że falka Haara jest najprostszą falką i nie ma większego zastosowania praktycznego. Najczęściej wykorzystywana jest falka Daubechies, przy czym db1 to falka Haara [Montefusco i Puccio, 2014].

W badaniach zaprezentowanych w artykule zastosowano falkę Daubechies, która, jak wcześniej wspomniano, jest powiązana z falką Haara. Rodziny falek Daubechies oznaczane są odpowiednio: db1, db2, db3, ..., gdzie dwie pierwsze litery pochodzą od nazwiska ich twórcy, a liczba oznacza stopień regularności falki.

Ingrid Daubechies, autorka falki Daubechies, sformułowała, a następnie udowodniła następujące twierdzenie [Daubechies, 1990, 1992]:

**Tw.** *Istnieje dokładnie jedyna funkcja  $\varphi: D \rightarrow R$  spełniająca następujące trzy warunki:*

- 1)  $\varphi(r) = \frac{1+\sqrt{3}}{4}\varphi(2r) + \frac{3+\sqrt{3}}{4}\varphi(2r-1) + \frac{3-\sqrt{3}}{4}\varphi(2r-2) + \frac{1-\sqrt{3}}{4}\varphi(2r-3),$
- 2)  $\sum_{k \in Z} \varphi(k) = 1,$
- 3)  $\varphi(r) = 0$  dla  $r \leq 0 \vee r \geq 3.$

gdzie:

$$D_j = \{k2^j : k \in Z\}, \quad D = \bigcup_{j \in Z} D_j = \bigcup_{j=0}^{\infty} D_j.$$

Związana z funkcją skalującą  $\varphi$  falka  $\psi$  zadana jest wzorem [Daubechies, 1990; 1992]:

$$\psi(r) = -\frac{1+\sqrt{3}}{4}\varphi(2r-1) + \frac{3+\sqrt{3}}{4}\varphi(2r) - \frac{3-\sqrt{3}}{4}\varphi(2r+1) + \frac{1-\sqrt{3}}{4}\varphi(2r+2)$$

$$\psi(r) = 0 \text{ dla } r < -1 \text{ lub } r > 2.$$

W poniżej zaprezentowanych badaniach wykorzystano transformatę funkcji, która bez względu na metodę użytą do rozszerzenia próbki, a zarazem otrzyma-

nia współczynników  $a_0, \dots, a_{2^{n+1}-1}$ , polega na zastąpieniu  $2N = 2^{(n+1)}$  całkowitych przesunięć funkcji skalującej:

$$\tilde{f}(r) = \sum_{k=0}^{2^{(n+1)}-1} a_k \varphi(r-k)$$

przez równoważną kombinację liniowych całkowitych przesunięć funkcji skalującej  $\varphi([r/2]-k)$  i falek  $\psi([r/2-1]-k)$  z niższego poziomu rozdzielczości:

$$\tilde{f}(r) = \sum_{k=0}^{2^n-1} a_k^{(n-1)} \varphi([r/2]-k) + \sum_{k=0}^{2^n-1} c_k^{(n-1)} \psi([r/2-1]-k).$$

Współczynniki  $a_k^{(n-1)}$  wskazują niższy poziom rozdzielczości niż początkowe współczynniki  $a_k^{(n)}$ , które są w tym wypadku równoważne, tj.  $a_k^{(n)} \equiv a_k$  [Daubechies, 1990, 1992; Dooms i Daubechies, 2011].

## 2. Opis materiału empirycznego

Okres badawczy to lata 2010-2016. Analizę oparto zarówno na danych miesięcznych, jak i kwartalnych (w zależności od dostępności danych w BDL), tj.:

- stopa bezrobocia rejestrowanego – dane miesięczne z okresu 1.01.2011-1.09.2016,
- stopa napływu bezrobotnych zarejestrowanych – dane miesięczne z okresu 1.01.2013-1.04.2016,
- przeciętne miesięczne wynagrodzenia brutto w sektorze przedsiębiorstw wg PKD 2007 – dane miesięczne z okresu 1.01.2010-1.09.2016,
- ruch naturalny ludności – dane kwartalne z okresu 1.01.2010-1.04.2014.

Stopa bezrobocia rejestrowanego uwzględniona w badaniu jest obliczona jako „(...) stosunek liczby bezrobotnych zarejestrowanych do liczby cywilnej ludności aktywnej zawodowo (ogółem oraz danej grupy), tj. bez osób odbywających czynną służbę wojskową oraz pracowników jednostek budżetowych prowadzących działalność w zakresie obrony narodowej i bezpieczeństwa publicznego” [BDL].

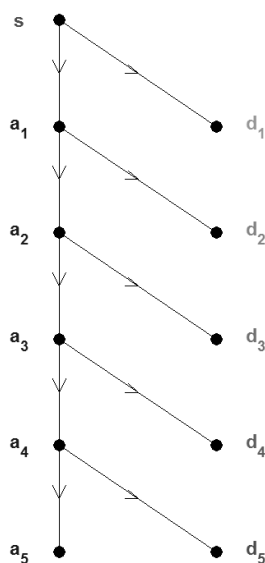
Stopa napływu jest obliczona jako stosunek „nowo zarejestrowanych bezrobotnych do liczby cywilnej ludności aktywnej zawodowo, tj. bez osób odbywających czynną służbę wojskową oraz pracowników jednostek budżetowych prowadzących działalność w zakresie obrony narodowej i bezpieczeństwa publicznego” [BDL].

Dane miesięczne dotyczące wynagrodzenia to dane brutto, tj. łącznie z zaliczkami na poczet podatku dochodowego od osób fizycznych oraz od 1999 r. – ze składkami na obowiązkowe ubezpieczenia społeczne<sup>1</sup> (emerytalne, rentowe i chorobowe) płaconymi przez ubezpieczonego pracownika. Należy nadmienić, że dane w zakresie przeciętnych miesięcznych wynagrodzeń dotyczą podmiotów gospodarczych sektora przedsiębiorstw, w których liczba pracujących przekracza 9 osób; dane do 2011 r. nie obejmują poczty publicznej oraz operatorów telekomunikacyjnych sieci publicznej.

### 3. Wyniki i wnioski z badania

Dla każdego z 64 szeregów, prezentujących dla poszczególnych województw: stopę napływu bezrobotnych zarejestrowanych, przeciętne miesięczne wynagrodzenia brutto, ruch naturalny ludności oraz stopę bezrobocia rejestrowanego, dokonano pięciopoziomowej dekompozycji falkowej, zgodnie z zasadą pokazaną na rys. 2.

W badaniach zastosowano falkę Daubechies, która jest falką ciągłą o zwartym nośniku (więcej o falkach w [Daubechies, 1990, 1992; Hadaś-Dyduch, 2015a; 2015b]).



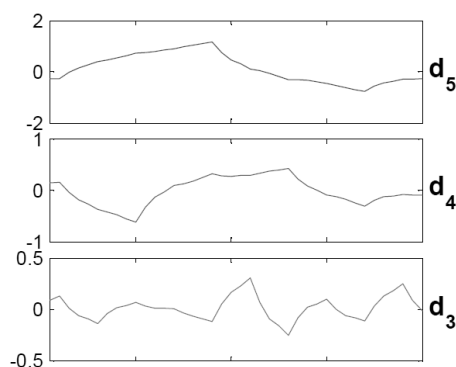
**Rys. 2.** Pięciopoziomowa dekompozycja falkowa

Źródło: Opracowanie własne.

<sup>1</sup> Dane o świadczeniach społecznych podaje się w ujęciu brutto, tj. łącznie z zaliczkami na poczet podatku dochodowego od osób fizycznych [BDL, 20.11.2016].

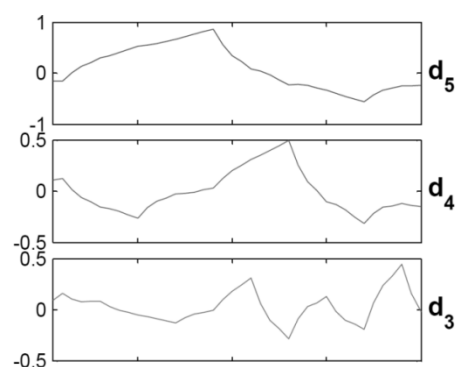
Z przeprowadzonych badań i analiz uzyskano następujące wnioski:

- 1) Kształtowanie się ruchu naturalnego ludności w województwie śląskim jest podobne do kształtowania się ruchu naturalnego w województwie pomorskim. Na rys. 3 i 4 pokazano dekompozycję falkową ruchu naturalnego tych województw na trzecim, czwartym i piątym poziomie rozdzielczości. Dekompozycja falkowa na piątym poziomie jest najbardziej wygładzonym szeregiem i pokazuje długookresowe tendencje rozwojowe badanego zjawiska, w analizowanym przypadku ruchu naturalnego ludności. Jak widać na rysunkach  $d_5$  (rys. 3 i 4), zarówno w przypadku województwa śląskiego, jak i pomorskiego nastąpił w drugim badanym okresie znaczny wzrost ruchu naturalnego ludności. Jednakże w przypadku województwa śląskiego wzrost był zdecydowanie wyraźniejszy niż w przypadku województwa pomorskiego ( $d_4$ ).



**Rys. 3.** Wyniki dekompozycji falkowej na 3, 4 i 5 poziomie rozdzielczości dla ruchu naturalnego ludności w województwie pomorskim

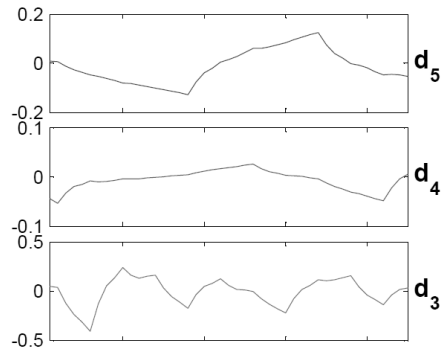
Źródło: Opracowanie własne na podstawie przeprowadzonych obliczeń w programie Matlab.



**Rys. 4.** Wyniki dekompozycji falkowej na 3, 4 i 5 poziomie rozdzielczości dla ruchu naturalnego ludności w województwie śląskim

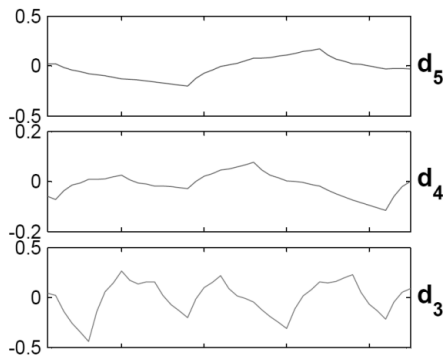
Źródło: Opracowanie własne na podstawie przeprowadzonych obliczeń w programie Matlab.

- 2) Napływ ludności w województwie śląskim jest zbliżony do napływu ludności w województwie dolnośląskim i województwie lubelskim, co wyraźnie widać na przedstawionych poniżej rysunkach.



**Rys. 5.** Wyniki dekompozycji falkowej na 3, 4 i 5 poziome rozdzielczości dla szeregu prezentującego stopę napływu bezrobotnych w województwie śląskim

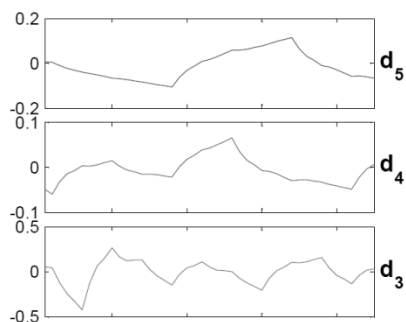
Źródło: Opracowanie własne na podstawie przeprowadzonych obliczeń i symulacji w programie Matlab.



**Rys. 6.** Wyniki dekompozycji falkowej na 3, 4 i 5 poziome rozdzielczości dla szeregu prezentującego stopę napływu bezrobotnych w województwie lubelskim

Źródło: Opracowanie własne na podstawie przeprowadzonych obliczeń i symulacji w programie Matlab.

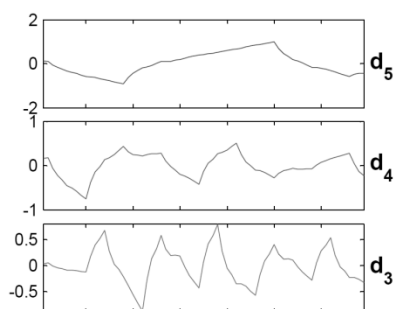




**Rys. 7.** Wyniki dekompozycji falkowej na 3, 4 i 5 poziomie rozdzielczości dla szeregu prezentującego stopę napływu bezrobotnych w województwie dolnośląskim

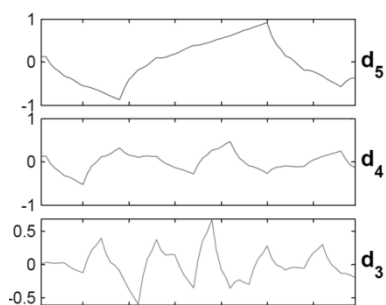
Źródło: Opracowanie własne na podstawie przeprowadzonych obliczeń i symulacji w programie Matlab.

- 3) Zmienność stopy bezrobocia w województwie śląskim jest najbardziej porównywalna ze zmiennością występującą w województwach mazowieckim, kujawsko-pomorskim, łódzkim i świętokrzyskim.



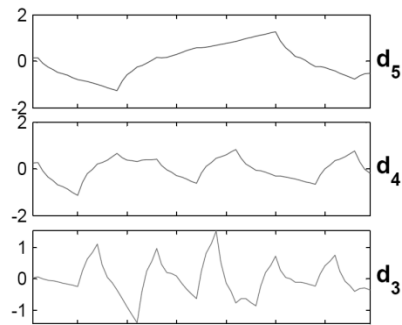
**Rys. 8.** Wyniki dekompozycji falkowej na 3, 4 i 5 poziomie rozdzielczości dla szeregu prezentującego stopę bezrobocia w województwie śląskim

Źródło: Opracowanie własne na podstawie przeprowadzonych obliczeń i symulacji w programie Matlab.



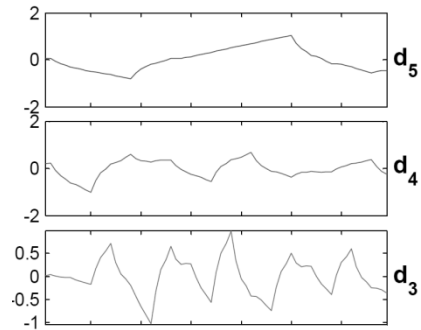
**Rys. 9.** Wyniki dekompozycji falkowej na 3, 4 i 5 poziomie rozdzielczości dla szeregu prezentującego stopę bezrobocia w województwie mazowieckim

Źródło: Opracowanie własne na podstawie przeprowadzonych obliczeń i symulacji w programie Matlab.



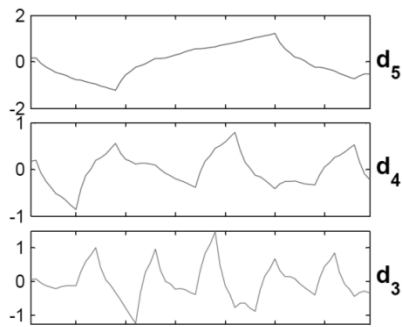
**Rys. 10.** Wyniki dekompozycji falkowej na 3, 4 i 5 poziomie rozdzielczości dla szeregu prezentującego stopę bezrobocia w województwie kujawsko-pomorskim

Źródło: Opracowanie własne na podstawie przeprowadzonych obliczeń i symulacji w programie Matlab.



**Rys. 11.** Wyniki dekompozycji falkowej na 3, 4 i 5 poziomie rozdzielczości dla szeregu prezentującego stopę bezrobocia w województwie łódzkim

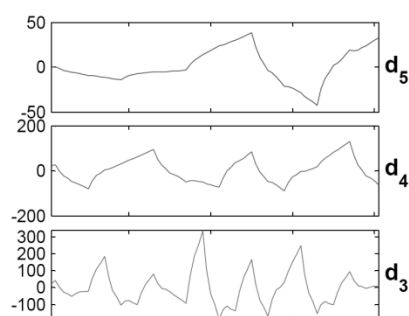
Źródło: Opracowanie własne na podstawie przeprowadzonych obliczeń i symulacji w programie Matlab.



**Rys. 12.** Wyniki dekompozycji falkowej na 3, 4 i 5 poziomie rozdzielczości dla szeregu prezentującego stopę bezrobocia w województwie świętokrzyskim

Źródło: Opracowanie własne na podstawie przeprowadzonych obliczeń i symulacji w programie Matlab.

- 4) Kształtowanie się zmienności wynagrodzeń w województwie śląskim jest podobne do zmienności w województwach łódzkim, mazowieckim, podlaskim i warmińsko-mazurskim. Jak pokazano na rys. 13, od drugiego do połowy trzeciego okresu następował sukcesywny wzrost wynagrodzeń, który następnie nagle przerodził się w silny spadek (rys. 13 – db5).



**Rys. 13.** Wyniki dekompozycji falkowej na 3, 4 i 5 poziomie rozdzielczości dla szeregu prezentującego wynagrodzenia w województwie śląskim

Źródło: Opracowanie własne na podstawie obliczeń i symulacji przeprowadzonych w programie Matlab.

## Podsumowanie

W artykule, stosując jako narzędzie analizę falkową, wyznaczono województwa najbardziej podobne do województwa śląskiego w zakresie zmienności analizowanych wskaźników, takich jak: stopa napływu bezrobotnych zarejestrowanych, przeciętne miesięczne wynagrodzenia brutto, ruch naturalny ludności oraz stopa bezrobocia rejestrowanego. Analizy dokonano, korzystając z własności falki Daubechies (db2).

Otrzymane wyniki pokazują, że regionami najbardziej podobnymi do województwa śląskiego w zakresie przeprowadzonych analiz są województwa łódzkie i mazowieckie. Oba województwa charakteryzują się podobną zmiennością przeciętnego miesięcznego wynagrodzenia brutto w sektorze przedsiębiorstw wg PKD 2007 oraz stopą bezrobocia rejestrowanego. Przeprowadzone badanie może być podstawą do badań w zakresie predykcji z wykorzystaniem różnorodnych modeli, m.in. modeli opartych na falkach, np. [Hadaś-Dyduch i Hadaś 2017; Hadaś-Dyduch, 2015a, 2015b, 2015c, 2016].

Należy nadmienić, że narzędzie zastosowane do badań przedstawionych w artykule – falki – ma zarówno wady, jak i zalety. Wśród korzyści należałoby wymienić: hierarchię i zależność informacji, selektywność informacji, upakowa-

nie informacji, łatwiejszą identyfikację informacji użytecznej, składanie (syntezę) informacji w różnej postaci, klasyfikację jakościową i ilościową. Falki nie są jedyną metodą do badania podobieństw pomiędzy rejonami, można by zastosować inne metody i modele, np. [Janiga-Ćmiel, 2016; Strojny, 2016; Hadaś-Dyduch, 2014].

## Literatura

- Bruzda J. (2012), *Prognozowanie metodą wyrównywania falkowego*, „Acta Universitatis Nicolai Copernici. Zarządzanie”, nr 39, s. 77-95.
- Batóg J., Dmytrów K. (2017), *Analiza ścieżek rozwoju gospodarczego polskich regionów*, „Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie”, nr 9(957), s. 41-54.
- Daubechies I. (1990), *The Wavelet Transform, Time-frequency Localization and Signal Analysis*, „IEEE Transactions on Information Theory”, No. 36(5), s. 961-1005.
- Daubechies I. (1992), *Ten Lectures on Wavelets*, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, Vol. 61, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, s. 198-202.
- Donghong S., Zhibiao S., Wu L., Ping R., Jian-Ping W. (2014), *Analysis of Network Security Data Using Wavelet Transforms*, „Journal of Algorithms & Computational Technology”, No. 8(1), s. 59-70.
- Dooms A., Daubechies I. (2011), *Wavelets. Optical and Digital Image Processing: Fundamentals and Applications*, s. 135-154.
- Gomes J., Velho L. (2015), *From Fourier Analysis to Wavelets*, Vol. 3, Springer.
- Graps A. (1995), *An Introduction to Wavelets*, „IEEE Computational Science and Engineering”, No. 2(2), s. 50-61.
- Hadaś-Dyduch M. (2014), *Wielowymiarowa analiza relacji gospodarczych w rejonie śląskim* [w:] W. Szkutnik (red.), *Problemy społeczno-ekonomiczne w relacjach międzynarodowych. Analiza modelowa rozwoju regionów*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach, Katowice.
- Hadaś-Dyduch M. (2015a), *Prediction of Wavelets Analysis* [w:] *Financial Management of Firms and Financial Institutions, Proceedings (Part I)*, 10<sup>th</sup> International Scientific Conference, VSB-Technical University of Ostrava, Faculty of Economics, Department of Finance, Ostrava, Czech Republic, s. 341-348.
- Hadaś-Dyduch M. (2015b), *Wavelets in Prediction. Theory, Method, Simulation*, Scholar's Press, Saarbrücken, Germany.
- Hadaś-Dyduch M. (2015c), *Predykcja szeregów czasowych algorytmem uwzględniającym przesuwne okno czasowe i podział jednostkowy szeregów*, „Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach”, nr 241, „Informatyka i Ekonometria”, nr 3, s. 40-50.

- Hadaś-Dyduch M. (2016), *Wavelets as Basis Functions in the Adaptation's Methods: Author's Model for Forecasting Short-Term*, „Chinese Business Review”, Vol. 15, No. 1, January, Serial No. 151, David Publishing Company, USA.
- Hadaś-Dyduch M., Hadaś A. (2017), *Wavelet Daubechies as a Tool Supporting Stock Index Prediction in the Author's Multi-component and Multi-stage Model*, „Journal of Business and Management”, Vol. 19, No. 10, s. 59-66.
- Janiga-Ćmiel A. (2016), *Wielorównaniowy model dynamiki gospodarki Polski i Niemiec*, „Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach”, nr 297, s. 53-65.
- Lepik Ü., Hein H. (2014), *Haar Wavelets [w:] Haar Wavelets*, Springer International Publishing.
- Montefusco L., Puccio L. (eds.) (2014), *Wavelets: Theory, Algorithms, and Applications*, Vol. 5, Academic Press.
- Podogrodzka M. (2016), *Przestrzenne zróżnicowanie starości demograficznej w Polsce*, „Wiadomości Statystyczne”, nr 2, s. 62-72.
- Stolarek J. (2011), *Synteza falek ortogonalnych na podstawie oceny przetworzonego sygnału*, rozprawa doktorska, Politechnika Łódzka.
- Strojny J. (2016), *Wielowymiarowa analiza porównawcza województw: podkarpackiego i małopolskiego*, „Przedsiębiorczość-Edukacja”, nr 12, s. 68-84.
- Sridhar S., Kumar P.R., Ramanaiah K.V. (2013), *Performance Analysis of Daubechies Wavelet and Differential Pulse Code Modulation Based Multiple Neural Networks Approach for Accurate Compression of Images*, „International Journal of Image Processing”, No. 7(4), s. 372.
- Sundararajan D. (2016), *Discrete Wavelet Transform: A Signal Processing Approach*, John Wiley & Sons.
- Turczak A., Zwiech P. (2016), *Porównanie województw w Polsce na podstawie rozkładu dochodu rozporządzalnego per capita*, „Optimum. Studia Ekonomiczne”.
- Walnut D.F. (2013), *An Introduction to Wavelet Analysis*, Springer Science & Business Media.
- Bank Danych Lokalnych (BDL).

#### APPLICATION OF WAVELET ANALYSIS FOR RATE THE RELATIONSHIP OF THE SILESIAN VOIVODESHIP WITH OTHER VOIVODESHIPS

**Summary:** The observed demographic changes show that the situation of population of all Polish regions is difficult. The changes are reflected in the labor market, which in turn has an impact on other markets. Given the importance and scale of the problem they are working, employment, unemployment, natural motion, investment etc. in the article attempts to compare, in this context of individual regions to the Polish province of Silesia. The study was based on the Daubechies wavelet. The key objective of the article was to distinguish

the group of regions most similar to the Silesian Voivodeship. The theoretical and mathematical considerations presented in the article were applied to analysis on real data.

**Keywords:** wavelet, correlation, unemployment, similarity, cointegration.