



### Krzysztof Echaust

Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu  
Wydział Informatyki i Gospodarki Elektronicznej  
Katedra Badań Operacyjnych  
k.echaust@ue.poznan.pl

## WYKORZYSTANIE WARUNKOWEGO MODELU MAKSIMÓW BLOKOWYCH DO POMIARU *VALUE AT RISK*

**Streszczenie:** W pracy rozważany jest warunkowy model maksimów blokowych, wywodzący się z teorii wartości ekstremalnych. Badana jest jego przydatność do wyznaczania jednookresowych prognoz *Value at Risk* (VaR), gdy parametry modelu są szacowane na podstawie małej próby. Weryfikowana jest hipoteza, iż warunkowy model maksimów blokowych zwraca poprawne oszacowania VaR. Przeprowadzono empiryczną analizę poprawności modelu na siedmiu światowych indeksach giełdowych w latach 2001-2013. Badania potwierdziły, że model jest poprawny pod względem liczby i niezależności przekroczeń VaR oraz może być alternatywą dla innych często wykorzystywanych modeli.

**Słowa kluczowe:** *Value at Risk*, model maksimów blokowych, GARCH.

### Wprowadzenie

Właściwy pomiar ryzyka finansowego jest warunkiem koniecznym dla efektywnego zarządzania ryzykiem. Szczególnie istotny jest pomiar ryzyka zdarzeń, które mają miejsce bardzo rzadko. Istnieje niewielkie prawdopodobieństwo ich wystąpienia, a jeśli wystąpią, konsekwencje dla inwestorów bywają niezwykle dotkliwe. Najczęściej wykorzystywaną miarą takiego ryzyka jest wartość zagrożona – *Value at Risk* (VaR). Jest to wielkość straty na inwestycji w instrument finansowy lub cały portfel, jakiej można doświadczyć w określonym czasie, z zadany niewielkim prawdopodobieństwem. Główny problem natury praktycznej, to wybór właściwej metody pomiaru VaR.

Warunkowy model przekroczeń będący połączeniem modeli GARCH i metody wywodzącej się z teorii wartości ekstremalnych (*Extreme Value Theory*, EVT), zaproponowany przez A.J. McNeila i R. Frey'a [2000] jest obecnie szeroko stosowany w badaniach empirycznych. Uwzględnia zjawisko heteroskedastyczności i grube ogony. Na dodatek, parametry szacuje się oddzielnie dla lewego oraz prawego ogona rozkładu, co w najlepszy sposób pozwala uchwycić asymetrię rozkładu. Model ten jednak nie jest pozbawiony wad. Niejednoznaczność wyboru początku ogona rozkładu i jednocześnie niewielka liczba danych z ogona rozkładu jest dużą komplikacją zastosowań tego modelu, szczególnie w małych próbach. Z kolei drugi model EVT, tj. model maksimów blokowych jest niemal całkowicie pomijany w badaniach empirycznych, gdy rozważany jest krótki horyzont obserwacji. Powodem jest utrata obserwacji ekstremalnych, gdy znajdują się one w jednym bloku i konieczność wykorzystywania stosunkowo długich szeregów czasowych. H.N.E. Byström [2004] wykorzystał podejście McNeila i Frey'a dla modelu maksimów blokowych, stosując miesięczne bloki, z których wybierane są maksima.

W niniejszej pracy rozważono warunkowy model maksimów blokowych, chcąc zbadać jego przydatność do wyznaczania jednookresowych prognoz VaR, gdy parametry modelu są szacowane na podstawie małej próby. Zweryfikowano hipotezę, iż warunkowy model maksimów blokowych zwraca poprawne oszacowania VaR i może być alternatywą dla innych modeli do sporządzania prognoz jednookresowych. Weryfikację przeprowadzono na siedmiu światowych indeksach giełdowych w latach 2001-2013.

## 1. Model maksimów blokowych

Teoria wartości ekstremalnych ma swoje podstawy w pracy R.A. Fishera i H.C. Tippetta z 1928 r. Wykazali oni, iż uogólniony rozkład wartości ekstremalnych (*Generalized Extreme Value Distribution*, GEV) dla maksimów pełni analogiczną rolę jak rozkład normalny w centralnym twierdzeniu granicznym [Franke, Härdle, Hafner, 2011]:

**Twierdzenie Fishera i Tippetta.** *Niech  $X_1, X_2, \dots, X_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie (independently and identically distributed, i.i.d.) z dystrybuantą  $F$ , a  $M_n = \max \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ . Załóżmy, że istnieje ciąg stałych  $a_n > 0$  i  $b_n \in \mathbb{R}$ , takich, że:*

$$\mathbb{P}\{(M_n - b_n)/a_n \leq z\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} H(z)$$

to  $H$  jest uogólnionym rozkładem wartości ekstremalnych, którego dystrybuanta jest postaci:

$$H_{\xi}(z) = \exp\left\{-[1 + \xi z]^{-\frac{1}{\xi}}\right\} \text{ dla } 1 + \xi z > 0$$

gdzie:  $z > -\frac{1}{\xi}$  dla  $\xi > 0$ ,  $z < \frac{1}{\xi}$  dla  $\xi < 0$  i  $z \in \mathbb{R}$  dla  $\xi \rightarrow 0$ .

Model maksimów blokowych (*Block Maxima Model*, BMM) jest statystycznym narzędziem, pozwalającym na estymację rozkładu ekstremalnych wartości. Obserwacje ekstremalne (maksima) otrzymuje się poprzez podział ciągu  $n$  obserwacji na  $m$  równolicznych i rozłącznych bloków obserwacji długości  $k$  ( $n = m \cdot k$ ):

$$\{x_1, \dots, x_k\}, \{x_{k+1}, \dots, x_{2k}\}, \dots, \{x_{(m-1)k+1}, \dots, x_{mk}\}$$

W każdym z bloków wybierane są wartości maksymalne, generując podciąg maksimów  $z_1, z_2, \dots, z_m$ . W myśl twierdzenia Fishera-Tippeta rozkład GEV jest dopasowywany do właśnie tych maksimów.

Estymacji parametrów rozkładu GEV dokonuje się zwykle metodą największej wiarygodności. Dla  $\xi > -1/2$  estymatory największej wiarygodności posiadają wszystkie regularne asymptotyczne własności, tzn. są zgodne, efektywne i asymptotycznie normalne [Smith, 1985].

Nadrzędnym problemem w stosowaniu modelu maksimów blokowych jest właściwy wybór wielkości pojedynczego bloku, z którego wyznaczane są maksima. Bloki muszą być tak dobrane, by szereg maksimów był ciągiem zmiennych niezależnych, co można uzyskać biorąc odpowiednio dużą liczebność każdego z bloków. Będzie to jednak prowadzić do zmniejszania ich liczby, a tym samym zmniejszenia liczby obserwacji  $z_i$  i dużej wariancji otrzymanych estymatorów. Z kolei mała liczebność bloków może generować obciążoność estymatorów, gdyż do estymacji parametrów będą brane wartości z pobliża wartości centralnej rozkładu. Główną wadą metody BMM jest utrata obserwacji ekstremalnych, jeśli obserwacje takie występują w jednym bloku, dlatego dla poprawnej estymacji wymaga się stosunkowo długich szeregów czasowych obserwacji. Właściwy wybór wielkości bloku jest niezwykle problematyczny. J. Cotter [2006] stosuje bloki miesięczne, kwartalne i semestralne. Również A.J. McNeil [1999] dla pełnej analizy sugeruje zastosowanie bloków różnej wielkości oraz porównanie wyników. Z kolei P.F. Christoffersen, F.X. Diebold i T. Schuermann [1998] sugerują stosowanie bloków o liczebności 10-15 stóp zwrotu dla uzyskania obserwacji będących i.i.d. Ostatecznie, nie istnieje rozwiązanie optymalne tego problemu, a wybór długości bloku powinien zależeć od specyfiki prowadzonych badań.

## 2. EVT dla szeregów stacjonarnych

Stylizowane fakty, dotyczące finansowych szeregów czasowych wskazują, iż struktura empirycznych finansowych szeregów czasowych jest bardziej skomplikowana niż ciągu niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie. Większość wyników prawdziwych dla zmiennych i.i.d. w teorii wartości ekstremalnych udaje się jednak uogólnić na przypadek szeregów stacjonarnych. Kluczowe jest tu pojęcie „indeksu ekstremalnego” i twierdzenie Leadbettera z 1983 r. [Embrechts, Klüppelberg, Mikosch, 1999]:

**Twierdzenie Leadbettera.** Niech  $X_1, \dots, X_n$ , będzie szeregiem stacjonarnym i  $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n$ , będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie oraz  $\tilde{M}_n = \max\{\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \dots, \tilde{X}_n\}$ . Jeśli istnieje ciąg stałych  $a_n > 0$  i  $b_n \in \mathbb{R}$  i niezdegenerowany rozkład z dystrybuantą  $\tilde{H}$  takie, że:

$$\mathbb{P}\{(\tilde{M}_n - b_n)/a_n \leq z\} \rightarrow \tilde{H}(z), \text{ dla } n \rightarrow \infty$$

oraz jeśli spełniony jest warunek ograniczający istnienie zależności długookresowych w szeregu czasowym, dla każdego  $z$  takiego, że  $\tilde{H}(z) > 0$  i jeśli:

$$\mathbb{P}\{(M_n - b_n)/a_n \leq z\} \rightarrow H(z) \text{ dla } n \rightarrow \infty$$

$$\text{to } H(z) = \tilde{H}^\theta(z), \text{ dla pewnego } \theta \in [0,1].$$

Stałą  $\theta$  nazywamy indeksem ekstremalnym (*extremal index*) ciągu  $(X_n)$ . Indeks ekstremalny jest wielkością, która mierzy stopień grupowania ekstremów procesu stacjonarnego. Jest to odwrotność granicznej średniej liczby maksimum w bloku. Chodzi o liczbę przekroczeń pewnej wysokiej wartości  $u_n = a_n z + b_n$  w bloku, zawierającym przynajmniej jedno takie przekroczenie. Sposób wyznaczania tego indeksu nie jest jednoznaczny i istnieje wiele różnych sposobów jego estymacji<sup>1</sup>. W niniejszej pracy stosujemy estymator:  $\hat{\theta} = \frac{M}{N}$ , dla  $N$  – liczba przekroczeń wartości progowej  $u_n$ ,  $M$  – liczba bloków z co najmniej jednym przekroczeniem  $u_n$ .

## 3. Warunkowa VaR w modelu maksimumów blokowych

O ile rozkłady bezwarunkowe stóp zwrotu są właściwym narzędziem w analizie ryzyka inwestycji w dłuższym okresie, o tyle rozkłady warunkowe są dokładniejsze, gdy mamy do czynienia z analizą i zarządzaniem ryzykiem w krótkim okresie [Echaust, Just, 2013]. Pierwszą pracą wykorzystującą EVT oraz rozkłady warunkowe stóp zwrotu była praca McNeila i Frey’a [2000]. Au-

<sup>1</sup> Przegląd metod można znaleźć m.in. w pracach: [Embrechts, Klüppelberg, Mikosch, 1999; Navarrete-Ancona, Tawn, 2000; Segers, Ferro 2003].

torzy obliczali warunkową VaR i ES (*expected shortfall*) poprzez początkową filtrację szeregu stóp zwrotu modelem zmienności heteroskedastycznej AR-GARCH, a następnie stosowali narzędzia EVT do standaryzowanych reszt. Jako model EVT wykorzystywali model przekroczeń [por. Embrechts, Klüppelberg, Mikosch, 1999]. Byström [2004] przełożył podejście McNeila i Frey'a na model maksimów blokowych, konstruując prognozy warunkowej VaR w oparciu o ten model, który oznaczamy symbolem GARCH-BMM. W badaniach analizował rynek szwedzki (AFF indeks) i amerykański (DJIA indeks), a w prognozach wykorzystywał okno długości 1000 obserwacji i 25-dniowe bloki. Ze względu na długie okno obserwacji i niewiele danych z okresu bezpośrednio poprzedzającego prognozę, model ten posiada dużą bezwładność i w niezbyt efektywny sposób uwzględnia zjawisko starzenia się informacji. Z tego też względu nie znalazł się w obszarze zainteresowań badaczy rynków finansowych, a praca [Byström, 2004] jest jedyną znaną autorowi, wykorzystującą model GARCH-BMM. Pokażemy, że model ten może być szacowany na podstawie małej próby, a także może być z powodzeniem stosowany do sporządzania jednookresowych prognoz VaR.

Dwuetapową procedurę estymacji warunkowej VaR w modelu GARCH-BMM przedstawiono poniżej:

1. Należy dopasować model klasy AR-GARCH do danych. Korzystając z oszacowanego modelu należy wyznaczyć standaryzowane reszty:

$$(e_{t-n+1}, \dots, e_t)' = \left( \frac{x_{t-n+1} - \hat{\mu}_{t-n+1}}{\hat{\sigma}_{t-n+1}}, \dots, \frac{x_t - \hat{\mu}_t}{\hat{\sigma}_t} \right) \quad (1)$$

oraz prognozy  $\mu_{t+1}$  i  $\sigma_{t+1}$ .

2. Dla standaryzowanych reszt (1) oszacowujemy parametry rozkładu GEV, a następnie wyznaczamy kwantyl  $q_{1-\alpha}$  prawego ogona rozkładu reszt. Dla  $\xi \neq 0$  mamy:

$$\widehat{VaR}_{1-\alpha}^t = \hat{\mu}_{t+1} + \hat{\sigma}_{t+1} \left( \hat{\mu} - \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\xi}} \left[ 1 - \{-k \ln(1 - \alpha)\}^{-\hat{\xi}} \right] \right) \quad (2)$$

gdzie:  $\hat{\xi}$ ,  $\hat{\mu}$  i  $\hat{\sigma}$  są parametrami rozkładu GEV, oszacowanymi na podstawie pogrupowanych w bloki maksimów reszt  $e_{t-n+1}, \dots, e_t$ .

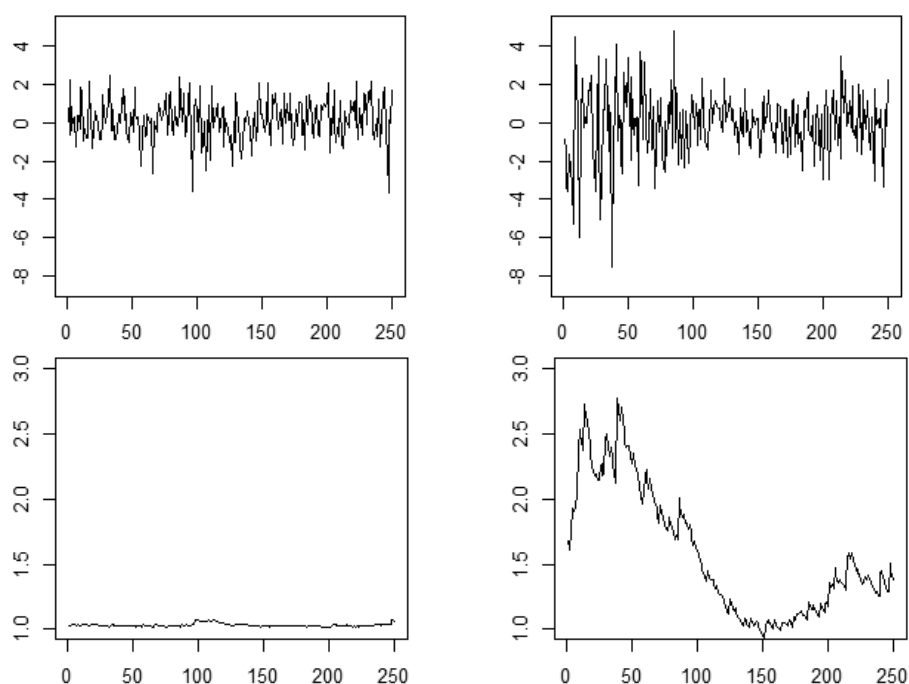
#### 4. Opis badań empirycznych

W tym punkcie przedstawione zostaną badania empiryczne nad poprawnością warunkowego modelu maksimów blokowych. Obliczenia przeprowadzono dla siedmiu indeksów giełdowych z różnych giełd światowych. Okres badań to początek 2000 r. do połowy 2013 r. Dla wszystkich indeksów daje to ponad 3300 stóp zwrotu. Bierzymy pod uwagę codzienne logarytmiczne stopy zwrotu. Podstawowe statystyki opisowe analizowanych szeregów przedstawia tab. 1.

**Tabela 1.** Statystyki opisowe badanych szeregów

	N	Min	Max	Średnia	Mediana	Odch. st.	Skośność	Kurtoza
<b>WIG20</b>	3383	-8,44	8,16	0,006	0,024	1,625	-0,132	2,194
<b>DJIA</b>	3398	-8,20	10,51	0,008	0,042	1,246	-0,054	7,505
<b>FTSE100</b>	3412	-9,27	9,38	-0,002	0,034	1,280	-0,145	5,771
<b>CAC40</b>	3447	-9,47	10,59	-0,013	0,021	1,556	0,032	4,531
<b>BOVESPA</b>	3339	-12,10	13,68	0,031	0,081	1,888	-0,112	3,835
<b>HANGSENG</b>	3330	-13,58	13,41	0,005	0,039	1,610	-0,068	7,522
<b>NIKKEI225</b>	3318	-12,11	13,24	-0,010	0,015	1,583	-0,434	6,371

Parametry modelu do obliczenia VaR z (2) szacujemy na podstawie rocznego (250 zwrotów), przesuwanego o jeden dzień, okna obserwacji. Jako model zmienności wybraliśmy model AR(1)-GARCH(1,1) z innowacjami o rozkładzie normalnym. Parametry rozkładu GEV obliczamy wyznaczając maksima na podstawie tygodniowych bloków stóp zwrotu. Taka długość bloku pozwala otrzymać 50 maksimów w ciągu roku. Wybór tak krótkiego bloku wymaga jednak uzasadnienia. Reszty modelu AR-GARCH powinny być białym szumem, a zatem nie powinno w tych szeregach występować zjawisko grupowania zmienności. Kompromis pomiędzy obciążeniem a wariancją estymatorów można więc osiągnąć przy mniejszej liczbie bloków niż dla surowych szeregów. Ponieważ rozważamy ponad 3 tys. takich okien obserwacji możemy dokładniej przeanalizować jedynie szczególne przypadki. Dla ilustracji wybrano dwa skrajne, dla indeksu WIG20. Pierwszy okres to okres bardzo niskiej zmienności na rynkach finansowych 8.10.2004-4.10.2005, a drugi 1.08.2011-27.07.2012, to początek ujawnienia się drugiej fali kryzysu finansowego, związanego z zadłużeniem krajów Europy. Wykresy stóp zwrotu i zmienności w obu okresach przedstawia rys. 1. W pierwszym okresie wykres zwrotów wygląda jak wykres białego szumu. Testy autokorelacji Ljunga Boxa i efektu ARCH Engle'a przedstawia tab. 2. Brak autokorelacji występuje w obu okresach, jednak wyraźną heteroskedastyczność warunkową obserwujemy w okresie drugim. Jak widać w tab. 2 efekt ten zostaje wyeliminowany w resztach modelu. Aby sprawdzić wrażliwość VaR na wybór długości bloków przeprowadzono obliczenia dla bloków liczących od 5 do 25 zwrotów. VaR szacowane są dla poziomu tolerancji 1% i 5%, dla lewych i prawych ogonów rozkładu.



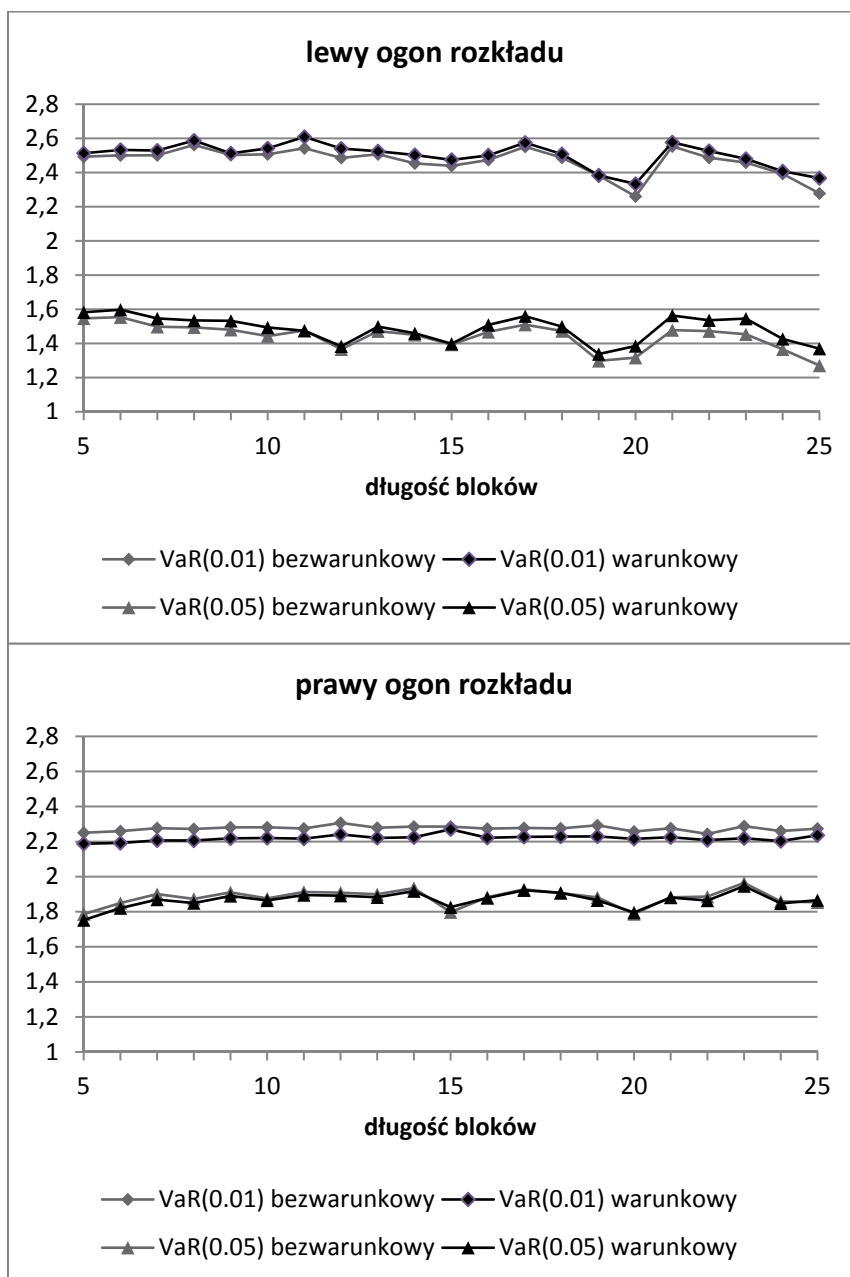
**Rys. 1.** Stopy zwrotu z indeksu WIG20 (u góry) i zmienność indeksu (u dołu) wyestymowane za pomocą modelu AR(1)-GARCH(1,1) w okresie małej zmienności 8.10.2004-4.10.2005 (lewy wykres), i dużej zmienności 1.08.2011-27.07.2012 (prawy wykres)

**Tabela 2.** Test autokorelacji i efektu ARCH dla stóp zwrotu z WIG20 i standaryzowanych reszt z procesu AR(1)-GARCH(1,1) w okresie małej zmienności 8.10.2004-4.10.2005 i dużej zmienności 1.08.2011-27.07.2012

	8.10.2004-4.10.2005		1.08.2011-27.07.2012	
	Ljung Box (5) test	ARCH LM (12) test	Ljung Box(5) test	ARCH LM (12) test
<b>WIG20</b>	3,12 (0,682)	16,25 (0,180)	3,68 (0,596)	32,77 (0,001)
<b>reszty</b>	2,48 (0,780)	15,58 (0,211)	1,72 (0,887)	8,34 (0,758)

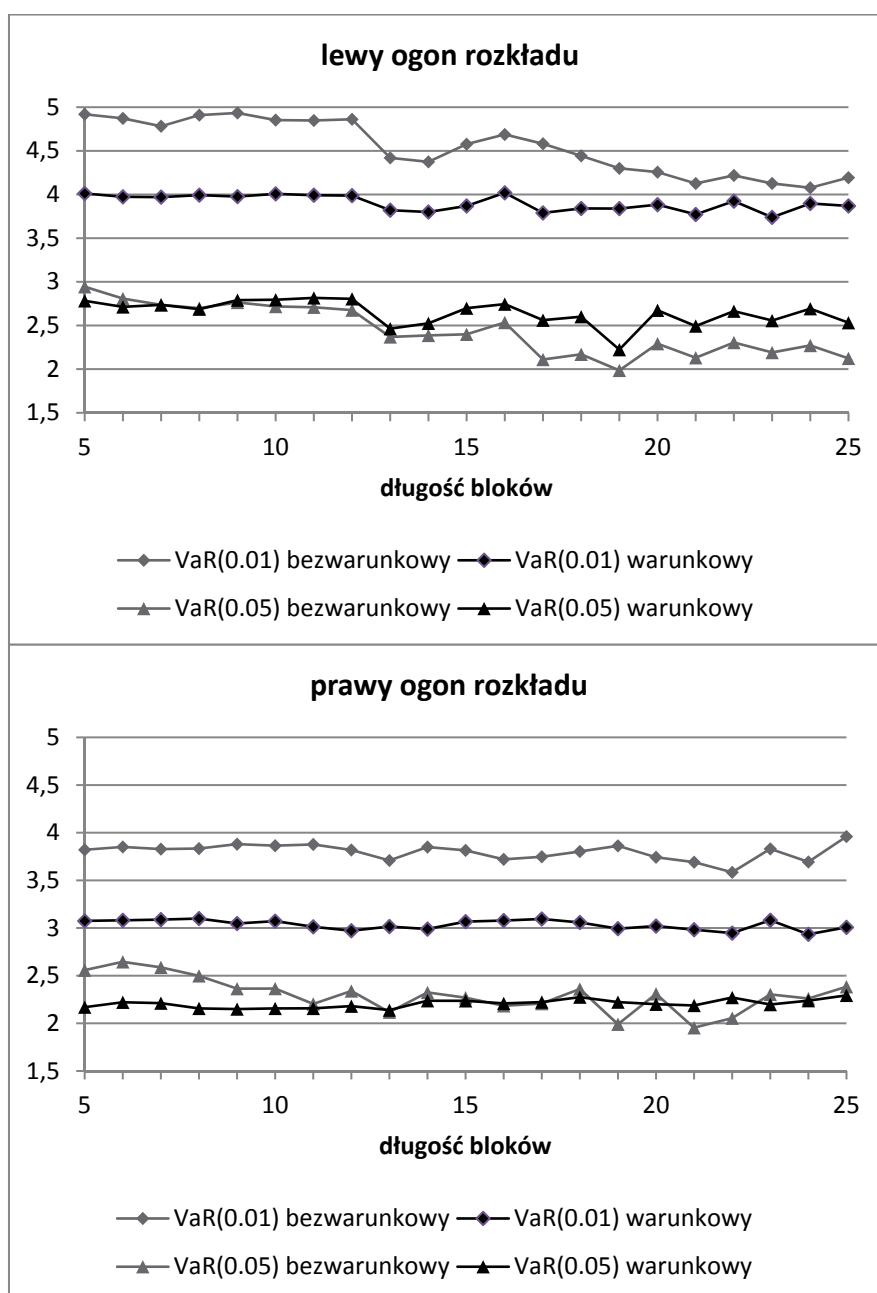
Dla porównania, obliczenia przeprowadzono zarówno dla surowych szeregów, jak i reszt modelu AR-GARCH. Wyniki przedstawiono na rys. 2 oraz 3.

W pierwszym okresie (8.10.2004-4.10.2005), wartości VaR niemal pokrywają się dla surowych szeregów stóp zwrotu i reszt. Wynika to z faktu, iż szereg jest szeregiem zmiennych i.i.d. Dla krótkich bloków zarówno dla prawego, jak i lewego ogona rozkładu otrzymujemy stabilne oszacowania VaR, niewiele różniące się przy zmianie długości bloku. Kiedy wydłużamy długość bloku do ok. 20 obserwacji, coraz bardziej daje się zauważyć niestabilność oszacowania VaR. Szczególnie widoczne jest to dla lewego ogona i VaR na poziomie tolerancji 5%.



**Rys. 2.** Prognoza VaR dla indeksu WIG20 obliczona na dzień 5.10.2005 r., wyestymowana na podstawie bezwarunkowego i warunkowego modelu maksymów blokowych w okresie małej zmienności (8.10.2004-4.10.2005)





**Rys. 3.** Prognoza VaR dla indeksu WIG20 obliczona na dzień 28.07.2012 r., wyestymowana na podstawie bezwarunkowego i warunkowego maksimów blokowych w okresie dużej zmienności (1.08.2011-27.07.2012)

W drugim rozważanym okresie (1.08.2011-27.07.2012) widać wyraźnie różnice wartości VaR dla obu typów szeregów. Oszacowania ryzyka dla surowego szeregu są bardzo wrażliwe na wybór długości bloku. Dla lewego ogona i VaR z poziomem tolerancji 1% różnią się niemal o jeden punkt procentowy. Są to zbyt znaczne wahania, aby uzyskać poprawne oszacowania wartości zagrożonej z tak niewielkim poziomem tolerancji. Zupełnie inną sytuację mamy w przypadku modelu warunkowego. Wartości VaR są w niewielkim stopniu wrażliwe na wybór długości bloku. Podobnie jak w pierwszym okresie, najbardziej niestabilne wyniki otrzymujemy dla VaR na poziomie tolerancji 5%, obliczonej dla lewego ogona rozkładu. Jeśli własność ta ma charakter ogólny, to może przełożyć się to na niewystarczającą trafność prognoz VaR generowanych przez model.

## 5. Wyniki badań

W tym punkcie przeprowadzona została analiza dokładności prognoz VaR wyznaczonych z modelu GARCH-BMM. W każdym oknie obserwacji oszacowano parametry modelu i obliczono prognozę VaR na jeden dzień do przodu ze wzoru (2). Mając oszacowania wartości zagrożonej i wartość zrealizowanej stopy zwrotu, można przeprowadzić testowanie wsteczne (*backtesting*) modelu. Jako wskaźnik jakości prognoz VaR przyjęto test liczby przekroczeń P. Kupca [Kupiec, 1995] i test ich niezależności P.F. Christoffersena [Christoffersen, 1998].

Wyniki obliczeń dla prezentowanych indeksów przedstawiono w tab. 3 oraz na rys. 4 i 5 dla indeksu WIG20. W dwóch pierwszych kolumnach tabeli przedstawiono oczekiwaną i rzeczywistą liczbę przekroczeń VaR. Kolejne kolumny zawierają wartości statystyk Kupca i Christoffersena oraz  $p$ -wartości w nawiasach. Wyniki uzyskane dla VaR z poziomem tolerancji 1% można uznać za poprawne. Wyjątkiem jest indeks WIG20 dla pozycji dłuższej, dla którego oba testy odrzuciły hipotezę zerową o poprawności modelu. Również w przypadku indeksu Bovespa dla prawego ogona wystąpiła niezgodność liczby przekroczeń z założoną, choć test niezależności przekroczeń wskazał na poprawność modelu. Znacznie słabsze wyniki otrzymano dla VaR 5% w lewym ogonie rozkładu. Tylko dla trzech z siedmiu indeksów, w wyniku testowania wstecznego, potwierdzono poprawność modelu. O możliwości pojawienia się błędów w oszacowaniach VaR na poziomie tolerancji 5% w lewym ogonie rozkładu sugerowaliśmy już w podrozdziale 4. Wyniki takie pozwalają szukać przyczyn słabości tego modelu w występowaniu zależności w wartościach ekstremalnych. Pierwszym argumentem wyjaśniającym tę hipotezę jest fakt, iż brak poprawności modelu wynika z niedoszacowania wartości zagrożonej i częstszego niż założono przekraczania jej poziomu. W lewych ogonach, kumulują się ekstremalne zwroty,

wynikające ze spadków indeksów, które w okresach krachów giełdowych są wyższe oraz częstsze w krótkim przedziale czasu niż ekstremalne wzrosty w okresach boomów. To może powodować, że model zmienności w niewystarczającym stopniu oczyścił dane z grupowania zmienności i ekstremalne ujemne reszty modelu grupują się w jednym bloku. Drugi argument wynika z tego, iż brak poprawności modelu pojawia się dla VaR z niższym poziomem tolerancji. Znany jest fakt [Danielsson, de Vries, 1997], że zależności ekstremalne znikają wraz z coraz wyższym poziomem wartości progowej  $u_n$ . Jeśli hipoteza ta okaże się słuszna wykorzystanie indeksu ekstremalnego powinno poprawić wyniki prognoz VaR, szczególnie dla niższych poziomów tolerancji. W tab. 4 przedstawiono wyniki z uwzględnieniem indeksu ekstremalnego. Ponownych obliczeń dokonano jedynie w przypadkach odrzucenia hipotezy o poprawności modelu (tab. 3), gdy ryzyko mierzone poprzez VaR było niedoszacowane. Wykorzystanie indeksu ekstremalnego podnosi poziom szacunku wartości zagrożonej, obniżając w ten sposób rzeczywistą liczbę przekroczeń. Wprowadzenie indeksu ekstremalnego pozwoliło znacznie poprawić dokładność szacunków VaR na poziomie tolerancji 5%. Średni poziom indeksu ekstremalnego wyraźnie różni się od jedności, wskazując na występujące zależności w zwrotach ekstremalnych. Niemal we wszystkich przypadkach uzyskano poprawność modelu VaR. Wyjątek stanowi indeks WIG20 w lewym ogonie rozkładu i VaR na poziomie tolerancji 5% oraz Bovespa w prawym ogonie oraz VaR na poziomie tolerancji 1%. W pierwszym przypadku wyraźnie zmniejszyła się liczba przekroczeń, która niemal idealnie odpowiada założonej. Niestety model nie zwraca prognoz VaR, dla których przekroczenia są niezależne, dlatego test Christoffersena odrzucił jego poprawność w tym przypadku. VaR na poziomie tolerancji 1% niewiele zmienia się po wprowadzeniu do rozważań indeksu ekstremalnego, ponieważ zwroty ekstremalne są w przybliżeniu niezależne. Z tego powodu tylko w niewielkim stopniu udało się poprawić dokładność VaR na poziomie tolerancji 1%.

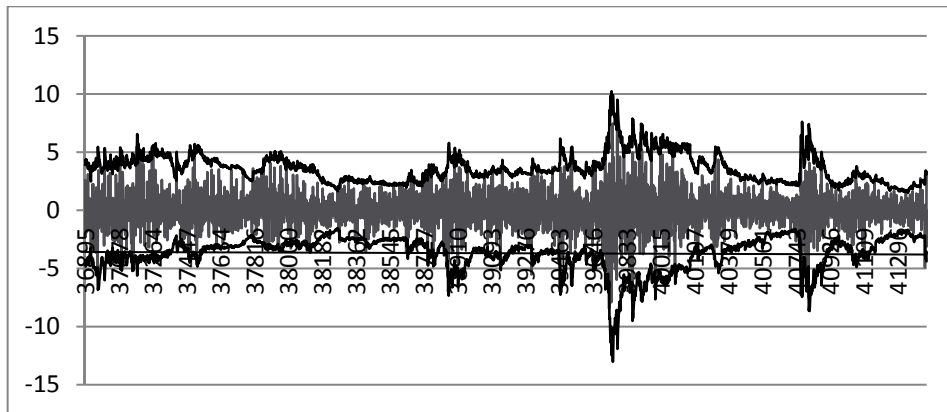
**Tabela 3.** Testowanie poprawności modelu VaR na poziomie tolerancji 1% (u góry) i 5% (u dołu) dla badanych indeksów

1%	Lewy ogon				Prawy ogon			
	E	L	LR K	LR CH	E	L	LR K	LR CH
<b>WIG20</b>	31	43	<b>3,94</b> (0,047)	<b>6,1</b> (0,047)	31	37	0,98 (0,321)	1,53 (0,465)
<b>DJIA</b>	31	43	3,82 (0,051)	5,99 (0,050)	31	40	2,15 (0,143)	3,18 (0,204)
<b>FTSE100</b>	31	41	2,75 (0,097)	3,08 (0,214)	31	41	2,75 (0,097)	3,84 (0,146)
<b>CAC40</b>	31	40	1,89 (0,170)	2,28 (0,319)	31	39	1,46 (0,227)	1,91 (0,385)
<b>BOVESPA</b>	30	39	1,99 (0,159)	2,401 (0,301)	30	43	<b>4,27</b> (0,038)	5,49 (0,064)
<b>HANGSENG</b>	30	35	0,56 (0,456)	1,36 (0,506)	30	34	0,33 (0,567)	1,09 (0,581)
<b>NIKKEI225</b>	30	36	0,88 (0,347)	1,470 (0,480)	30	32	0,06 (0,812)	0,73 (0,694)

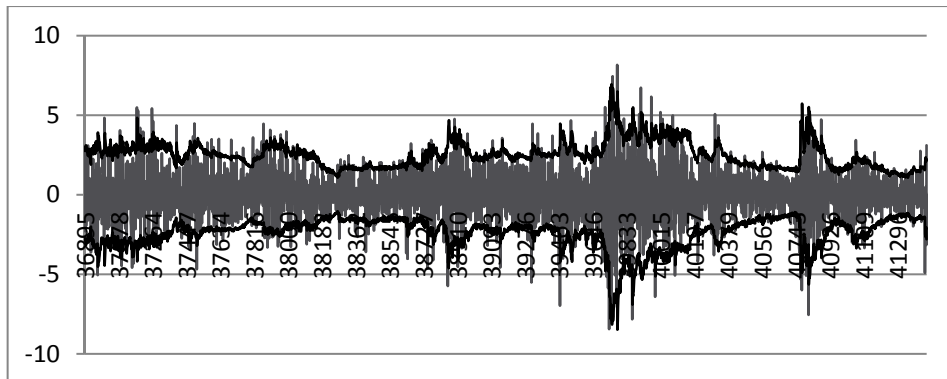
cd. tabeli 3

5%	Lewy ogon				Prawy ogon			
	E	L	LR K	LR CH	E	L	LR K	LR CH
WIG20	156	175	2,20 (0,138)	<b>10,07</b> (0,007)	156	163	0,27 (0,602)	0,56 (0,757)
DJIA	157	177	2,47 (0,116)	3,44 (0,179)	157	164	0,29 (0,592)	3,58 (0,167)
FTSE100	156	175	2,20 (0,138)	4,02 (0,133)	156	145	0,93 (0,336)	<b>9,03</b> (0,011)
CAC40	159	186	<b>4,29</b> (0,038)	5,19 (0,075)	159	142	2,18 (0,142)	4,49 (0,105)
BOVESPA	154	181	<b>4,56</b> (0,033)	5,69 (0,058)	154	146	0,50 (0,482)	5,70 (0,058)
HANGSENG	153	179	<b>4,09</b> (0,043)	4,35 (0,114)	153	154	0,00 (0,997)	0,43 (0,808)
NIKKEI225	153	166	1,06 (0,303)	1,588 (0,452)	153	153	0,00 (0,973)	0,42 (0,812)

Nota: Pogrubiona czcionka oznacza odrzucenie hipotezy zerowej na poziomie istotności 5%.



Rys. 4. VaR na poziomie tolerancji 1% dla indeksu WIG20



Rys. 5. VaR na poziomie tolerancji 5% dla indeksu WIG20

**Tabela 4.** Testowanie poprawności modelu VaR na poziomie tolerancji 1% (u góry) i 5% (u dołu) dla badanych indeksów z uwzględnieniem indeksu ekstremalnego  $\theta$ 

1%	Lewy ogon					Prawy ogon			
	E	L	$\bar{\theta}$	LR K	LR CH	E	L $\bar{\theta}$	LR K	LR CH
<b>WIG20</b>	31	42	0,978	3,32 (0,068)	5,62 (0,060)				
<b>BOVESPA</b>						30	43	0,989	<b>4,27</b> (0,038) 5,49 (0,064)

5%	Lewy ogon					Prawy ogon			
	E	L	$\bar{\theta}$	LR K	LR CH	E	L $\bar{\theta}$	LR K	LR CH
<b>WIG20</b>	156	154	0,851	0,05 (0,831)	<b>8,14</b> (0,017)				
<b>CAC40</b>	159	167	0,906	0,33 (0,564)	0,74 (0,692)				
<b>BOVESPA</b>	154	166	0,884	0,89 (0,346)	1,03 (0,598)				
<b>HANGSENG</b>	153	157	0,890	0,063 (0,801)	3,02 (0,221)				

Nota: Pogrubiona czcionka oznacza odrzucenie hipotezy zerowej na poziomie istotności 5%.

## Podsumowanie

W pracy przedstawiono badania empiryczne dotyczące wykorzystania warunkowego modelu maksimów blokowych do sporządzania prognoz VaR poza próbą. Wykazano, iż estymację parametrów modelu można przeprowadzić, wykorzystując niewielką (250 obserwacji) próbę obserwacji, dzięki czemu model szybko reaguje na aktualne zmiany rynkowe. Dodatkową zaletą modelu jest możliwość wykorzystania indeksu ekstremalnego, który pozwala na modelowanie stacjonarnych szeregów czasowych. Szczególnie przydatne jest to wobec konieczności obliczania VaR na relatywnie niskim poziomie tolerancji, np. 5%, gdzie występują istotne zależności w wartościach ekstremalnych stóp zwrotu. Badania empiryczne przeprowadzone na siedmiu szeregach czasowych w 12,5-letnim okresie potwierdziły zdolność modelu do uchwycenia podstawowych własności finansowych szeregów czasowych jak grube ogony i skupiska zmienności. Dodatkowo, estymacja parametrów modelu oddzielnie dla lewego i prawego ogona rozkładu pozwala na dużą elastyczność w uchwyceniu własności skośności rozkładu. Dalsze badania w tym zakresie powinny dotyczyć porównania dokładności modelu GARCH-BMM z innymi modelami warunkowymi.

## Literatura

- Byström H.N.E. (2004), *Managing Extreme Risks in Tranquil and Volatile Markets Using Conditional Extreme Value Theory*, "International Review of Financial Analysis", Vol. 13(2).
- Christoffersen P.F. (1998), *Evaluating Interval Forecasts*, "International Economic Review", No. 39.
- Christoffersen P.F., Diebold F.X., Schuermann T. (1998), *Horizon Problems and Extreme Events in Financial Risk Management*, Working Paper Series, Wharton Financial Institutions Centre, Philadelphia.
- Cotter J. (2006), *Extreme Value Estimation of Boom and Crash Statistics*, "The European Journal of Finance", No. 12.
- Danielsson J., Vries C.G. de (1997), *Extreme Returns, Tail Estimation and Value-at-Risk. Working Paper*, London School of Economics, London.
- Echaust K., Just M. (2013), *Conditional versus Unconditional Models for VaR Measurement*, <http://ssrn.com/abstract=2365588> (dostęp: 21.12.2013).
- Embrechts P., Klüppelberg C., Mikosch T. (1999), *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance, Application of Mathematics*, Springer, New York.
- Franke J., Härdle W.K., Hafner C.M. (2011), *Statistics of Financial Markets*, Springer, New York 2011.
- Kupiec P. (1995), *Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Management Models*, "Journal of Derivatives", Vol. 3.
- McNeil A.J. (1999), *Extreme Value Theory for Risk Managers*, Internal Modelling and CADII, RISK Books.
- McNeil A.J., Frey R. (2000), *Estimation of Tail-Related Risk for Heteroscedastic Financial Time Series: An Extreme Value Approach*, "Journal of Empirical Finance", No. 7.
- Navarette-Ancona M.A., Tawn J.A. (2000), *A Comparison of Methods for Estimating the Extremal Index*, "Extremes", No. 3.
- Segers R., Ferro C.A.T. (2003), *Inference for Cluster of Extreme Values*, "Journal of the Royal Society", Series B, Vol. 6(2).
- Smith R.L. (1985), *Maximum Likelihood Estimation in Class of Nonregular Cases*, "Biometrika", No. 72.

### APPLYING THE CONDITIONAL BLOCK MAXIMA MODEL TO VALUE AT RISK MEASUREMENT

**Summary:** The model under consideration is conditional block maxima model. In this paper the usefulness of the model to determine one-ahead forecast VaR is taken into account, when the model parameters are estimated in small sample. The hypothesis, that conditional block maxima model is correct to estimate VaR forecasts is verified. We carried out an empirical analysis on seven world stock market indices in the years of 2001-2013. The survey confirmed, that the model is correct in terms of number and independence of VaR exceedances and can be a good alternative to other often used models.

**Keywords:** Value at Risk, block maxima model, GARCH.