



Anna Janiga-Ćmiel

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach
Wydział Zarządzania
Katedra Matematyki
anna.janiga-cmiel@ue.katowice.pl

ZASTOSOWANIE METODY SYMULACJI DYSKRETNEJ DO OPTYMALIZACJI PODEJMOWANYCH DECYZJI EKONOMICZNYCH

Streszczenie: Głównym celem artykułu jest zastosowanie metody symulacji dyskretnej do analizy wybranej produkcji. Omówiono technikę modelowania i symulacji dyskretnej zdarzeń, dotyczącą ich porządkowania według narzuconych przez badacza kryteriów.

Słowa kluczowe: symulacja dyskretna, analiza jakości produkcji.

Wprowadzenie

Metody symulacyjne stosowane są do opisu badania i analizy systemów gospodarczych i społecznych. Procesy symulacyjne sięgają czasów drugiej wojny światowej, kiedy to zaczęto stosować nowe podejścia badawcze. Stanowiły podstawę modelowania matematycznego procesów rzeczywistych, jednak zbyt złożonych, by ująć rozwiązanie za pomocą rozwiązań analitycznych. Obecne zastosowanie metod jest obszerne, uwzględniane metody stosowane są bowiem nie tylko w matematyce czy fizyce, ale również w chemii, naukach ekonomicznych, naukach przyrodniczych, naukach medycznych, w praktyce finansowej [Mielczarek, 2009]. Główną ich zaletą jest brak ograniczeń dotyczących struktury i stopnia skomplikowania analizowanego systemu.

Symulacja jest bardzo ciekawym i szczególnym narzędziem badawczym, nie musi bowiem stanowić jednego podejścia, tylko zbiór metod i technik, które

naśladują działanie badanego systemu. Stawiane w analizie cele stanowią wypadkową oczekiwań badacza i prowadzonych przez niego doświadczeń [Zeigler, Praehofer, Kim, 2000]. Wymagane wówczas jest posiadanie umiejętności przewidywania dalszego rozwoju procesów. Chcąc przewidzieć kształtowanie się rozwoju zjawiska w przyszłości, należy sprecyzować dokładny model ukształtowania się rozwoju tego zjawiska lub przeprowadzić badanie symulacyjne. Model w najszerszym i najprostszym ujęciu stanowi przybliżenie badanej rzeczywistości [Zeigler, Praehofer, Kim, 2000]. Symulacja to działanie imitujące przebieg procesu. Modelowanie i symulacja wzajemnie się uzupełniają i wspomagają. Często do wyznaczenia prognoz stosujemy zarówno modelowanie, jak i symulacje. Modelować można zjawiska dyskretne i ciągłe [Gajda, 2001]. Modelowanie dyskretne stosujemy zazwyczaj w procesach mikroekonomicznych, natomiast modelowanie procesów ciągłych można stosować zarówno w mikro, jak i makroekonomii. Wówczas punktem wyjścia procesu symulacji jest model ekonometryczny.

1. Symulacja

Symulacja stanowi imitowanie przebiegu procesu, realizowana jest najczęściej jako badanie zmienności zjawiska przy upływie czasu. Wyniki symulacji stanowią w wielu przypadkach podstawę podejmowania decyzji gospodarczych [Gajda, 2001]. Celem badań symulacyjnych jest przeprowadzenie eksperymentu przebiegu złożonego zjawiska przy upływie czasu. Jeżeli analiza dotyczy jednego momentu to badamy zachowanie się obiektów w wyniku zmiany wartości jego cech. Można również symulację uwzględniać dokonując kolejno zmian obiektów, wtedy badamy realizację zjawiska w poszczególnych dopuszczonych do badania obiektach. W procesie symulacji wyróżniamy zmienne decyzyjne, które traktujemy jako przyczyny i skutek działania tych przyczyn. Często wystarczy wyznaczenie postaci funkcyjnej:

$$y_t = f(x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{kt}) \quad (1)$$

Powyższe równanie pomocne jest w wykryciu kształtowania się skutku y_t pod wpływem czynników x_{it} dla $i = 1, \dots, k$, $t = 1, \dots, T$. W celu zaobserwowania reakcji dokonujemy wyboru próby losowej, na podstawie której wyznaczamy odpowiedni model. W zależności od tego, czy w modelu symulacyjnym badane zmienne są losowe, czy nielosowe mamy do czynienia z symulacją stochastyczną lub deterministyczną [Gajda, 2001].

2. Podejście systemowe do procesów symulacyjnych dla procesów dyskretnych

W zakresie symulacji dyskretnych wyróżniamy cztery podejścia. Pierwsze z nich to metoda planowania zdarzeń [Gajda, 2001]. W metodzie tej każdemu etapowi dokonywanej działalności przyporządkowujemy następstwo, które jest skutkiem realizacji zjawiska w dotychczasowych etapach. Można również analizować szczegółowy opis czynności, jakie należy wykonać, aby kontynuować realizację zjawiska.

Drugie podejście to metoda przeglądu i wyboru działań, które w momencie zakończenia pewnej czynności powinny być w toku dalszych badań realizowane. Najczęściej definiuje się kontynuację dalszej realizacji odpowiednio: oczekiwaną, pesymistyczną oraz optymistyczną. Realizacja oczekiwana wyznaczana jest przez stany przeciętne, pesymistyczna i optymistyczna przez stany zjawiska odbiegające od przeciętnych. W realizacji optymistycznej uwzględniamy stany korzystniejsze od oczekiwanych. Natomiast w realizacji pesymistycznej uwzględniamy analizę zjawiska przy stanach gorszych niż oczekiwane.

Trzecia z metod symulacyjnych dotyczy interakcji procesów i stanowi połączenie dwóch wcześniej przedstawionych metod, to znaczy planowania przeglądu i wyboru działań. Rozpatrywane działania badane symulacyjnie podlegają grupowaniu w zależności od tego, kiedy się pojawiają i kiedy zanikają.

Ostatnia z omawianych metod, to znaczy analizy zdarzeń, jest najczęściej stosowaną metodą. Stanowi połączenie wymienionych dwóch wcześniejszych metod, dotyczy bowiem planowania zdarzeń i interakcji procesów. Celem tej metody jest pozyskanie informacji, które w każdej sytuacji, w dowolnym momencie pozwolą ocenić słuszność podjętej decyzji, jednocześnie dokonując oceny skutków *ex post* i *ex ante*.

3. Symulacja dyskretna

Symulacja dyskretna dotyczy procesów krokowych scharakteryzowanych przez dowolną liczbę zmiennych, przy czym każda z tych zmiennych może być kształtowana przez dowolną liczbę czynników [Gajda, 2001]. Model symulacyjny można przedstawić wówczas za pomocą układu równań:

$$\begin{cases} z_1 = f(x_1, \dots, x_k, z_2, \dots, z_m) \\ z_2 = f(x_1, \dots, x_k, z_1, z_3, \dots, z_m) \\ \vdots \\ z_m = f(x_1, \dots, x_k, z_1, \dots, z_{m-1}) \end{cases} \quad (2)$$

Jest to zapis funkcyjny m -równaniowy, w którym wyróżniamy k -czynników X kształtujących badane zjawisko i m -czynników Z , które przez czynnik X są kształtowane. Dopuszcza się również, by każdy z czynników Z był kształtowany przez pozostałe spośród czynników Z . Model powyższy może stanowić opis różnorodnych zjawisk ekonomicznych. Zaprezentowany wyżej m -równaniowy model symulacyjny można przedstawić w postaci liniowego modelu prawdopodobieństwa, w którym czynniki zdeterminowane Z_1, \dots, Z_m można zapisać w postaci:

$$z_\tau = \sum_{s=1}^k \beta_s X_s + \sum_{t=1}^m \alpha_t Z_t + \gamma_0 + \varepsilon_t, \quad \tau=1, \dots, m, \quad s=1, \dots, k, \quad t=1, \dots, m, \quad \tau \neq t. \quad (3)$$

W modelu tym Z_t to czynniki, które zostały ukształtowane wtórnie przez czynniki ukształtowane pierwotnie Z_t . Natomiast Z_τ to zmienne endogeniczne oznaczające jedną spośród zmiennych Z_t , które również należy wprowadzić do modelu jako czynniki egzogeniczne. Zmienne X_t, Z_t można zdefiniować na różne sposoby. Mogą to być zmienne dychotomiczne przyjmujące wartości 0 i 1, co oznacza, że występuje usterka lub jej nie ma. Mogą to być zmienne wielowartościowe, w których uwzględnimy więcej wariantów charakteryzujących badane sytuacje.

W najprostszym ujęciu tego modelu można wprowadzić k -zmiennych X_1, \dots, X_k i każdą z nich określić formułą wariantową uwzględniającą kilka sposobów przyjętych wariantów: $Z = Z_1 + \dots + X_k$. Wówczas wszystkie parametry modelu $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k = 1$ oraz $\alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$. Natomiast γ_0 przyjmuje wartość zero, czyli będzie to model bez wyrazu wolnego.

W przedstawionym przykładzie modelu wynik analizy uwzględniający podjęcie decyzji ujęty jest w postaci zmiennej $Z = X_1 + X_2$. Całość rozpatrywanej produkcji ze względu na wartość Z podlega ocenie. Wyznaczamy trzy grupy produktów. Grupa pierwsza to wyroby z małą liczbą usterek, niższą niż dolna granica przedziału wartości typowych:

$$S_1 = \{x_i : 0 \leq x_i < \bar{x} - S_x\}. \quad (4)$$

Wyroby te można doprowadzić do stanu wyjściowego – poprawnego. Grupę drugą stanowią wyroby o typowej ilości usterek – dla których ilość usterek X_i mieści się w przedziale:

$$S_2 = \{x_i : \bar{x} - S_x \leq x_i \leq \bar{x} + S_x\}. \quad (5)$$

Trzecia grupa to wyroby o dużej liczbie usterek, wyższej od ilości usterek typowych:

$$S_3 = \{x_i; x_i > \bar{x} + S_x\}. \quad (6)$$

Funkcję $g_\tau(x_\tau) = Z_\tau = X_{1\tau} + X_{2\tau}$ traktujemy jako funkcję dyskryminacyjną i na jej podstawie kontrola jakości może kierować poszczególne wyroby do określonych grup. Wynikiem przeprowadzonej analizy symulacyjnej są trzy grupy czynników kształtujących wadliwość wyborów i są to grupy zdefiniowane następująco:

$$x_i \in S_1 \Leftrightarrow g(x_i) \in (0, \bar{x} - S_x), \quad (7)$$

$$x_i \in S_2 \Leftrightarrow g(x_i) \in (\bar{x} - S_x, \bar{x} + S_x), \quad (8)$$

$$x_i \in S_3 \Leftrightarrow g(x_i) \in (\bar{x} + S_x, Z_w), \quad (9)$$

gdzie w to ilość wariantów ujętych łącznie.

4. Przykład empiryczny

Przedstawiony m -równaniowy model (2) zawężimy w rozpatrywanym przykładzie do jednego równania, uwzględniając dwa czynniki kształtujące zmienną Z . Model ten zostanie ujęty w postaci:

$$z = x_1 + x_2 \quad (10)$$

W związku z powyższym zmienną Z kształtują dwa czynniki X_1, X_2 i są one wyłącznie składowymi zmiennej Z . Analizowany przykład dotyczy firmy działającej na polskim rynku i zajmującej się produkcją kuchenek gazowo-elektrycznych. Podczas badania jakości wyrobów w analizowanej firmie, pracownicy spotykają się z dużą ilością wad jakimi są obarczone wyroby. Do najczęściej wykrywanych usterek zalicza się usterki piekarnika oraz usterki palników. Usterki piekarnika, których jest pięć wariantów, oznaczamy jako cechę A, natomiast usterki spotykane w wadliwym działaniu palnika stanowią cechę B. Dla cechy A wyróżniono 5 wariantów usterek, dla cechy B zgłoszenia reklamacyjne pogrupowano w 3 grupy usterek. Wylosowano próbę stu kuchenek gazowych spośród tych, które były obciążone dwoma rodzajami usterek.

Usterki zaliczone do wad piekarnika, czyli do cechy A, pogrupowano według rodzajów od 1-5, przyporządkowując poszczególnym wariantom odpo-

wiednią liczbę usterek. Z kolei w podobny sposób pogrupowano wykazane usterki dotyczące palnika, warianty w tym przypadku ponumerowano od 6-8 i zliczono ilość tych wariantów. Rozkłady poszczególnych wariantów przedstawiają zaprezentowane poniżej tabele.

Tabela 1. Właściwość A i właściwość B. Warianty poszczególnych usterek i liczebności w badanej próbie

6	n_i	Właściwość B X_{2i}	n_i
1	6	6	25
2	24	7	50
3	45	8	25
4	15	Suma	100
5	10		
Suma	100		

W pierwszym etapie badania wyznaczamy typowe stany cech A i B. W tym celu wyliczamy wartości średnie \bar{x} , \bar{y} , wariancje S_x^2 , S_y^2 i odchylenia standardowe S_x , S_y . Przedziały typowe badanych cech zastosujemy do oceny produkcji realizowanej, aby sprawdzić, czy wymagana produkcja należy do zakresu dominującego.

Tabela 2. Statystyka opisowa

1	2	3	4
X_i	n_i	$n_i X_i$	$n_i X_i^2$
1	6	6	6
2	24	48	96
3	45	135	405
4	15	60	240
5	10	50	250
Sumy	100	299	997
Średnia \bar{x}	3		10
Wariancja S_x^2	1	S_x	1
1	2	3	4
Y_i	n_i	$n_i Y_i$	$n_i Y_i^2$
6	25	150	900
7	50	350	2450
8	25	200	1600
Sumy	100	700	4950
Średnia \bar{y}	7		49,5
Wariancja S_y^2	0,5	S_y	0,7

Parametry rozkładów zmiennej X i zmiennej Y wynoszą [Ostasiewicz, Rusnak, Siedlecka, 2006]:

$$\text{dla cechy A: } \bar{X} = 3 \quad S_x = 1,$$

dla cechy B: $\bar{Y} = 6,9$, $\bar{Y} = 7$ i $S_y = 0,7$,

gdzie odpowiednio wyznaczamy:

$$x_{typ} \in (\bar{x} - S_x, \bar{x} + S_x)$$

$$A_{typ} \in (2,4) \text{ oraz } B_{typ} \in (6,3; 7,7).$$

Wyszczególnione ilości usterek będziemy rozpatrywać jako typowe. Natomiast powyżej wyznaczonej wartości 11 oraz poniżej wartości 8 otrzymamy liczby usterek, które będziemy uwzględniać jako nietypowe. Stwierdzono, że jedynie dla $Z = X + Y \leq 11$ naprawa pieca przed jego sprzedażą jest opłacalna i w związku z tym należy na podstawie przedstawionej próby wykonać analizę, która dostarczy odpowiedzi na pytanie: czy naprawa kuchenek z łączną liczbą usterek od 1 do 11 jest opłacalna.

Tabela 3. Empiryczny rozkład prawdopodobieństwa wykrytych liczb usterek (zmienna X)

1	5	6	7
X_i	p_i	n_{icum}	P_{icum}
1	0,06	6	0,06
2	0,24	30	0,3
3	0,45	75	0,75
4	0,15	90	0,9
5	0,1	100	1

Tabela 4. Empiryczny rozkład prawdopodobieństwa wykrytych liczb usterek (zmienna Y)

1	5	6	7
Y_i	p_i	n_{icum}	P_{icum}
6	0,25	25	0,25
7	0,5	75	0,75
8	0,25	100	1

Rozpatrywane zmienne, których wartości liczbowe przedstawiono w tabelach 3 i 4, zostaną poddane zweryfikowaniu ich rozkładów prawdopodobieństw w celu sprawdzenia, czy ich rozkłady są jednakowe. W powyższych tabelach za pomocą p_i oznaczono empiryczny rozkład prawdopodobieństwa. Liczebności empiryczne n_i w kolumnie 6 kumulujemy oraz wyznaczamy wartość skumulowanego prawdopodobieństwa. W kolejnym kroku wyznaczamy rozkłady prawdopodobieństwa obu zmiennych zaprezentowane w tabelach 5 i 6, a następnie generujemy wyznaczone wartości zmiennej losowej.

Tabela 5. Rozkład prawdopodobieństwa (zmienna X)

8	9	10
$n_{teorcum}$	p_{teor}	χ^2
2	0,1	0,025
3	0,15	0,067
10	0,5	0,005
2	0,1	0,025
3	0,15	0,017
20		0,138
		$\chi^{2*} = 9,49$

Tabela 6. Rozkład prawdopodobieństwa (zmienna Y)

8	9	10
$n_{teorcum}$	p_{teor}	χ^2
6	0,3	0
9	0,45	0,272
5	0,25	2,250
20	1	2,522
		$\chi^{2*} = 5,991$

W kolumnach 8 i 9 w tabeli 6 przedstawiono rozkłady teoretyczne prawdopodobieństwa obu zmiennych, a następnie porównano je z wyznaczoną wartością χ^2 . Na podstawie uzyskanych wyników zauważamy, że wyznaczone wartości dla obu statystyk nie przekraczają wartości krytycznej. Zarówno jedna, jak i druga zmienna charakteryzują się jednakowym rozkładem, zatem możemy sumować ich wartości. Wyznaczamy liczebności teoretyczne otrzymane na podstawie przebiegu symulacji przez zliczenie wartości w kolumnach trzy oraz pięć. Wartość empiryczna χ^2 dla danej zmiennej X wynosi 0,138, przy wartości krytycznej 9,488. Natomiast wartość empiryczna χ^2 dla Y wynosi 2,522 przy wartości krytycznej 5,991. Widzimy, że wartości empiryczne χ^2 są niższe od wartości teoretycznych. Potwierdza to zgodność rozkładów empirycznych i teoretycznych.

Spośród otrzymanych dziesięciu kolumn wartości zmiennej losowej tworzymy ciągi wartości zmiennej losowej dla obu zmiennych, zawierających po dwadzieścia liczb losowych. Następnie wyznaczamy rozkład empiryczny zmiennej Z, wypisując kolejno jej wartości od 7 do 13, a następnie zliczając ich ilość. Interesuje nas wartość zmiennej $z \leq 11$, ponieważ 11 to górna granica przedziału typowych wartości zmiennej Z.

Tabela 7. Generator losowy wartości zmiennej X oraz zmiennej Y (wybrane kolumny)

Procesy	Wartości losowe	X	Wartości losowe	Y	Z = X + Y
1	0,46	3	0,41	7	10
2	0,62	3	0,24	6	9
3	0,07	2	0,98	8	10
4	0,53	3	0,07	6	9
5	0,04	1	0,68	7	8
6	0,96	5	0,87	8	13
7	0,39	3	0,34	7	10
8	0,51	3	0,95	8	11
9	0,21	2	0,22	6	8
10	0,41	3	0,48	7	10
1	0,77	4	0,03	6	10
2	0,41	3	0,57	7	10
3	0,002	1	0,021	6	7
4	0,1	2	0,32	7	9
5	0,97	5	0,92	8	13
6	0,73	3	0,88	8	11
7	0,95	5	0,34	7	12
8	0,82	4	0,4	7	11
9	0,65	3	0,56	7	10
10	0,46	3	0,04	6	9

Wyznaczamy rozkład empiryczny zmiennej Z.

Tabela 8. Rozkład empiryczny zmiennej Z

i	Z _i	n _i
1	7	1
2	8	2
3	9	4
4	10	7
5	11	3
6	12	1
7	13	2
		20

Analizując uzyskane wyniki w tabeli 8 możemy stwierdzić, że uzyskaliśmy 3 piecyki o liczbie usterek niższej niż typowe wartości, 14 piecyków o liczbie usterek typowej i 3 piecyki, w których ustereki są jeszcze poważniejsze niż dla wartości typowej. Oznacza to, że 17 piecyków o liczbie usterek niższej od górnej granicy przedziału wartości typowych należy skierować do naprawy, natomiast 3 ostatnie z przebadanych piecyków, dla których usuwanie usterek jest nieopłacalne, nadają się do rozbiórki.

Podsumowanie

W niniejszym artykule zaprezentowano wybraną metodę symulacji zdarzeń dyskretnych do analizy produkowanych na polskim rynku piecyków.

Uzyskane wyniki informują nas, które spośród analizowanych piecyków mogą zostać naprawione, a które należy usunąć. Analizę powyższą możemy przeprowadzić ponownie wprowadzając dodatkowe warunki, tak by uzyskać bardziej szczegółowe wyniki na temat produkcji.

Literatura

- Gajda J.B. (2001), *Prognozowanie i symulacje a decyzje gospodarcze*, C.H. Beck, Warszawa.
- Mielczarek B. (2009), *Modelowanie symulacyjne w zarządzaniu. Symulacja dyskretna*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław.
- Ostasiewicz S., Rusnak Z., Siedlecka U. (2006), *Statystyka. Elementy teorii i zadania*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Wrocław.
- Zeigler B.P., Praehofer H., Kim T.G. (2000), *Theory of Modeling and Simulations*, Academic Press, San Diego, CA.

APPLICATION OF DISCRETE SIMULATION FOR DECISIONS OF ECONOMIC OPTIMIZATION

Summary: The main aim of this paper is to present the discrete simulation methods for the analysis of the selected production.

The theory of the construction and simulation of discrete events are discussed. In this study, we propose this methods where ordering process is determined on the basis of the criteria of the researcher.

Keywords: discrete simulation, production analysis.