

Piotr SZCZEPOCKI¹

Zastosowanie iterowanej filtracji do estymacji parametrów wariancji chwilowej w ramach niegaussowskich procesów stochastycznej zmienności typu Ornsteina-Uhlenbecka

1. WPROWADZENIE

Jednym z najważniejszych zagadnień w teorii finansów jest zmienność walorów finansowych. Można ją interpretować jako niepewność co do przyszłych zmian cen danego waloru finansowego. Najczęściej zmienność jest mierzona jako odchylenie standardowe lub wariancja stóp zwrotu (Weron, Weron 1999). Do modelowania zmienności wykorzystuje się głównie dwie klasy modeli: GARCH i stochastycznej zmienności. Do drugiej klasy należy zaproponowany przez Barndorffa-Nielsen, Shepharda (2001) model stochastycznej zmienności, w którym proces wariancji jest niegaussowskim procesem typu Ornsteina-Uhlenbecka (w dalszej części pracy model ten od nazwiska autorów oznaczony będzie skrótem BN-S). Model ten spotkał się z dużym zainteresowaniem, ponieważ jest w stanie odzwierciedlać wiele spośród obserwowanych faktów empirycznych dotyczących zjawisk finansowych, takich jak grube ogony rozkładu stóp zwrotu, skoki wartości procesu zmienności, szybko malejąca autokorelacja stóp zwrotu, grupowanie zmienności, normalność agregacyjna (wraz ze wzrostem odstępu czasu pomiędzy obserwacjami, rozkłady stóp zwrotu coraz bardziej przypominają rozkład normalny)². Ponadto stosunkowo prosta postać wariancji aktualnej w modelu BN-S umożliwiła szerokie zastosowanie w matematyce finansowej, m.in. do wyceny opcji w stylu europejskim (Nicolato, Venardos, 2003), swapów (Benth i inni, 2007), opcji azjatyckich (Hubalek, Sgarra, 2011).

Estymacja modelu BN-S jest trudna i wiele opracowań zostało poświęconych temu zagadnieniu z wykorzystaniem bardzo różnych metod, m.in. empirycznych funkcji charakterystycznych (Taufer i inni, 2011), estymacji pośredniej (Raknerud, Skare, 2012), funkcji estymujących (Hubalek, Posedel, 2011). Najwięcej

¹ Uniwersytet Łódzki, Wydział Ekonomiczno-Socjologiczny, Katedra Metod Statystycznych, Polskiej Organizacji Wojskowej 3/5, 90-255 Łódź, Polska, e-miał: piotr.szczepocki@uni.lodz.pl, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8377-3831>.

² Pełen przegląd obserwowanych faktów empirycznych dotyczących finansowych szeregów czasowych można znaleźć w pracach Doman i Domana (2009) oraz Klibera (2013).

jednak prac dotyczy podejścia bayesowskiego (Roberts i inni 2004; Griffin, Steel, 2006, 2010; Gander, Stephens, 2007a,b; Frühwirth-Schnatter, Sögner, 2009).

Cechą wspólną wymienionych wyżej podejść do estymacji modelu BN-S jest to, że są trudne w implementacji i wymagają dużej wiedzy eksperckiej. Alternatywą może być zastosowanie filtracji. Jest to metoda estymacji zaczerpnięta z teorii przetwarzania sygnałów, która pozwala modelować zjawiska nieobserwowane bezpośrednio. Możliwość wykorzystaniu filtru cząsteczkowego do estymacji zmienności aktywów wskazali już Barndorff-Nielsen, Shephard (2001). Metoda ta została jednak wykorzystana tylko do dziennych stóp zwrotów, bez uwzględnienia dodatkowej wiedzy pochodzącej z notowań śróddziennych (ang. *intra-day*). W kolejnej pracy Barndorff-Nielsen, Shephard (2002) przedstawili postać przestrzeni stanów dla wariacji zrealizowanej, ale do modelowania procesu stochastycznej zmienności wykorzystali tylko filtr Kalmana. Creal (2008) porównał dokładność estymacji wariacji aktualnej za pomocą filtru Kalmana i cząsteczkowego zarówno w przypadku, gdy zmienną obserwowaną są dzienne stopy zwrotu jak i realizacje estymatora wariacji zrealizowanej. Okazało się, że w przypadku danych typu *intra-day* filtr Kalmana lepiej wypada w przypadku danych o niskiej, a filtr cząsteczkowy lepiej w przypadku wysokiej częstotliwości. Słabością badania Creala było porównanie dokładności estymacji jedynie w przypadku, gdy parametry są znane, co jest założeniem w praktycznych zastosowaniach niemożliwym do spełnienia.

Andrieu i inni (2010) zaproponowali metodę cząsteczkowych Markowskich łańcuchów Monte Carlo (ang. *Particle Markov Chain Monte Carlo*, w skrócie PMCMC), która wykorzystuje filtry cząsteczkowe w obrębie markowskich łańcuchów Monte Carlo do wyznaczenia wartości funkcji akceptacji propozycji nowego stanu łańcucha Markowa. Jako przykład zastosowania Andrieu i inni (2010) podali model BN-S z wykorzystaniem dziennych stop zwrotu. Również James i inni (2018) użyli metody PMCMC w zaproponowanej przez nich wersji modelu BN-S z użyciem uogólnionego procesu gamma. Jest to jednak metoda oparta na wnioskowaniu bayesowskim. Alternatywną metodą opartą o klasyczne wnioskowanie statystyczne jest iterowana filtracja (ang. *iterated filtering*, IF) zaproponowana przez Ionides i innych (2006) i następnie istotnie zmodyfikowana w pracy Ionides i inni (2015). Algorytm iterowanej filtracji dostarcza poprzez sekwencyjne cykle filtru cząsteczkowego ciąg oszacowań wektora parametrów zbieżny do oszacowania uzyskanego metodą największej wiarygodności (także w przypadku, gdy funkcja wiarygodności nie jest możliwa do wyznaczenia analitycznie). Anindya Bhadra (jeden ze współautorów pracy Ionides i inni, 2011) przedstawił w komentarzu do pracy Andrieu i innych (2010) przykład zastosowania metody iterowanej filtracji do modelu BN-S. Jednak zastosował pierwszą generację iterowanej filtracji, a ponadto jako zmienną obserwowaną zastosował dzienne zwroty.

Celem artykułu jest zaproponowanie metody iterowanej filtracji do estymacji parametrów procesów stochastycznej zmienności typu Ornsteina-Uhlenbecka opartych o niegaussowskie procesy Lévy'ego z wykorzystaniem estymatora wariancji zrealizowanej. Z artykułu Creala (2008) wynika, że dla danych typu *intra-day* filtry cząsteczkowe lepiej szacują zmienność aktualną niż filtr Kalmana, gdy parametry są znane. Metoda ta zostanie zweryfikowana w eksperymencie symulacyjnym przy różnych scenariuszach (kombinacjach wartości parametrów modelu) oraz częstotliwościach *intra-day*.

Układ opracowania jest następujący. W części drugiej zostanie omówione podstawowe własności modelu BN-S i wariancji zrealizowanej na podstawie dwóch artykułów Barndorffa-Nielsen, Shepharda (2001, 2002). W części trzeciej przedstawione zostanie specyfikacja filtra cząsteczkowego i iterowanej filtracji dla modelu BN-S, gdy zmienną obserwowaną są realizacje estymatora wariancji zrealizowanej. Część czwarta to eksperyment symulacyjny mający na celu zbadanie własności estymatora. Część piąta to badanie empiryczne w oparciu o realizacje estymatora wariancji zrealizowanej dla indeksu S&P500 udostępnione przez Oxford-Man Institute w ramach ogólnodostępnej bazy "Oxford-Man Institute's realised library". Ostatnia część to podsumowanie i wnioski.

2. MODELE STOCHASTYCZNEJ ZMIENNOŚCI TYPU ORNSTEINA-UHLENBECKA

2.1. Model stochastycznej zmienności Barndorff-Nielsen i Shepharda

W artykule rozważać będziemy następujący model opisujący dynamikę logarytmów cen aktywów

$$dy^*(t) = (\mu + \beta\sigma^2(t))dt + \sigma(t)dB(t), \quad (1)$$

gdzie $(y^*(t))_{t \geq 0}$ jest procesem logarytmów cen aktywów, parametr μ jest dryfem, a parametr β jest interpretowany jako premia za ryzyko. Zakładamy, że proces wariancji chwilowej $(\sigma^2(t))_{t \geq 0}$ jest niezależny od procesu Wienera $(B(t))_{t \geq 0}$. Barndorff-Nielsen, Shephard (2001) zaproponowali, aby proces wariancji chwilowej opisać za pomocą niegaussowskiego procesu Ornsteina-Uhlenbecka postaci

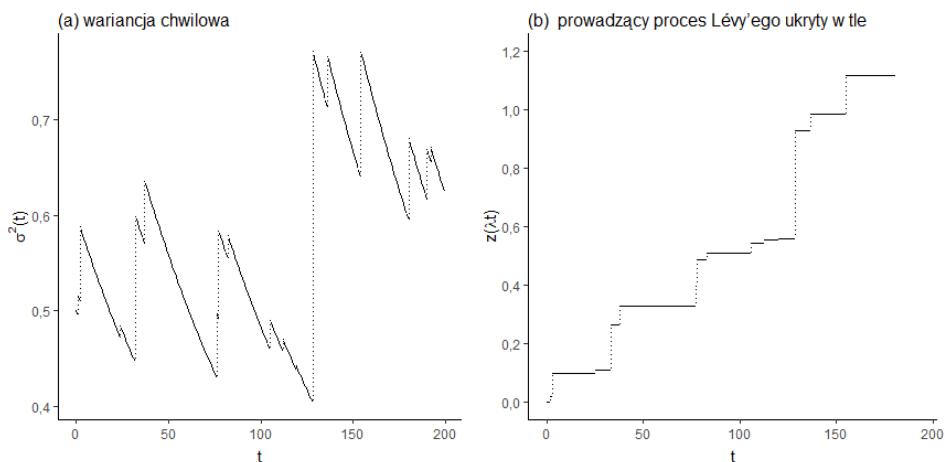
$$d\sigma^2(t) = -\lambda\sigma^2(t)dt + dz(\lambda t), \quad \sigma^2(0) > 0, \quad (2)$$

gdzie $(z(\lambda t))_{t \geq 0}$ jest niemalejącym (prawie na pewno) procesem Lévy'ego. Taki proces nazywany jest procesem podporządkowanym (ang. *subordinator*)³. Ze

³ Proces podporządkowany to niemalejący proces Lévy'ego. Więcej o procesach podporządkowanych oraz o zastosowaniu procesów Lévy'ego do modelowania procesów cen można znaleźć w monografiach Cont, Tankov (2001) oraz Kliber (2013).

względem na rolę jaką pełni proces $(z(\lambda t))_{t \geq 0}$ w równaniu (2) nazywany jest prowadzącym procesem Lévy'ego ukrytym w tle (ang. *background driven Lévy proces*, BDLP). Nietypowa postać różniczki $dz(\lambda t)$ została dobrana tak, aby oddzielić wpływ rozkładu brzegowego procesu wariacji chwilowej od wartości parametru persystencji λ . Postać równania (2) oraz założenia dotyczące procesu BDLP implikują, że wariacja chwilowa jest dodatnia, a jej trajektorie charakteryzują się skokami o częstotliwości wyznaczonej przez parametr λ , natomiast pomiędzy skokami maleją wykładniczo według stopy λ (por. rysunek 1). Skoki procesu wariacji odpowiadają skokom procesu podporządkowanego.

Rysunek 1. Przykład symulacji trajektorii procesu Ornsteina-Uhlenbecka o rozkładzie stacjonarnym gamma z parametrami: $\alpha = 10$ ($1/\alpha$ to parametr skali), $\nu = 5$ (parametr kształtu) oraz z parametrem persystencji $\lambda = 0,01$ (a) oraz odpowiadający mu prowadzącym procesem Lévy'ego ukrytym w tle (b)



Źródło: opracowanie własne przy użyciu programu R Cran.

Pomiędzy procesem wariacji chwilowej $(\sigma^2(t))_{t \geq 0}$ a podporządkowanym $(z(\lambda t))_{t \geq 0}$ istnieje zależność opisana równaniem

$$w(x) = -u(x) - xu'(x), \quad (3)$$

gdzie u i w są gęstościami miary Lévy'ego w reprezentacji Lévy'ego-Chinczyna odpowiednio procesów $(\sigma^2(t))_{t \geq 0}$ i $(z(\lambda t))_{t \geq 0}$. Zatem dobierając rozkład stacjonarny procesu $(\sigma^2(t))_{t \geq 0}$ określa się jednocześnie proces podporządkowany i na odwrót. Jako rozkład stacjonarny można dobrać dowolny rozkład samorozkładalny (ang. *self-decomposable*)⁴. Nie jest to jednak istotnym ograniczeniem, ponie-

⁴ Jednowymiarowy rozkład prawdopodobieństwa D jest samorozkładalny, jeżeli jego funkcję charakterystyczną można zapisać w postaci $\phi(\xi) = \phi(c\xi)\phi_c(\xi)$ dla dowolnego $c \in (0,1)$, $\xi \in R$ i dla pewnej rodziny funkcji charakterystycznych $\{\phi_c: c \in (0,1)\}$.

waż do klasy rozkładów samorozkładalnych należy wiele ważnych w modelowaniu zjawisk finansowych rozkładów takich jak: normalny, gamma, odwrotny gaussowski (ang. *inverse Gaussian distribution*), temperowany rozkład stabilny (ang. *tempered stable distribution*), uogólniony rozkład hiperboliczny (ang. *generalised hyperbolic distribution*), uogólniony odwrotny rozkład gaussowski (ang. *generalised inverse Gaussian distribution*), rozkład odwrotny normalny (ang. *normal-inverse Gaussian*), *variance gamma*, *symmetric gamma*, *Euler's gamma*, *Mexiner*.

Wariancję aktualną, którą interpretuje się jako zmienność instrumentu finansowego w okresie n wyznacza się z zależności

$$\sigma_n^2 = \sigma^{2*}(\Delta n) - \sigma^{2*}(\Delta(n-1)), \quad (4)$$

gdzie Δ to określony okres czasu pomiędzy obserwacjami (np. dzień), a $(\sigma^{2*}(t))_{t \geq 0}$ jest wariancją scałkowaną daną wzorem

$$\sigma^{2*}(t) = \int_0^t \sigma^2(u) du. \quad (5)$$

Ważną cechą modelu ze względu na zastosowanie do wyceny opcji zależnych od trajektorii⁵ procesu cen jest możliwość wyznaczenia wariancji scałkowanej za pomocą prostego analitycznego wzoru

$$\sigma^{2*}(t) = \frac{1}{\lambda} [z(\lambda t) - \sigma^2(t) + \sigma^2(0)]. \quad (6)$$

Pozwala to na wyznaczenie wariancji aktualnej jako liniowej kombinacji przyrostów procesu BDLP i procesu wariancji chwilowej

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{\lambda} [z(\lambda \Delta n) - z(\lambda \Delta(n-1)) - (\sigma^2(\Delta n) - \sigma^2(\Delta(n-1)))]. \quad (7)$$

W konsekwencji, ciągły proces wariancji chwilowej może być analizowany przez rozważany z dyskretnym czasem proces wariancji aktualnej bez wprowadzenia błędu dyskretyzacji np. poprzez schemat Eulera czy Milsteina⁶.

2.2. Wariancja zrealizowana

Wariancja aktualna jest jednym z mierników zmienności cen instrumentów finansowych. Jej wartości nie są jednak obserwowane bezpośrednio. Jednym z najczęściej stosowanych estymatorów wariancji aktualnej jest wariancja

⁵ Przykład takiego zastosowania dla modelu BN-S można znaleźć w James i inni (2013).

⁶ O wpływie dyskretyzacji Eulera i Milsteina na obciążenie estymatorów można znaleźć w Iacus (2009), 124–126.

zrealizowana. Jest to estymator nieparametryczny, którego wartości można wyznaczyć, bez odwoływania się do postaci procesu zmienności. Wykorzystanie tego miernika zostało zainicjonowane przez prace Andersena, Bollersleva, Diebolda, Labysa (2001) oraz Andersena, Bollersleva, Diebolda, Ebensa (2001). Badali oni własności wariancji zrealizowanej zarówno dla rynku walutowego, jak i rynku papierów wartościowych i otrzymali wyniki wskazujące, że jest dość dobry miernik zmienności. Barndorff-Nielsen, Shephard (2002) zbadali własności wariancji zrealizowanej przy dość ogólnych założeniach procesu zmienności. Między innymi podali rozkład asymptotyczny wariancji zrealizowanej i wykazali że jeżeli proces wariancji chwilowej jest typu Ornsteina-Uhlenbecka postaci (2), to można uzyskać nieco lepsze oszacowania wariancji aktualnej przy pomocy filtru Kalmana niż za pomocą estymatora wariancji zrealizowanej.

Założmy, że proces logarytmicznych cen instrumentu finansowego jest obserwowany K krotnie w ciągu jednego okresu czasu. Wówczas wariancja zrealizowana w okresie n dana jest wzorem

$$\{y\}_n = \sum_{i=1}^K \left(\left(y^*(n-1)\Delta + \frac{\Delta j}{K} \right) - y^* \left((n-1)\Delta + \frac{\Delta(j-1)}{K} \right) \right). \quad (8)$$

W dalszych rozważaniach w tym przyjmijmy, że parametry μ i β w równaniu (1) są równe zero (identyczne założenie można znaleźć w wielu pracach na temat modelu m.in. Barndorff-Nielsen, Shephard (2002), Roberts, Papaspiliopoulos (2004), Frühwirth-Schnatter, Sögner (2009)). Na rysunku 2 przedstawiono jak zmienność zrealizowana aproksymuje zmienność aktualną. Przyjmując, że pojedyncze okresy odpowiadają kolejnym dniom obserwacji ($\Delta = 1$), to kolejne wartości $K=1, 24, 48, 288$ można interpretować tak, że wariancja zrealizowana jest wyznaczana na podstawie obserwacji odpowiednio dziennych, godzinnych, półgodzinnych oraz pięciominutowych. Widać wyraźnie, że wraz ze wzrostem K rośnie dokładność aproksymacji.

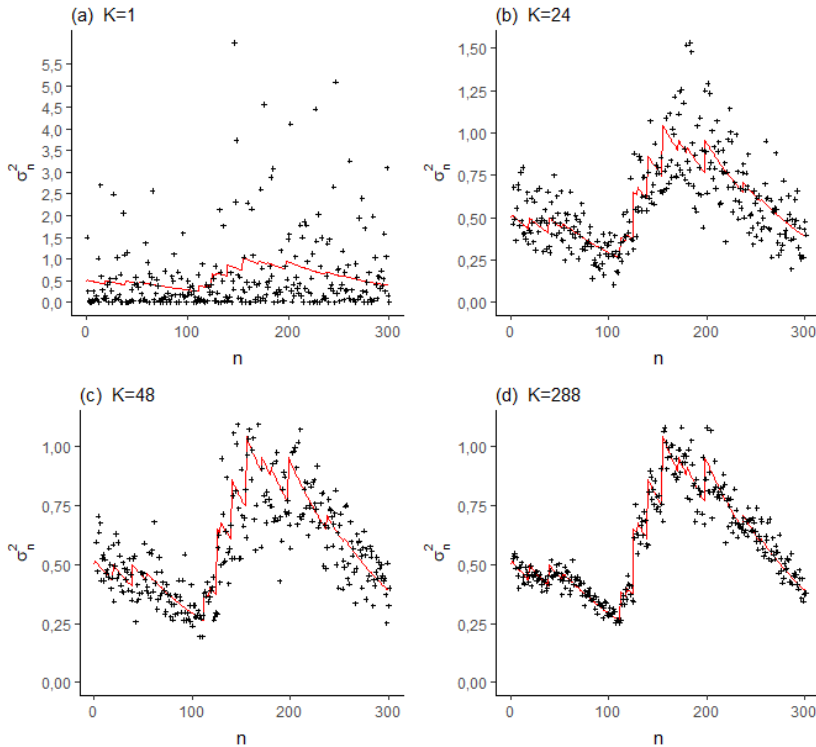
Wariancję zrealizowaną można zdekomponować na następujące składniki

$$\{y\}_n = \sigma_n^2 + u_n, \quad (9)$$

gdzie u_n nazywane jest błędem wariancji zrealizowanej. Można wykazać następujące własności wariancji zrealizowanej (Barndorff-Nielsen, Shephard 2002):

$$E(\{y\}_n) = \Delta\xi, \quad Var(\{y\}_n) = Var(\sigma_n^2) + Var(u_n^2), \quad cov(\{y\}_n, \{y\}_{n+s}) = cov(\sigma_n^2, \sigma_{n+s}^2). \quad (10)$$

Rysunek 2. Realizacja procesu wariancji aktualnej (czerwona linia), dla której wariacja chwilowa ma rozkład brzegowy gamma z parametrami kształtu $\nu = 4$, skali $1/\alpha = 0,08$ oraz z parametrem $\lambda = 0,01$



Przyjęto $\Delta = 1$ oraz kolejno $K = 1, 24, 48$ oraz 288 . Symbolem „+” oznaczono wartości wariancji zrealizowanej. Źródło: opracowanie własne, na podstawie Barndorff-Nielsen, Shephard (2002).

Przyjmując dalej dla $j = 1, \dots, K$:

$$\sigma_{j,n}^2 = \sigma^{2*} \left((n-1)\Delta + \frac{\Delta j}{K} \right) - \sigma^{2*} \left((n-1)\Delta + \frac{\Delta(j-1)}{K} \right) \quad (11)$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sigma_u^2 = Var(u_n^2) &= 2M \cdot E(\sigma_{1,n}^2)^2 = 2M \left(Var(\sigma_{1,n}^2) + (E(\sigma_{1,n}^2))^2 \right) = \\ &= 2M(2\omega^2 r^{**}(\Delta M^{-1}) + (\Delta \xi M^{-1})^2), \end{aligned} \quad (12)$$

gdzie: ξ to wartość oczekiwana, a ω odchylenie standardowe rozkładu stacjonarnego wariancji chwilowej, $r^{**}(t) = \frac{(e^{-\lambda t} + 1 - \lambda t)}{\lambda^2}$. Wzory (6)–(12) nie zależą od wyboru rozkładu stacjonarnego procesu wariancji chwilowej. Barndorff-Nielsen, Shephard (2002) wykazali zbieżność według rozkładu

$$\frac{\{y\}_n - \sigma_n^2}{\sigma_u} \xrightarrow{K \rightarrow \infty} N(0,1). \quad (13)$$

Zatem dla dużych K można przyjąć⁷

$$p(\{y\}_n | \sigma_n^2) \approx N(\sigma_n^2, \sigma_u). \quad (14)$$

3. ESTYMACJA MODELU BN-S

3.1. Specyfikacja filtru cząsteczkowego dla modelu BN-S

Filtry cząsteczkowe (zwane także sekwencyjną metodą Monte Carlo) są rodziną metod aproksymujących nieznaną gęstość rozkładu warunkowego procesu ukrytego w okresie n na podstawie dostępnych obserwacji procesu pomiaru do momentu n postaci

$$X_n | Y_1 = y_1, \dots, Y_n \sim h_\theta(\cdot | y_1, \dots, y_n) \quad (15)$$

poprzez kolekcję M par, zwanych cząsteczkami. Każda cząsteczka składa się z dwóch składowych: pierwsza $x^{(i)}$ odpowiada punktowi z nośnika funkcji h_θ , a drugą składową $W^{(i)}$ jest waga odpowiadająca gęstości funkcji. Wówczas można przyjąć następującą aproksymację funkcji h_θ :

$$\hat{h}_\theta(x) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M W^{(i)} \delta(x - x^{(i)}), \quad (16)$$

gdzie x jest dowolnym punktem z nośnika funkcji h_θ , a δ oznacza deltę Diraca.

Filtry cząsteczkowe zostały opracowane niezależnie przez różnych autorów (Pitt, Shepard, 1999). W szczególności Gordon i inni (1993) wykorzystali filtr cząsteczkowy do niegaussowskich modeli przestrzeni stanów, natomiast Kitagawa (1996) do modelowania szeregów czasowych. Po raz pierwszy termin filtr cząsteczkowy został użyty w pracy Del Moral (1996). Filtry cząsteczkowe różnią się między sobą sposobem generowania cząsteczek. Obszerne omówienie poszczególnych rodzajów filtrów cząsteczkowych można znaleźć w monografiach Douceta i innych (2001), Del Moral i innych (2006) oraz w pracy Brzozowskiej-Rup, Dawidowicza (2009). Filtry cząsteczkowe znalazły zastosowanie w wielu dziedzinach nauki m.in. w teorii przetwarzania sygnałów, chemii molekularnej, fizyce, automatyce czy ekonomii. Przegląd zastosowań można znaleźć w Ristic i inni (2004).

⁷ Przyjmujemy oznaczenie $N(\mu, \sigma)$ dla rozkładu normalnego ze średnią μ oraz odchyleniem standardowym σ .

Łącząc równanie pomiaru z pracy Barndorffa-Nielsen, Shepharda (2001) i równanie przejścia dla procesu ukrytego z pracy Barndorffa-Nielsen, Shepharda (2002) otrzymujemy następujące model przestrzeni stanów

$$\begin{cases} \{y\}_n = [\lambda^{-1}]x_n + \sigma_u \vartheta_n \\ x_{n+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 - e^{-\lambda\Delta} \\ 0 & e^{-\lambda\Delta} \end{bmatrix} x_n + \begin{bmatrix} n_2 - n_1 \\ n_1 \end{bmatrix}, \end{cases} \quad (17)$$

gdzie $x_n = [\lambda\sigma_n^2 \sigma^2(\Delta n)]^T$, $\vartheta_n \sim N(0,1)$, σ_u dana jest wzorem (11), natomiast $\eta_n = [\eta_{1n} \ \eta_{2n}]^T$ jest parą zmiennych losowych, których rozkład zależy od wyboru rozkładu brzegowego procesu wariancji chwilowej $(\sigma^2(t))_{t \geq 0}$. Przedstawienie modelu stochastycznej zmienności typu Ornsteina-Uhlenbecka w postaci przestrzeni stanów (17) pozwala na zastosowanie filtru cząsteczkowego do oszacowania wariancji aktualnej przy pomocy estymatora wariancji zrealizowanej.

W tym opracowaniu wykorzystana zostanie klasyczna postać filtru cząsteczkowego zwana *bootstrap filter*, wykorzystana po raz pierwszy przez Gordona i innych (1993). Algorytm generowania cząsteczek dla omawianego modelu stochastycznej zmienności w postaci przestrzeni stanów danej wzorem (17) można przedstawić następująco:

Krok 1: W okresie $n=0$ dla $i = 1, \dots, M$ generujemy realizację $\sigma^{2(i)}(0)$, z rozkładu stacjonarnego procesu wariancji chwilowej $(\sigma^2(t))_{t \geq 0}$ oraz przyjmujemy $W_0^{(i)} = 1/M$.

Krok 2: Dla okresu $n > 0$ oraz dla $i = 1, \dots, M$ generujemy realizację wektora losowego $\eta_n^{(i)} = [\eta_n^{(i)} \ \eta_n^{(i)}]^T$ zgodnie ze wzorem

$$\eta_n = \begin{bmatrix} \eta_{1n} \\ \eta_{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp(-\lambda\Delta) \int_0^\Delta \exp(\lambda z) dz(\lambda u) \\ \int_0^\Delta dz(\lambda u) \end{bmatrix}, \quad (18)$$

a następnie wyznaczamy

$$\begin{bmatrix} \lambda\sigma_n^{2(i)} \\ \sigma^{2(i)}(\Delta n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda\sigma_{n-1}^{2(i)} \\ \sigma^{2(i)}(\Delta(n-1)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_{2n}^{(i)} - \eta_{1n}^{(i)} \\ \eta_{1n}^{(i)} \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Krok 3: Dla $i = 1, \dots, M$ wyznaczamy wagi zgodnie z gęstością (14) za pomocą równości

$$\tilde{W}_n^{(i)} = W_{n-1}^{(i)} p(\{y\}_n | \sigma_n^{2(i)}). \quad (20)$$

Krok 4: Dla $i = 1, \dots, M$ normalizujemy wagi

$$W_n^{(i)} = \frac{\tilde{W}_n^{(i)}}{\sum_{i=1}^M \tilde{W}_n^{(i)}}. \quad (21)$$

Krok 5: Losujemy (ze zwracaniem) M cząsteczek ze zbioru M par $([\lambda \sigma_n^{2(i)} \sigma^{2(i)}(\Delta n)]^T, W_n^{(i)})$, $i = 1, \dots, M$, według prawdopodobieństwa wyznaczonego przez znormalizowane wagi.

Krok 6: Przyjmujemy $W_n^{(i)} = 1/M$ dla $i = 1, \dots, M$. Zwiększamy n na $n+1$ i wracamy do kroku 2.

Rozkład wektora losowego η_n w ogólności jest nieznan, ale Barndorff-Nielsen, Shephard (2001) wskazali jak można generować realizacje zmiennej losowej η_n poprzez rozwinięcie w nieskończony ciąg zmiennych losowych. Gdy rozkład brzegowy jest rozkładem gamma z parametrami skali i kształtu odpowiednio $1/\alpha$ i ν , to prowadzącym procesem Lévy'ego ukrytym w tle (BDLP) jest złożony proces Poissona (Schoutens, 2003, str. 68). Można wówczas generować realizacje wektora losowego η_n według następującego wzoru (Barndorff-Nielsen, Shephard 2001):

$$\eta_n = \begin{bmatrix} \eta_{1n} \\ \eta_{2n} \end{bmatrix} = \frac{1}{\alpha} \begin{bmatrix} \exp(-\lambda \Delta) \sum_{i=1}^{N(1)} \ln(c_i^{-1}) \exp(\lambda \Delta r_i) \\ \sum_{i=1}^{N(1)} \ln(c_i^{-1}) \end{bmatrix}, \quad (22)$$

gdzie $c_1 < c_2 < \dots < c_{N(1)}$ to kolejne zgłoszenia procesu Poissona z parametrem intensywności $\nu \lambda \Delta$, $N(1)$ jest liczbą zgłoszeń do momentu $t = 1, r_1, r_2, \dots, r_{N(1)}$, są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym ciągłym na przedziale $[0,1]$. Na rysunku 1 przedstawiono przykład symulacji trajektorii procesu $(\sigma^2(t))_{t \geq 0}$ o rozkładzie brzegowym gamma wykonany zgodnie ze wzorami (19) i (22).

3.2. Specyfikacja iterowanej filtracji dla modelu BN-S

Filtry cząsteczkowe są efektywnym narzędziem estymacji wartości procesu ukrytego, gdy parametry są znane, ale ich bezpośrednie zastosowanie do estymacji parametrów jest trudne⁸. Dlatego w tej pracy korzystamy z metody iterowanej filtracji zaproponowanej przez Ionidesa i innych (2006). Tak jak było wspomniane we wstępie, Anindya Bhadra w komentarzu do pracy Andrieu i inni (2010) zaproponował zastosowanie iterowanej filtracji do estymacji parametrów

⁸ Wyczerpująco zagadnienie estymacji parametrów przy użyciu filtrów cząsteczkowych porusza praca Kantas i inni (2015).

BN-S, ale jedynie w oparciu o modelu przestrzeni stanów z pracy Barndorffa-Nielsen, Shepharda (2001), w którym procesem pomiaru są dzienne stopu zwrotu. W pracy zostanie wykorzystana druga generacja iterowanej filtracji (IF2).

W iterowanej filtracji rozważana przestrzeń stanów ze stałymi parametrami jest zastępowana rozszerzoną przestrzenią stanów ze zmiennymi w czasie parametrami. Ta dodatkowa zmienność wprowadzona do modelu zapobiega problemowi degeneracji różnorodności próby oraz umożliwia „wygładzenie” nieciągłego (względem parametrów) oszacowania funkcji wiarygodności uzyskiwanego metodą filtrów cząsteczkowych. O procesie kontrolującym zmianę w czasie parametrów zakłada się, że jest procesem (zazwyczaj gaussowskiego) błędzenia losowego. W każdej kolejnej iteracji algorytmu błędzenie losowe ma coraz mniejszą wariancję, tak że przy liczbie iteracji dążącej do nieskończoności wariancja zbiega do 0. Jako rezultat algorytmu powstaje ciąg oszacowań wektora parametrów zbieżny do oszacowania uzyskanego metodą największej wiarygodności. Algorytm iterowanej filtracji wykorzystuje klasyczny filtr cząsteczkowy, dlatego nie wymaga znajomości gęstości przejścia, a jedynie potrzebuje generowania zmiennej ukrytej z rozkładu warunkowego. Algorytmy o tej własności w kontekście estymacji parametrów modeli przestrzeni stanów Ionides i inni (2006) nazywają *plug-and-play*. W kontekście wnioskowania bayesowskiego własność *plug-and-play* posiada m.in. metoda PMCMC. Jest to istotna zaleta w przypadku estymacji modelu BN-S, dla którego nie jest znana gęstość przejścia, ale można generować zmienne ukryte zgodnie ze wzorami (18) i (19).

Iterowana filtracja obejmuje dwie generacje algorytmów oznaczane skrótami odpowiednio IF1 oraz IF2. Pierwsza generacja została przedstawiona w pracy Ionidesa i innych (2006), a jej własności teoretyczne zostały podane w pracy Ionidesa i innych (2011). Lindström i inni (2012) poprawili wydajność oryginalnego algorytmu. Druga generacja została przedstawiona przez Ionidesa i inni (2011), a jej teoretyczne podstawy zostały omówione przez Nguyena (2016). Choć obie generacje iterowanej filtracji wykonują sekwencyjnie algorytm filtru cząsteczkowego na rozszerzonej przestrzeni stanów z malejącej z kroku na krok wariancją błędzenia losowego, to teoretyczne uzasadnienie zbieżności metod jest inne. IF1 w kolejnych iteracjach aproksymuje gradient funkcji wiarygodności, natomiast IF2 łączy klonowanie danych (ang. *data cloning*, por. Lele i inni 2007) ze zbieżnością odwzorowań bayesowskich (por. Nguyen, 2016). Ionides i inni (2015) zilustrowali na dwóch przykładach szybszą zbieżność IF2 względem IF1 do prawdziwych wartości parametrów. W praktyce zbieżność estymatorów wyznaczonych metodą iterowanej filtracji sprawdza się analizując wykresy diagnostyczne: trajektorie oszacowań parametrów dla różnych wartości początkowych oraz jednowymiarowe profile funkcji wiarygodności (Bretó, 2014).

Do wykonania obliczeń wykorzystano pakiet *pomp* (King i inni, 2016) programu R, do którego dodano napisane przez autora w języku C skrypty umożliwiające implementację przestrzeni stanu danej wzorem (17) do pakietu *pomp* (np. algorytm generowania nowych cząsteczek (por. wzór (19))).

4. EKSPERYMENT SYMULACYJNY

Zostało wykonanych po 100 symulacji szeregów czasowych zawierających po 500 obserwacji dla każdej z 3 kombinacji parametrów. Jako rozkład stacjonarny procesu wariacji wykorzystano rozkład gamma. Wybrane wartości parametrów przedstawia tablica 1. Następnie dla każdego szeregu czasowego dokonano estymacji parametrów modelu przestrzeni stanów postaci (17) za pomocą procedury opisanej w poprzedniej części dla $K=24, 288$. Za każdym razem użyto algorytmu IF2 dla 200 iteracji. Dla każdej iteracji filtr cząsteczkowy składał się z $M=2000$ cząsteczek. Na rozszerzonej przestrzeni parametrów przyjęto gausowskie błędzenie losowe dla wektora parametrów o początkowej macierzy wariacji-kowariancji diagonalnej κI , gdzie $\kappa = 0,01$. Parametr κ małał geometrycznie według ilorazu $q = 0,75$. Tabela 1 przedstawia średnie oszacowanie i średni absolutny błąd procentowy (MAPE) dla poszczególnych parametrów wyznaczone na podstawie 100 replikacji. Dla porównania przedstawiono wyniki otrzymane metodą quasi największej wiarygodności otrzymane za pomocą filtru Klamana (zgodnie z Barndorff-Nielsen, Shephard, 2002).

Tabela 1. WYNIKI ESTYMACJI DLA 100 SZEREGÓW CZASOWYCH ZAWIERAJĄCYCH PO 500 OBSERWACJI

Wariant eksperymentu	Parametr	Prawdziwa wartość	Filtr Kalmana				Iterowana filtracja			
			$K=24$		$K=288$		$K=24$		$K=288$	
			średnia	MAPE	średnia	MAPE	średnia	MAPE	średnia	MAPE
1	λ	0,1	0,148	38,8	0,126	15,6	0,124	27,3	0,107	7,5
	ξ	0,5	0,438	12,5	0,473	7,6	0,395	21,1	0,518	4,7
	ω	0,25	0,21	15,1	0,221	12,3	0,202	19,6	0,207	17,1
2	λ	0,1	0,35	64,8	0,080	31,8	0,137	37,2	0,132	30,3
	ξ	1	1,279	27,8	1,011	5,4	0,972	7,6	0,991	6,2
	ω	0,25	0,361	44,6	0,237	7,9	0,267	9,9	0,252	8,8
3	λ	1	7,162	73261,1	2,205	21654,2	1,488	48,2	1,358	35,8
	ξ	0,5	0,317	35,2	0,337	35,7	0,289	46,3	0,413	17,2
	ω	0,25	1,124	51643,3	0,946	43874,3	0,196	21,3	0,202	16,4

Źródło: opracowanie własne przy użyciu programu R Cran.

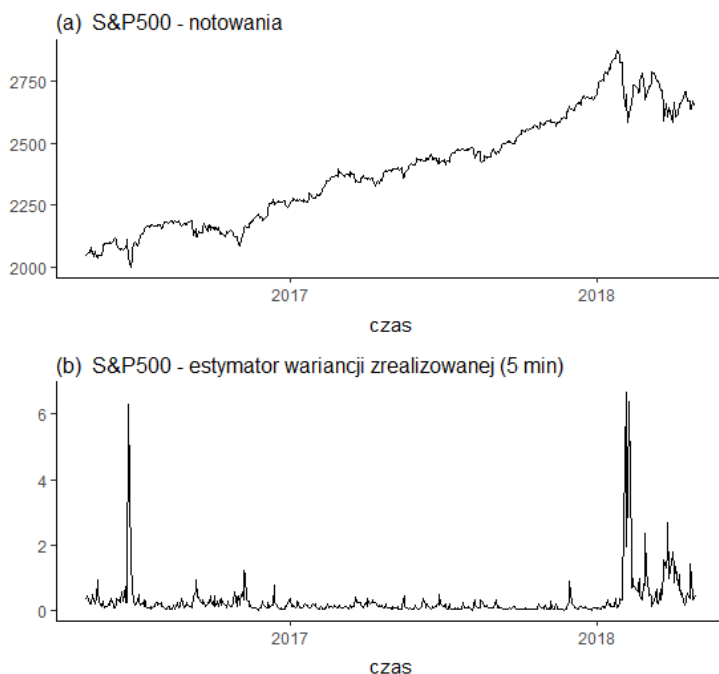
Przedstawione wyniki wskazują, że iterowana filtracja w większości przypadkach dokładniej szacuje parametry niż metoda quasi-największej wiarygodności. Dla obu metod estymacji najmniejszy błąd estymacji związany jest z parametrem ξ (wartością oczekiwaną rozkładu stacjonarnego wariacji chwilowej), a największy z parametrem persystencji λ (odpowiadającego za częstotliwość pojawiania się skoków i stopę ich wygasania w czasie). Z przeprowadzonych scenariuszów symulacji można także zauważyć, że wzrost parametru persystencji powoduje spadek dokładności estymacji wszystkich parametrów. Dla $\lambda = 1$ oszacowanie metodą filtru

Kalmana są zupełnie nietrafione. Zgodnie z oczekiwaniami (por. rysunek 2) wraz ze wzrostem częstotliwości obserwowania stóp zwrotu rośnie dokładność estymacji.

5. BADANIE EMPIRYCZNE

Zaprezentowana w części 3 metoda estymacji została wykorzystana do oszacowania parametrów procesu wariacji chwilowej na podstawie realizacji estymatora wariacji zrealizowanej dla indeksu S&P500. Jest to jeden z najważniejszych indeksów giełdowych na świecie, w skład którego wchodzi 500 przedsiębiorstw o największej kapitalizacji notowanych na New York Stock Exchange i NASDAQ. Dane za okres od 4 maja 2016 do 29 kwietnia 2018 (500 obserwacji) pochodzą z ogólnodostępnej bazy "Oxford-Man Institute's realised library" (Gerd i inni, 2009). Wartości indeksu zostały pomnożone przez 10000⁹. Na rysunku 3 przedstawiono kurs indeksu S&P500 w badanym okresie oraz realizację estymatora wariacji zrealizowanej wyznaczone na podstawie danych 5-minutowych. Wyraźnie widać wzrost zmienności w okresach spadku notowań i okresy zmniejszonej zmienności w czasie wzrostu notowań.

Rysunek 3. Kurs indeksu S&P500 w okresie od 4 maja 2016 do 29 kwietnia 2018 oraz realizację estymatora wariacji zrealizowanej wyznaczone na podstawie danych 5-minutowych



Źródło: opracowanie własne przy użyciu programu R Cran.

⁹ Zazwyczaj stosuje się stopy zwrotu przemnożone przez 100, zatem kwadraty zwrotów śródziennych należy pomnożyć przez 10000.

Jako proces wariancji chwilowej przyjęto niegaussowski proces Ornsteina-Uhlenbecka o rozkładzie brzegowym gamma. Do estymacji przyjęto model przestrzeni stanów postaci (17). Algorytm iterowanej filtracji został wykorzystany z dokładnie takimi samymi ustawieniami jak w przypadku eksperymentu symulacyjnego. Wyniki estymacji przedstawia tabela 2. Uwagę zwraca wysoka (w porównaniu do wartości wyznaczanych na podstawie danych dziennych) wartość parametru persystencji oraz wysoka wartość parametru odchylenia zmienności ω w porównaniu do wartości oczekiwanej ξ (por. Gander, Stephens, 2007a, Griffin, Steel, 2006, Frühwirth-Schnatter, Sögner, 2009).

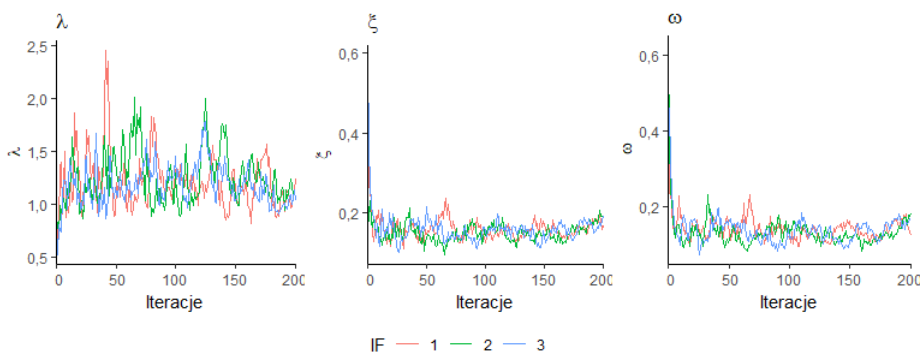
Tabela 2. WYNIKI ESTYMACJI

Parametr	λ	ξ	ω	Wartość logarytmu funkcji wiarygodności
Oszacowanie	1,0862	0,1903	0,1836	-8294,3960

Źródło: opracowanie własne przy użyciu programu R Cran.

Zbieżność algorytmu iterowanej filtracji przedstawia rysunek 4. Trajektorie przedstawiają trzy realizacje algorytmu iterowanej filtracji z trzema różnymi losowo wygenerowanymi wartościami początkowymi. Wyraźnie widać, że najtrudniejszym do oszacowania jest parametr persystencji λ . Trajektorie cechują się dużą wahałością. Wskazuje to na często obserwowaną dla modelu BN-S „płaskość” funkcji wiarygodności względem parametru λ (Andrieu i inni, 2010). Jest to także zgodne z wynikami eksperymentu symulacyjnego, dla którego oszacowania parametru λ miały największy średni bezwzględny błąd procentowy.

Rysunek 4. Trajektorie trzech realizacji algorytmu iterowanej filtracji z trzema różnymi losowo wygenerowanymi wartościami początkowymi



Źródło: opracowanie własne przy użyciu programu R Cran.

6. WNIOSKI

W artykule przedstawiono zastosowanie iterowanej filtracji do estymacji parametrów procesu stochastycznej zmienności typu Ornsteina-Uhlenbecka w modelu BN-S z wykorzystaniem wariancji zrealizowanej. Zaproponowane podejście ma dwie istotne zalety. Po pierwsze wykorzystuje jako zmienną objaśnianą estymator wariancji zrealizowanej, który względem dziennych zwrotów zawiera dodatkową informację z notowań *intra-day*. Po drugie, zastosowanie iterowanej filtracji pozwala na uzyskanie dokładniejszych oszacowań parametrów niż metoda quasi-największej wiarygodności w oparciu o filtr Kalmana, co potwierdza przeprowadzony eksperyment symulacyjny. Dalsze prace nad zastosowaniem iterowanej filtracji mogą polegać na wykorzystaniu metody, gdy proces wariancji chwilowej ma inny niż gamma rozkład stacjonarny, w szczególności taki dla którego proces Lévy'ego ukryty w tle jest procesem o nieskończonej aktywności (przykładem takiego procesu Ornsteina-Uhlenbecka jest proces o rozkładzie stacjonarnym odwrotnym gaussowskim, por. Gander, Stephens, 2007a).

LITERATURA

- Andersen T. G., Bollerslev T., Diebold F. X., Ebens H., (2001), The Distribution of Realised Stock Return Volatility, *Journal of Financial Economics*, 61, 43–76.
- Andersen T. G., Bollerslev T., Diebold F. X., Labys P., (2001), The Distribution of Exchange Rate Volatility, *Journal of the American Statistical Association*, 96, 42–55.
- Andrieu C., Doucet A., Holenstein R., (2010), Particle Markov Chain Monte Carlo Methods, *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*, 72 (3), 269–342.
- Barndorff-Nielsen O. E., Shephard N., (2001), Non-Gaussian Ornstein-Uhlenbeck-Based Models and Some of Their Uses in Financial Economics, *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*, 63 (2), 167–241.
- Barndorff-Nielsen O. E., Shephard N., (2002), Econometric Analysis of Realized Volatility and its Use in Estimating Stochastic Volatility Models, *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*, 64, (2), 253–280.
- Benth F. E., Groth M., Kufakunesu R., (2007), Valuing Volatility and Variance Swaps for a Non-Gaussian Ornstein-Uhlenbeck Stochastic Volatility Model, *Applied Mathematical Finance*, 14 (4), 347–363.
- Brzozowska-Rup K., Dawidowicz A. L., (2009), Metoda filtru cząsteczkowego, *Matematyka stosowana: matematyka dla społeczeństwa*, 10 (51), 69–107.
- Cont R., Tankov P., (2003), *Financial Modelling with Jump Processes*, CRC Financial Mathematics Series, Chapman and Hall.
- Del Moral P., (1996), Non-Linear Filtering: Interacting Particle Resolution, *Markov Processes and Related Fields*, 2 (4), 555–581.
- Del Moral P., Doucet A., Jasra A., (2006), Sequential Monte Carlo for Bayesian Computation. *Bayesian Statistics*, 8, Oxford University Press, Oxford, UK.

- Doman M., Doman R., (2009), *Modelowanie zmienności i ryzyka: metody ekonometrii finansowej*, Wolters Kluwer.
- Doucet A., de Freitas N., Gordon N. J., (2001), *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*, Springer, New York, NY.
- Frühwirth-Schnatter S., Sögner L., (2009), Bayesian Estimation of Stochastic Volatility Models Based on OU Processes with Marginal Gamma Law, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 61 (1), 159–179.
- Gander M. P. S., Stephens D. A., (2007a), Stochastic Volatility Modelling in Continuous Time with General Marginal Distributions: Inference, Prediction and Model Selection, *Journal of Statistical Planning and Inference*, 137 (10), 3068–3081.
- Gander M. P. S., Stephens D. A., (2007b), Simulation and Inference for Stochastic Volatility Models Driven by Lévy Processes, *Biometrika*, 94 (3), 627–646.
- Gerd H., Lunde A., Shephard N., Sheppard K., (2009), Oxford-Man Institute's Realized Library, Oxford-Man Institute, University of Oxford, dostęp online (8.04.2019): <https://realized.oxford-man.ox.ac.uk>.
- Gordon N. J., Salmond D. J., Smith A. F., (1993), Novel Approach to Nonlinear/Non-Gaussian Bayesian State Estimation, *IEE Proceedings F (Radar and Signal Processing)*, 140 (2), 107–113.
- Griffin J. E., Steel M. F. J., (2006), Inference with Non-Gaussian Ornstein-Uhlenbeck Processes for Stochastic Volatility, *Journal of Econometrics*, 134, (2), 605–644.
- Griffin J. E., Steel M. F. J., (2010), Bayesian Inference with Stochastic Volatility Models Using Continuous Superpositions Of Non-Gaussian Ornstein-Uhlenbeck Processes, *Computational Statistics & Data Analysis*, 54, (11), 2594–2608.
- Hubalek F., Posedel P., (2011), Joint Analysis and Estimation of Stock Prices And Trading Volume in Barndorff-Nielsen and Shephard Stochastic Volatility Models, *Quantitative Finance*, 11 (6), 917–932.
- Hubalek F., Sgarra C., (2011), On the Explicit Evaluation of the Geometric Asian Options in Stochastic Volatility Models With Jumps, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 235 (11), 3355–3365.
- James L. F., Kim D., Zhang Z., (2013), Exact Simulation Pricing with Gamma Processes and Their Extensions, arXiv preprint arXiv:1310.6526.
- James L. F., Müller G., Zhang Z., (2018), Stochastic Volatility Models Based on OU-Gamma Time Change: Theory and Estimation, *Journal of Business & Economic Statistics*, 36 (1), 75–87.
- Kantas N., Doucet A., Singh S. S., Maciejowski J., Chopin N., (2015), On Particle Methods for Parameter Estimation in State-Space Models, *Statistical Science*, 30 (3), 328–351.
- King A. A., Nguyen D., Ionides E. L., (2016), Statistical Inference for Partially Observed Markov Processes via the R Package Pomp, *Journal of Statistical Software*, 69 (12), 1–43.
- Kitagawa G., (1996), Monte Carlo Filter and Smoother for Non-Gaussian Nonlinear State Space Models, *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 5 (1), 1–25.
- Kliber P., (2013), *Zastosowanie procesów dyfuzji ze skokami do modelowania polskiego rynku finansowego*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu.
- Iacus S. M., (2009), *Simulation and Inference for Stochastic Differential Equations with R Examples*, Springer Science & Business Media.
- Ionides E. L., Bhadra A., Atchadé Y., King A., (2011), Iterated Filtering, *Annals of Statistics*, 39 (3), 1776–1802.
- Ionides E. L., Bretó C., King A. A., (2006), Inference for Nonlinear Dynamical Systems, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 103 (49), 18438–18443.

- Ionides E. L., Nguyen D., Atchadé Y., Stoev S., King A. A., (2015), Inference for Dynamic and Latent Variable Models via Iterated, Perturbed Bayes Maps, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 112 (3), 719–724.
- Lele S. R., Dennis B., Lutscher F., (2007), Data Cloning: Easy Maximum Likelihood Estimation for Complex Ecological Models Using Bayesian Markov Chain Monte Carlo Methods, *Ecology Letters*, 10 (7), 551–563.
- Lindström E., Ionides E., Frydendall J., Madsen H., (2012), Efficient Iterated Filtering, *IFAC Proceedings Volumes*, 45 (16), 1785–1790.
- Nguyen D., (2016), Another Look At Bayes Map Iterated Filtering, *Statistics & Probability Letters*, 118, 32–36.
- Nicolato E., Venardos E., (2003), Option Pricing in Stochastic Volatility Models of the Ornstein-Uhlenbeck Type, *Mathematical Finance*, 13 (4), 445–466.
- Pitt M. K., Shephard N., (1999), Filtering Via Simulation: Auxiliary Particle Filters, *Journal of the American statistical association*, 94 (446), 590–599.
- Raknerud A., Skare Ø., (2012), Indirect Inference Methods for Stochastic Volatility Models Based on Non-Gaussian Ornstein-Uhlenbeck Processes, *Computational Statistics & Data Analysis*, 56 (11), 3260–3275.
- Roberts G., Papaspiliopoulos O., Dellaportas P., (2004), Bayesian Inference for Non-Gaussian Ornstein-Uhlenbeck Stochastic Volatility Processes, *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*, 66 (2), 369–393.
- Schoutens W., (2003), Lévy Process in Finance. Pricing Financial Derivatives, John Wiley & Sons Ltd.
- Taufer E., Leonenko N., Bee M., (2011), Characteristic Function Estimation of Ornstein-Uhlenbeck-Based Stochastic Volatility Models, *Computational Statistics & Data Analysis*, 55 (8), 2525–2539.
- Weron A., Weron R., (1998), *Inżynieria finansowa*, WNT, Warszawa.

ZASTOSOWANIE ITEROWANEJ FILTRACJI DO ESTYMACJI PARAMETRÓW WARIANCJI CHWILOWEJ W RAMACH NIEGAUSSOWSKICH PROCESÓW STOCHASTYCZNEJ ZMIENNOŚCI TYPU ORNSTEINA-UHLENBECKA

Streszczenie

Artykuł przedstawia propozycję estymacji parametrów wariacji chwilowej za pomocą iterowanej filtracji z wykorzystaniem estymatora wariacji zrealizowanej w modelach stochastycznej zmienności typu Ornsteina-Uhlenbecka opartych na niegaussowskich procesach Lévy'ego. Przydatność zaproponowanej metody jest zilustrowana w badaniu empirycznym opartym na wariacji zrealizowanej wyznaczonej dla indeksu S&P500. Dokładność estymacji jest zweryfikowana w eksperymencie symulacyjnym.

Słowa kluczowe: stochastyczna zmienność, proces Ornsteina-Uhlenbecka, iterowana filtracja

**APPLICATION OF ITERATED FILTERING FOR PARAMETRIC ESTIMATION
OF INSTANTANEOUS VARIANCE IN THE CASE OF NON-GAUSSIAN
ORNSTEIN-UHLENBECK STOCHASTIC VOLATILITY PROCESSES**

Abstract

The article presents a method for parametric estimation of instantaneous variance in the case of non-Gaussian Ornstein-Uhlenbeck stochastic volatility process by means of the iterated filtering and realized variance estimator. The method is applied to realized variance of S&P500 index data. Empirical application is accompanied with simulation study to examine performance of the estimation technique.

Keywords: stochastic volatility, Ornstein-Uhlenbeck process, iterated filtering

JEL Codes: C51, C58