

Magdalena BARSKA¹

Analiza popytu w przemyśle hutniczym – zastosowanie modelu ze zmiennymi ukrytymi²

Streszczenie. Na popyt w przemyśle hutniczym wpływa wiele czynników. Nie wszystkie można zidentyfikować i zmierzyć. W artykule przedstawiono wyniki analizy popytu dla wybranego przedsiębiorstwa w latach 2010–2014. Celem przedstawionego badania jest budowa ukrytego modelu łańcuchów Markowa, który odzwierciedli punkty zwrotne zapotrzebowania na wyroby hutnicze oraz umożliwi prognozę wielkości tego zapotrzebowania. Zbadano własności prognostyczne i stabilność modelu. Przeprowadzono symulację polegającą na wygenerowaniu dużej liczby szeregów dla zadanych parametrów modelu i sprawdzeniu ich własności. Najlepiej dopasowanym modelem okazał się trójstanowy model ukrytych łańcuchów Markowa. Za jego pomocą opisano stany potencjalnie kształtujące wielkość popytu. Uwzględnienie stanu przejściowego pozwoliło uchwycić sygnał nadchodzącej zmiany pomiędzy fazami wzrostu i spadku. Zaproponowany model ukrytych łańcuchów Markowa drugiego rzędu może być alternatywą dla tradycyjnych metod analizy szeregów czasowych. Wyznaczona prognoza informuje o kształtowaniu się trendu i stanowi wskazówkę co do punktów zwrotnych koniunktury.

Słowa kluczowe: prognozowanie, popyt, zmienne ukryte, modele ukrytych łańcuchów Markowa

Analysis of demand in steel and iron industry – latent variables model

Abstract. Demand in the steel and iron industry is influenced by multiple factors. Not all of them can be identified and measured. The paper presents the results of the analysis of the levels of demand achieved by a selected enterprise from this sector in the years 2010–2014. The aim of the study is to build a hidden Markov model which would reflect the turning points of this demand, thus making it possible to forecast its future levels. The model's forecasting properties and stability have been examined. A simulation has been carried out that involved generating a high number of series for selected model parameters and checking their properties. This demonstrated that a three-state second order hidden Markov model was most relevant to the purpose of the study. Thanks to the model's application, it was possible to describe states which could potentially shape the demand. Moreover, taking the transition state into consideration allowed spotting the signal about the upcoming replacement of the growth phase with the decline phase, and vice versa. The presented second order hidden Markov model can serve as an alternative to the traditional methods of the analysis of time series. The forecast generated by the model informs about the shaping of a trend in demand and serves as an indication of the shifts in economic cycles.

Keywords: forecasting, demand, latent variables, hidden Markov models

JEL Classification: C15, C51

¹ Szkoła Główna Handlowa w Warszawie, Kolegium Analiz Ekonomicznych, al. Niepodległości 162, 02-554 Warszawa, e-mail: d09a1997@doktorant.sgh.waw.pl, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6410-7929>.

² Badanie opisane w artykule zostało zrealizowane w ramach Badań Młodych Naukowców nr KAE/BMN/15/15.

1. WPROWADZENIE

W modelowaniu popytu powszechnie stosowane są modele ARIMA oraz regresja logistyczna. Briffaut i Lallement (2010) badają popyt w budownictwie za pomocą programowania dynamicznego. Klug (2011) stosuje symulację Monte Carlo w monitorowaniu popytu dla przedsiębiorstwa z branży motoryzacyjnej. Rippe i in. (1976) wykorzystują klasyczne modele szeregów czasowych w badaniu rynków przemysłowych.

Na popyt w przemyśle hutniczym wpływają m.in. takie czynniki, jak polityka gospodarcza i środowiskowa, zmiany koniunktury, działania konkurencji oraz działania marketingowe firmy. Niektóre z tych czynników obserwowane są jedynie pośrednio poprzez oddziaływanie na wielkość badanego zjawiska, a ocena ich wpływu jest subiektywna. Modele o charakterze deterministycznym nie dają możliwości uwzględniania zmiennych niejawnych. Przesłanki te potwierdzają zasadność badania popytu w przemyśle hutniczym za pomocą modelu ze zmiennymi ukrytymi.

Wprowadzone przez Bauma i Petriego (1966) ukryte modele łańcuchów Markowa stanowią klasę procesów stochastycznych służących do modelowania zjawisk o charakterze sekwencyjnym. Zjawisko przedstawione jest jako proces Markowa, dla którego obserwacja jest losową funkcją nieobserwowalnego stanu. Jednym z pierwszych zastosowań ukrytych łańcuchów Markowa było rozpoznawanie znaków. Z czasem zyskały na popularności w genetyce i biochemii, gdzie stosowane są m.in. w rozpoznawaniu mowy (Rabiner, Juang, 1991) czy modelowaniu sekwencji biologicznych. Za ich pomocą badano zjawiska przyrody (Zucchini, Guttorp, 1991), szacowano występowanie ataków epilepsji (Albert, 1991), analizowano wydarzenia polityczne (Schrodt, 2006). W literaturze dużo uwagi poświęca się analizie cykli koniunkturalnych oraz punktów zwrotnych z wykorzystaniem modeli o charakterze niedeterministycznym (m.in. Hamilton, 1990). Nguyen i Nguyen (2015) za pomocą modeli Markowa prognozują wielkość zmiennych makroekonomicznych wpływających na ceny akcji.

W artykule przedstawiono wyniki analizy popytu w przemyśle hutniczym, posługując się modelami Markowa mającymi niedeterministyczny charakter, które stanowią alternatywę dla powszechnie stosowanych zaawansowanych metod analizy szeregów czasowych. W literaturze brak przykładów stosowania tego typu modeli w prognozowaniu wskaźników przemysłu ciężkiego, będącego pod dużym wpływem niemierzalnych lub niejawnych czynników. Uwzględnienie tych oddziaływań jest ważne dla zwiększenia wiarygodności rezultatu.

Celem badania jest budowa ukrytego modelu łańcuchów Markowa, który odzwierciedli punkty zwrotne zapotrzebowania na wyroby hutnicze oraz umożliwi prognozę wielkości tego zapotrzebowania. Jest to bardzo istotne z punktu wi-

dzenia uczestników rynku planujących rozmiar produkcji, zapasów i zatrudnienie. W porównaniu z tradycyjnymi metodami prognozowania modele Markowa uwzględniają losowy charakter kształtowania się zjawiska, zamiast opierać się jedynie na historycznych danych.

Liczbę stanów w modelu Markowa wyodrębniono na podstawie teoretycznej analizy wartości szeregu. Najlepszy model ustalono na podstawie algorytmu Bauma-Welcha, zadając różne parametry początkowe. Rezultaty porównano z algorytmem *backward*. W celu weryfikacji rezultatu dokonano symulacji wartości dla 1000 szeregów na podstawie wyznaczonego modelu i sprawdzono ich własności. Wyniki porównano z wartościami empirycznymi. Następnie dokonano rekalkulacji parametrów modelu z wyłączeniem zbioru testowego oraz porównano prognozę krótko- i średniookresową z prognozą jednej z powszechnie stosowanych metod badania szeregów czasowych – ARIMA. ARIMA i modele Markowa opierają się na odmiennych założeniach, dlatego uzyskanie podobnego rezultatu jest jedną z metod walidacji modelu Markowa.

2. CHARAKTERYSTYKA UKRYTYCH MODELI ŁAŃCUCHÓW MARKOWA

Cappé i in. (2005) oraz Bernardelli (2013) formułują następującą definicję modeli Markowa na gruncie terminologii z dziedziny automatów skończonych³: S_X jest niepustym, skończonym k -elementowym zbiorem stanów ze stanem π , będącym stanem początkowym. Wówczas macierzą przejść jednorodnego łańcucha Markowa jest

$$P = [p_{ij}]_{i,j=1}^k, \quad (1)$$

gdzie $i, j = 1, \dots, k$ oraz $p_{ij} = P(X_t = j | X_{t-1})$. Określone w ten sposób p_{ij} jest prawdopodobieństwem przejścia ze stanu i do stanu j . Dodatkowo macierz przejść jest stochastyczna, co implikuje, że dla każdego i

$$\sum_{j=1}^k p_{ij} = 1. \quad (2)$$

Ukryte modele łańcuchów Markowa są procesami stochastycznymi, charakteryzowanymi przez jednorodny łańcuch Markowa o określonej liczbie stanów oraz losowe funkcje związane ze stanami. Stanowią one poszerzenie definicji łańcuchów Markowa o pewien alfabet S_Y , którego znaki są w danym stanie generowane z określonym prawdopodobieństwem. Łańcuch Markowa definiowany jest

³ Automat skończony stanowi abstrakcyjny model zachowania systemu, dokonujący przejść między stanami w kolejnych iteracjach na podstawie tablicy przejść o wartościach dyskretnych (por. Mitchell, 1997).

jako jednorodny w czasie, gdy prawdopodobieństwo przejścia między stanami nie zależy od momentu t . Dany proces znajdujący się w stanie S_x w momencie t emituje symbol $i \in A$ z prawdopodobieństwem $e_i(x)$. W momencie $t + 1$ przechodzi do stanu j z prawdopodobieństwem p_{ij} . Zakładamy też, że każdy stan emituje znak, zatem

$$\sum_{x \in A} e_i(x) = 1. \quad (3)$$

W każdym momencie t proces znajduje się w jednym stanie, a obserwacja generowana jest przez pewną losową funkcję. Kolejne stany łańcucha Markowa nie są obserwowalne, znane są jedynie realizacje procesu jako wyniki działania losowych funkcji. Definiujemy w ten sposób złożony proces $(X_t, Y_t)_{t=1}^{\infty}$, gdzie $(X_t)_{t=1}^{\infty}$ stanowi łańcuch Markowa, a $(Y_t)_{t=1}^{\infty}$ jest ciągiem obserwacji $y_t \in S_Y$. Prawdopodobieństwa emisji znaku z alfabetu $S_Y = 1, 2, \dots, M$ zapisywane są w macierzy $\Pi = [\pi_{xy}]$ o wymiarach $(N \times M)$, gdzie $x \in S_X | y \in S_Y$ (Pietrzykowski, Sałabun, 2014).

Cechą łańcucha Markowa jest zależność bieżącego stanu jedynie od stanu poprzedniego. Skrondal i Rabe-Hesketh (2004) mówią o konieczności rozróżnienia dwóch rodzajów zależności osiągnięcia danego stanu. Na podstawie badania zatrudnienia zamężnych kobiet w Stanach Zjednoczonych autorzy wskazują na większą skłonność podjęcia zatrudnienia przez kobiety, które pracowały w przeszłości, m.in. ze względu na nabytą wiedzę i doświadczenie. Jednak nie jest to jedyne wytłumaczenie i stan może być wywołany przez inne, nieoczywiste czynniki, niezwiązane z historią zatrudnienia, czyli przeszłym wystąpieniem tego stanu.

Dla k -elementowej przestrzeni stanów ukrytego łańcucha Markowa mówimy o k -stanowym modelu Markowa. W zależności od typu badanego szeregu liczbę stanów może stanowić np. średnia liczba obserwacji lub empiryczna obserwacja i interpretacja ekonomiczna stanów. Dla przykładu Bartolucci i inni (2009) w modelu oceny wydajności domów opieki społecznej za liczbę stanów przyjmują stan zdrowia pacjentów. Ścieżka kolejnych stanów wyznaczana jest na podstawie algorytmu Viterbiego, który oblicza najbardziej prawdopodobny ciąg na podstawie wartości obserwowanych w kolejnych okresach. Zwykle stosuje się modele dwu-, trzy- i czterostanowe ze względu na możliwość interpretacji rezultatu. Średni czas pozostawania w danym stanie określony jest wzorem:

$$v(i) = \frac{1}{1 - p_{i,i}}, \quad (4)$$

z wyjątkiem przypadku, gdy $p_{ij} = 1$. Stany i i j komunikują się, gdy możliwe jest przejście ze stanu i do j i odwrotnie. Jeśli wszystkie stany się komunikują, łańcuch nazywamy nieprzywiedlnym (Bernardelli, 2013).

Model ukrytych łańcuchów Markowa wymaga wyznaczenia wektora prawdopodobieństw stanu początkowego $\pi = \{\pi_i\}$. Przez $\pi_i = P(X_i = i)$ oznaczamy prawdopodobieństwo, że i jest stanem początkowym. $\pi = [\pi_i]$ to wektor o wymiarach $(1 \times N)$, który reprezentuje rozkład początkowy. Zwiernik (2005) podaje, że z tradycji modelowania ukrytych łańcuchów Markowa wynika założenie, że rozkład początkowy procesu jest rozkładem stacjonarnym. Rozkład prawdopodobieństwa $(\pi_i)_{i \in S_x}$ nazywamy stacjonarnym, gdy $\pi = \pi P$, tj. $\sum_{j \in S_x} \pi_j = 1$ i dla każdego j jest spełnione $\pi_j \geq 0$ oraz $\pi_j = \sum_i \pi_i p_{ij}$. Jak podkreśla Zwiernik (2005), założenie to nie odgrywa istotnej roli przy wystarczająco dużej liczbie obserwacji.

Zgodnie z powyższą notacją uporządkowana trójka (π, P, Π) stanowi łańcuch Markowa o N stanach i M znakach. Figielska (2011) zaznacza, że model określony jest poprzez rodzaj powiązań między stanami. W przypadku gdy przejście do danego stanu może nastąpić z każdego innego stanu, mamy do czynienia z modelem ergodycznym. W modelu Bakisa (tzw. model „od lewej do prawej”) stany występują w określonej sekwencji, tzn. numer stanu wzrasta wraz ze zmianą t . Tego typu model właściwy jest dla modelowania sygnałów o własnościach zmieniających się w czasie. Nie jest możliwe przejście do stanu o numerze mniejszym od poprzedniego, a sekwencja zaczyna się w stanie 1.

W przypadku dyskretnych szeregów czasowych przyjmuje się, że kolejne obserwacje są generowane przez jednorodny proces Poissona (Zwiernik, 2005). Wówczas wyniki w następujących po sobie okresach są niezależnymi zmiennymi losowymi o wartości oczekiwanej równej wariancji, zgodnie z charakterystyką rozkładu Poissona. Spodziewamy się jednak, że występuje wzajemna zależność między obserwacjami, przeszłe obserwacje wpływają na bieżące, a wariancja może być wyższa od średniej. Zakłada się wówczas, że obserwacje są generowane przez odrębne procesy Poissona, o różnych średnich (λ_1 i λ_2 dla dwóch stanów), między którymi występuje proces przelicznikowy. λ_1 wybierane jest z prawdopodobieństwem δ_1 , a λ_2 z prawdopodobieństwem $\delta_2 = 1 - \delta_1$. Użytkowana w ten sposób wariancja jest większa od średniej. Przyjmując, że procesem przełącznikowym jest łańcuch Markowa, a nie ciąg niezależnych zmiennych losowych, otrzymujemy wzajemną zależność między obserwacjami. Przedstawiony model wykorzystali Albert (1991) oraz Le i in. (1992) w analizie ataków padaczki.

Innym podejściem w analizowaniu rozkładów dyskretnych jest przełączanie rozkładów wielomianowych. Dla danej liczby obserwacji model wymaga oszacowania warunkowego rozkładu emisji dla N stanów, wyrażonego przez prawdopodobieństwo sukcesu p_i oraz $N^2 - N$ elementów macierzy przejścia leżących poza główną przekątną (Zwiernik, 2005). Proces Y_t o rozkładzie dwumianowym charakteryzują dwa parametry: liczba prób n oraz prawdopodobieństwo sukcesu w jednej próbie p , przy czym n nie musi być stałe w czasie. Wówczas p_i określa prawdopodobieństwo sukcesu związane ze zdarzeniem $\{X_i = i\}$. Crowder i inni (2005) stosują takie podejście w modelowaniu rynku obligacji.

Autorzy analizują sytuację na rynku inwestycyjnym dla różnych sektorów w stanie normalnego i podwyższonego ryzyka. Z kolei Azzalini i Bowman (1990) posługują się modelem opartym na rozkładzie wielomianowym w badaniu erupcji gejzera.

Ukryte modele Markowa rozkładów ciągłych znalazły zastosowanie w analizie cykli koniunkturalnych ze względu na brak możliwości bezpośredniego zmierzenia aktywności gospodarczej. Badania empiryczne wskazują na występowanie okresów ekspansji i recesji. Stan, w jakim znajduje się gospodarka, nie jest znany, można natomiast analizować pewne wielkości makroekonomiczne jako wskaźniki tej aktywności, np. PKB. Hamilton (1990) proponuje ukryty model Markowa badający zwroty cyklu dla Stanów Zjednoczonych na podstawie prawdopodobieństwa przełączania między dwoma łańcuchami.

3. PRZESŁANKI WYBORU MODELU ZE WZGLĘDU NA SPECYFIKĘ PRZEMYSŁU HUTNICZEGO

Trudno zidentyfikować wszystkie czynniki wpływu i skalę ich oddziaływania na popyt. W przypadku zjawisk nieobserwowalnych bezpośrednio istotną kwestią pozostaje sposób pomiaru zmiennej ukrytej. Niektóre zmienne można pośrednio wprowadzić do modelu za pomocą odpowiedniego indeksu, np. wskaźnika koniunktury, który pozwala na oszacowanie wielkości zjawiska. Modelowanie opiera się na zidentyfikowaniu związków między zmiennymi wskaźnikowymi. Zmienne objaśniające mogą być liniowymi kombinacjami ukrytych czynników. Wskaźnik klimatu koniunktury może np. odzwierciedlać przewidywania przedsiębiorców dotyczące kondycji rynku. Analiza zmiennych mierzalnych lub deklarowanych pozwala na wykorzystanie ich w modelu jako źródła informacji o czynnikach niemierzalnych pod warunkiem zidentyfikowania związku między nimi. Jednak nie wszystkie zmienne posiadają taki indeks, a wybór wskaźnika jest subiektywny. Wynika stąd potrzeba wykorzystania modeli klas ukrytych. Zastosowanie modeli niejawnych łańcuchów Markowa pozwala na oszacowanie skali wpływu zjawiska bez znajomości jego konkretnych wartości. Kolejne stany łańcucha Markowa nie są obserwowalne, znane są jedynie następujące realizacje procesu.

Wybór modelu podyktowany jest specyfiką przemysłu ciężkiego. Produkcja hutnicza przeznaczona jest dla przemysłu energetycznego, metalurgicznego, maszynowego i okrętowego. Wielkość popytu zależy od zapotrzebowania w gałęziach powiązanych, co powoduje, że kondycja sektora jest mocno sprzężona z ogólną koniunkturą gospodarczą (Hidalgo Gonzalez, Kamiński, 2011). Odbiorcami rzadko są indywidualni konsumenci. Wytwarza się przede wszystkim części składowe, a popyt powiązany jest z zainteresowaniem odbiorców produktami końcowymi. Mała elastyczność cenowa popytu wynika ze specjalizacji. Wśród pozacenowych czynników wpływających na zainteresowanie ofertą Urbaniak (1999) wymienia: jakość, przestrzeganie wymogów ochrony środowiska, koniunkturę gospodarczą, politykę gospodarczą, działania konkurencji, działania

marketingowe, wdrażanie przedsięwzięć infrastrukturalnych o dużej skali. Popyt można pobudzić poprzez uczestnictwo w targach lub reklamę w czasopismach branżowych. Znaczenie mają kompetencje przedstawicieli handlowych, udzielane upusty i możliwość negocjowania cen. Poza tym istotna jest lokalizacja przedsiębiorstwa, pozwalająca na zmniejszenie kosztów dostaw. Ważną cechą rynku jest konieczność dostarczenia produktu o określonych parametrach oraz złożony cykl produkcji, co wiąże się z wysokimi kosztami. Obecność na rynkach międzynarodowych pozwala na dywersyfikację rynków zbytu. Zdarza się jednak, że przedsiębiorstwa spotykają się z preferencyjnym traktowaniem lokalnych producentów lub z niesprzyjającą polityką gospodarczą goszczącego kraju.

Struktura rynku opiera się na kilku dużych przedsiębiorstwach oraz kilkudziesięciu średniej i małej wielkości zakładach i zbliżona jest do oligopolu, zgodnie z definicją przedstawioną przez Tirole (1988). Na rynku działa stosunkowo niewielu producentów, a decyzje w sprawie cen i wielkości produkcji kształtują się w zależności od czynników pozostałych. Przedsiębiorstwa ustalają optymalną dla siebie strategię działania. Wzrost cen w sektorze może nastąpić np. wskutek wzrostu kosztów energii.

Liczba potencjalnych nabywców jest względnie stała. Skupieni są oni w określonych regionach. Odbiorcami wyrobów są także dystrybutorzy i jednostki wewnętrzne przedsiębiorstwa, np. działy marketingu oraz badań i rozwoju, pracujące nad promocją lub ulepszaniem technologii. Przemysł charakteryzuje się niską elastycznością zwiększania mocy wytwórczych. Występują korzyści skali. Z tego powodu wymagany jest długi horyzont prognozy. W długim okresie firmy mogą dostosować się do nowych warunków poprzez zwiększenie zatrudnienia lub rozbudowę zakładów. Rozmiar produkcji podyktowany jest maksymalizacją zysku, a nie wielkością popytu. Koszt krańcowy początkowo jest wysoki, co wiąże się z alokacją środków w maszyny i technologie, ale stopniowo maleje.

Dla pełnego obrazu uwarunkowań przemysłu hutniczego należy również uwzględnić kontekst historyczny. Tradycje hutnictwa sięgają XVI w. Przez lata udoskonalano proces technologiczny, a wyroby znajdowały coraz więcej zastosowań. Rozwój w okresie powojennym miał związek z odbudową zniszczeń. W czasie transformacji gospodarki w latach 90. XX w. państwowe przedsiębiorstwa napotykały trudności z dostosowaniem się do nowych wymogów (Nowara, Szarzec, 2004). W wielu przypadkach proces restrukturyzacji i możliwość samodzielnego funkcjonowania bez pomocy państwa były możliwe dzięki przejęciu przez zagranicznego inwestora, a przedsiębiorstwa stawały się częścią ponadnarodowych holdingów. Kwilinski (2018) podkreśla, że w gospodarce opartej na wiedzy zakłady produkcyjne stoją przed wyzwaniami związanymi z koniecznością wspierania przedsiębiorczości, nawiązania współpracy z centrami badawczymi, inwestowania w kapitał ludzki, wdrażania infrastruktury informatycznej. Wprowadzanie tych zmian jest procesem długotrwałym, wymagającym rewizji sposobu zarządzania i struktur organizacyjnych, doskonalenia systemów infor-

matycznych i logistyki, ale prowadzi do poprawy konkurencyjności firmy (Rachwał, 2008).

W ostatnich latach obserwujemy zmienne zapotrzebowanie na wyroby polskich hut, a jego skala zależy od rodzaju produkcji i kondycji rynku odbiorcy. Przemysł motoryzacyjny, postrzegany jako jeden z głównych odbiorców, notuje okresy wzrostu i spadku, a przedsiębiorstwa hutnicze muszą dostosowywać się do zmieniających się trendów i zainteresowania lżejszymi samochodami o mniejszych silnikach, których części wytwarzane są w kuźniach⁴. Dobre perspektywy ma przed sobą budownictwo związane z ochroną środowiska, transportem i energetyką, za sprawą środków unijnych przeznaczonych na inwestycje tego typu. Prognozuje się również dynamiczny rozwój przemysłu energetycznego w zakresie alternatywnych form pozyskania energii, m.in. energii ze źródeł odnawialnych, energii jądrowej, energetyki wiatrowej (Hutnicza Izba Przemysłowo-Handlowa, 2017). Przemysł stoczniowy boryka się z licznymi trudnościami, chociaż nadal pozostaje kluczowy ze względu na handel drogą morską (Instytut Studiów Wschodnich, 2018).

Modele klas ukrytych pozwalają oszacować sumaryczny wpływ wymienionych czynników na popyt bez konieczności ich identyfikacji.

4. ESTYMACJA PARAMETRÓW MODELU

Estymacji parametrów dokonuje się na podstawie algorytmu Bauma-Welcha (Baum, Eagon, 1967), algorytmu prefiksowo-sufikсового (Rabinier, 1989; Jurafsky, Martin, 2008) oraz metod gradientowych (Jelinek, 1976). Algorytm Bauma-Welcha polega na znalezieniu w kolejnych iteracjach lokalnego maksimum funkcji wiarygodności $\mathcal{L}(\theta)$. Opiera się na trzech formułach reestymacyjnych dla parametrów modelu i wymaga wyprowadzenia estymatorów NWW dla parametrów rozkładu początkowego, prawdopodobieństw przejść i parametrów warunkowych gęstości emisji (Zwiernik, 2005). Algorytm prefiksowo-sufiksowy wymaga policzenia prawdopodobieństwa prefiksowego i sufiksowego dla wszystkich stanów N i okresów t . Jest to metoda ogólna polegająca na obliczeniu funkcji wiarygodności $\mathcal{L}(\theta) = P(y^{(T)}|\theta)$ wystąpienia danej sekwencji obserwacji $y^{(T)}$ przy zadanych parametrach modelu (Zwiernik, 2005). Prawdopodobieństwa prefiksowe $\alpha_t(i)$ i sufiksowe $\beta_t(i)$ wyznacza się jako:

$$\alpha_t(i) = P(Y_1 = y_1, \dots, Y_T = y_t, X_T = i | \theta), \quad (5)$$

$$\beta_t(i) = P(Y_{t+1} = y_{t+1}, \dots, Y_T = y_t, X_T = i | \theta). \quad (6)$$

⁴ <http://www.euroforge.org/industry-portrait/trends-in-europe.html> (dostęp: 1.10.2018).

Prawdopodobieństwa dla kolejnych stanów i okresów wyznaczone są rekurencyjnie, a wartości początkowe wyznaczone są dla przyjętych parametrów modelu jako:

$$\alpha_1(i) = P(X_1 = i)P(Y_1 = y_1, X_1 = i|\theta) = \delta_i \pi_{iy_1}, \quad (7)$$

$$\beta_T(i) = 1. \quad (8)$$

Metody oparte na gradientach bazują na wielkości funkcji w punktach oraz informacji o pochodnych. Lokalne minimum znajduje się poprzez wyznaczanie kolejnych kierunków poszukiwań w oparciu o gradient funkcji celu, w punkcie osiągniętym w poprzedniej iteracji.

Nie ma gwarancji znalezienia optymalnych parametrów, a jakość oszacowania zależy od przyjętych wartości początkowych. Otrzymane rozwiązanie może być jedynie optimum lokalnym dla zadanych wartości startowych (Figielska, 2012; Bernardelli, 2013). W tej sytuacji należy rozważyć powtórzenie algorytmu dla różnych wartości początkowych i wybór optymalnego rozwiązania na podstawie wartości kryteriów informacyjnych.

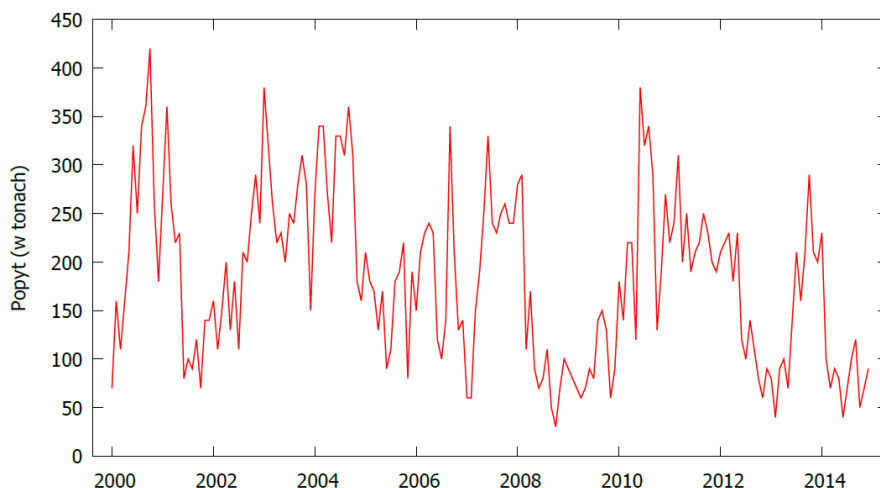
5. MODEL

Badanie przeprowadzono dla lat 2000–2014 z wykorzystaniem danych jednego z producentów wyrobów hutniczych w Polsce. Firma jest jednym z większych przedstawicieli rynku, którego strukturę można określić jako kilkanaście dużych i średnich zakładów oraz kilkadziesiąt małych kuźni. Produkcja przeznaczona jest głównie na rynek krajowy i rynki europejskie. Przedsiębiorstwo przeszło typową dla tego typu zakładów drogę związaną z transformacją polskiej gospodarki po upadku komunizmu. W latach 90. XX w. zmagало się z dostosowaniem do gospodarki rynkowej oraz silną konkurencją na skutek otwarcia granic. Proces dostosowawczy był długotrwały, ale zakończył się pomyślnie przy udziale zagranicznego kapitału. Obecnie przedsiębiorstwo jest częścią dużej europejskiej grupy. Inwestuje w nowe technologie i rozwój kadr, wprowadza innowacje w zakresie zarządzania, dba o ciągle usprawnianie procesu produkcji z poszanowaniem środowiska, przeznacza środki na promocję i umacnianie wizerunku firmy, a także stosuje strategię upustów dla stałych odbiorców. Firma stara się również dywersyfikować rodzaj produkcji i rynki zbytu, co skutkuje mniejszą wrażliwością na załamania na rynkach odbiorców. W obliczu silnej konkurencji przedsiębiorstw z Azji kładzie duży nacisk na jakość wyrobów i uzyskiwanie certyfikatów. W ostatnich latach ograniczyła produkcję dla przemysłu okrętowego, który boryka się z trudnościami.

Szereg na rys. 1, przedstawiający zapotrzebowanie na wyroby dla przemysłu maszynowego, charakteryzuje się znacznymi wahaniami. Fluktuacje mogą być wynikiem zmian polityki środowiskowej, koniunktury gospodarczej, kondycji powiązanych przemysłów lub być efektem sezonowym.

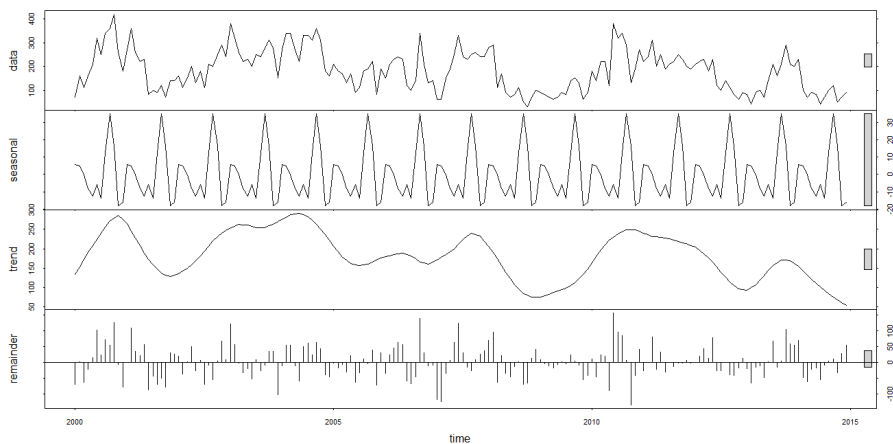
Na podstawie testu ADF odrzucono hipotezę o występowaniu pierwiastka jednostkowego przy $p = 0,0282$. Hipotezę o normalności rozkładu odrzucono na podstawie testu Shapiro-Wilka ($p = 0,0003$) i testu Jarque'a-Bery ($p = 0,03$). Za pomocą procedury stl programu R wyznaczono trend, element sezonowy oraz element losowy (rys. 2). Rysunek 3 jest ilustracją skali wahań sezonowych i losowych względem właściwego szeregu. Przeprowadzone w programie Demetra testy sezonowości nie potwierdzają jej występowania. Biorąc to pod uwagę, a także rezultat procedury programu R, która wskazuje na niski udział wahań sezonowych względem oryginalnego szeregu, potraktowano składową sezonową oraz składową losową jako realizacje składowej obserwowalnej.

Rysunek 1. Miesięczny popyt na wyroby przeznaczone dla przemysłu maszynowego



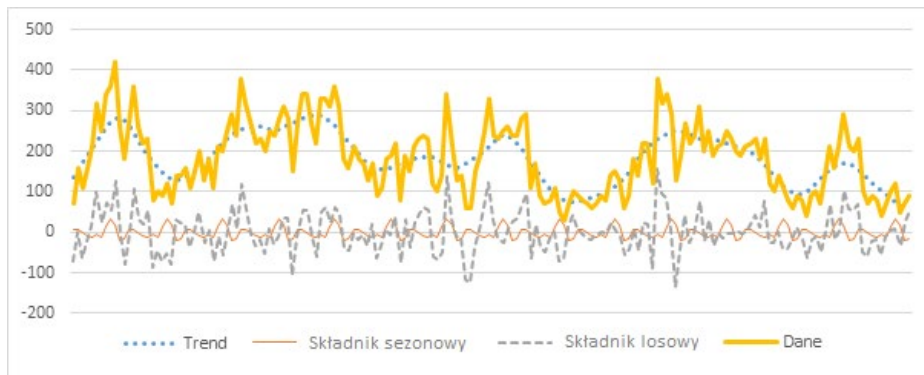
Źródło: obliczenia własne w programie Gretl.

Rysunek 2. Procedura stl



Źródło: obliczenia własne w programie R.

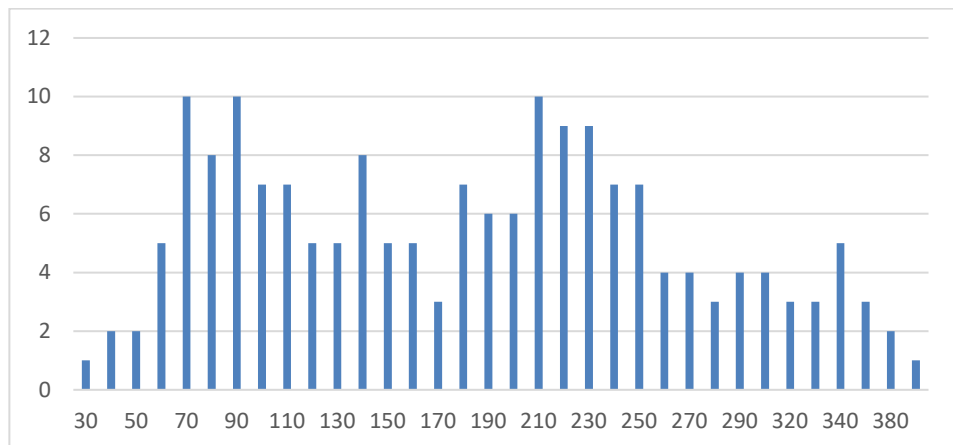
Rysunek 3. Skala wahań sezonowych i losowych względem oryginalnego szeregu



Źródło: obliczenia własne w programie JDemetra+.

Ze względu na mnogość czynników wpływu oraz brak miary, która umożliwiłaby ich bezpośrednio wprowadzenie do modelu, przyjęto, że stanowią one zmienne ukryte. Obserwujemy jedynie ich sumaryczny wpływ na badaną zmienną. Na podstawie wykresu szeregu nie można wnioskować o liczbie stanów ukrytego modelu łańcuchów Markowa. Przed przystąpieniem do obliczenia częstości występowania poszczególnych wartości i wyznaczenia liczby stanów zmodyfikowano szereg, zaokrąglając wszystkie wartości do 5 ton. Uzyskano w ten sposób 34 unikalne obserwacje spośród 180 obserwacji ogółem. Rysunek 4 ilustruje licznosc poszczególnych obserwacji.

Rysunek 4. Histogram częstości obserwacji



Źródło: obliczenia własne w programie Excel.

W badanym szeregu możemy wyodrębnić trzy podgrupy, dla których częstość obserwacji przebiega zgodnie z rozkładem normalnym. Jako granice dla podgrup wyznaczono wartości 160 i 280. Tablica 1 przedstawia średnie i wariancje w podgrupach. Odchylenia standardowe w podgrupach są znacząco mniejsze niż dla wszystkich obserwacji. W ostatniej podgrupie, dla której wartości szeregu są najwyższe, występuje jedynie 25 obserwacji, co nie pozwala na wiarygodne zbadanie własności szeregu. W pozostałych dwóch grupach nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy o normalności rozkładów (na podstawie testu Jarque'a-Bery).

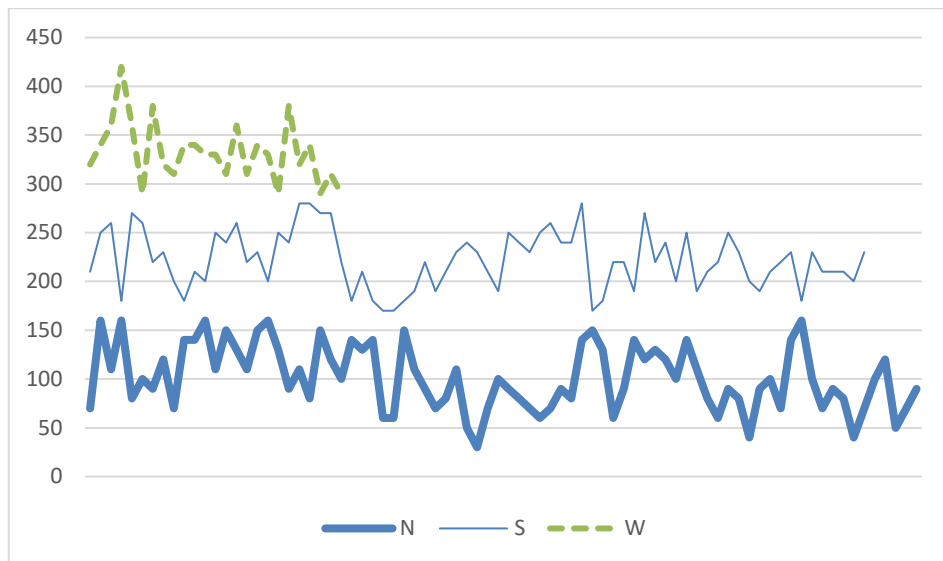
TABLICA 1. ŚREDNIE I WARIANCJE W GRUPACH

Wyszczególnienie	$T(n = 180)$	$N(n = 80)$	$S(n = 75)$	$W(n = 25)$
Średnia	183,9	101,8	222,0	332,4
Odchylenie standardowe	87,7	33,5	29,5	31,9

Źródło: opracowanie własne.

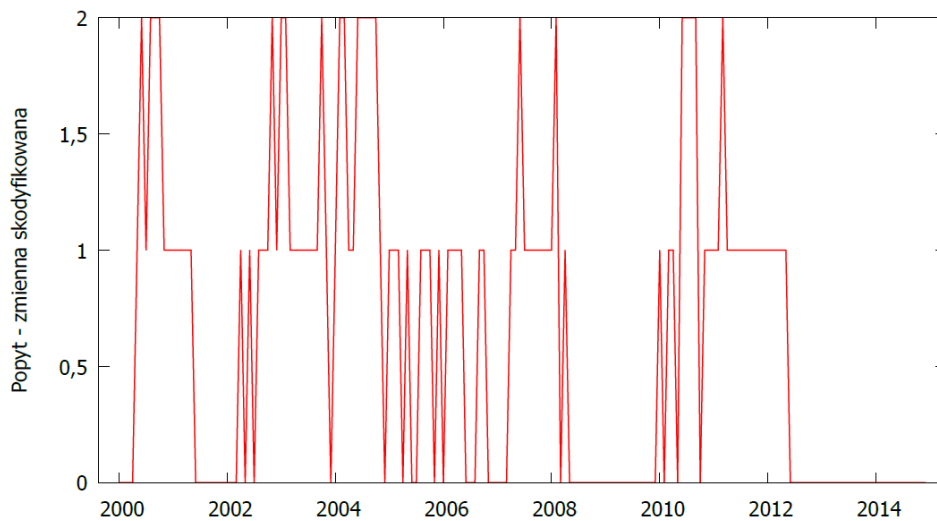
Rysunek 5 jest ilustracją szeregów dla wartości niskich, umiarkowanych i wysokich. Uwzględniając to, że w grupie trzeciej występuje mniejsza liczba obserwacji, można zauważyć, że kształtują się one podobnie. Analiza histogramu oraz różnice wielkości odchyłeń standardowych w poszczególnych podgrupach mogą wskazywać na występowanie trzech stanów. Model wymaga zbudowania macierzy emisji o wymiarach $N \times M$, należałoby zatem wyznaczyć $N^2 + N(M - 2)$ warunkowych prawdopodobieństw. W przypadku $N = 3$ i $M = 34$ staje się to nieefektywne. W celu ograniczenia liczby parametrów przyjęto model dla szeregu o rozkładzie wielomianowym. Dla danej liczby obserwacji warunkowy rozkład emisji dla trzech stanów jest wyznaczony przez prawdopodobieństwo sukcesu p_i . Należy zatem wyznaczyć prawdopodobieństwa sukcesu p_i dla trzech stanów oraz sześciu elementów macierzy przejścia leżących poza przekątną. X_t jest łańcuchem Markowa o wartościach z trójelementowej przestrzeni stanów $S_X = \{N, S, W\}$. Stany określono umownie jako odpowiadające niskim, średnim i wysokim wartościom popytu. Przez $\pi_i = P(X_i = i)$ oznaczamy prawdopodobieństwo, że stanem początkowym jest stan i . Wektor $\pi = [\pi_1, \pi_2, \pi_3]$ jest rozkładem początkowym. Początkowe prawdopodobieństwa znalezienia się procesu w stanach N, S, W wynoszą odpowiednio 0,444, 0,417 i 0,319. Są one równoważne udziałowi niskich, umiarkowanych i wysokich wartości popytu w badanym szeregu.

Rysunek 5. Prezentacja graficzna szeregów dla wartości niskich, umiarkowanych i wysokich



Źródło: obliczenia własne w programie Excel.

Rysunek 6. Wielkość popytu – zmienna skodyfikowana



Źródło: obliczenia własne w programie Gretl.

Celem konstrukcji modelu jest wyznaczenie trendu kształtowania popytu oraz punktów zwrotnych, nie zaś konkretnych wartości zjawiska. Chcemy określić, kiedy wystąpiły okresy wzmożonego i niskiego popytu. Dla uproszczenia modelu skodyfikowano dane, tworząc zbiór obserwacji $S_Y = \{0,1,2\}$, alfabet składa się zatem z trzech znaków. Klasyfikację oparto na tej samej podstawie co w przypadku wyznaczania stanów. Wartość 0 określa niskie, a 2 wysokie wartości popytu. Rysunek 6 jest ilustracją zmian popytu dla zmiennej skodyfikowanej. Proces można opisać następująco: po kilku okresach występowania niskich wartości popytu następują okresy przejściowe wartości umiarkowanych, naprzemienienie z krótkimi okresami, kiedy notujemy wartości wysokie. Wyznaczono początkowe składniki macierzy przejścia między stanami. Korzystając z procedur języka R i zadając różne parametry początkowe, ustalono optymalne parametry macierzy przejścia i macierzy emisji (tabl. 2 i 3).

TABLICA 2. MACIERZ PRZEJŚCIA

St a n	<i>N</i>	<i>S</i>	<i>W</i>
<i>N</i>	0,786	0,138	0,076
<i>S</i>	0,211	0,647	0,141
<i>W</i>	0,043	0,046	0,911

Ź r ó d ł o: opracowanie własne.

TABLICA 3. MACIERZ EMISJI

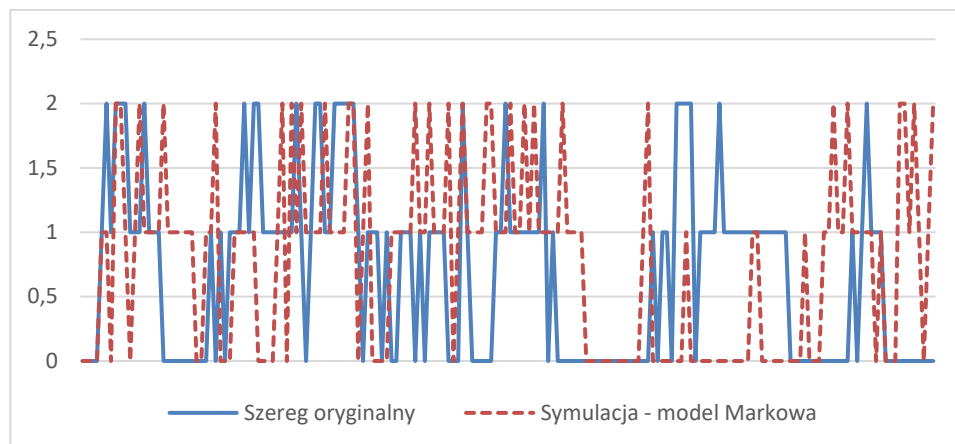
St a n	0	1	2
<i>N</i>	0,91	0,08	0,00
<i>S</i>	0,79	0,20	0,01
<i>W</i>	0,06	0,68	0,26

Ź r ó d ł o: opracowanie własne.

Zauważmy, że wszystkie stany się komunikują. Macierz przejścia wskazuje, że rzadko zachodzi przejście ze stanu *W* do stanu *N* i odwrotnie. Średni czas przebywania w stanie *N* jest równy $1/(1-0,786)$, czyli 4,7 okresu, w stanie *S* nieco ponad 3 okresy, a w stanie *W* – 11 okresów.

Symulację wartości szeregu przeprowadzono zgodnie z wyznaczonymi parametrami modelu Markowa. Rysunek 7 przedstawia szereg oryginalny i symulowany. Obserwacje z symulacji modelu Markowa częściowo pokrywają się z oryginalnym szeregiem.

Rysunek 7. Wartości rzeczywiste i prognozowane



Źródło: obliczenia własne w programie Excel.

Tablica 4 zawiera wartości funkcji autokorelacji (ACF) i autokorelacji cząstkowej (PACF) właściwego szeregu. Funkcja ACF stopniowo wygasa, a liczba niezerowych wartości jest równa 7. Funkcja autokorelacji cząstkowej przyjmuje istotne wartości do drugiego opóźnienia. Dla wygenerowanego na podstawie parametrów modelu Markowa szeregu funkcja ACF kształtuje się nieco odmiennie, tzn. pozostaje istotna dla większej liczby opóźnień (por. rysunek 8).

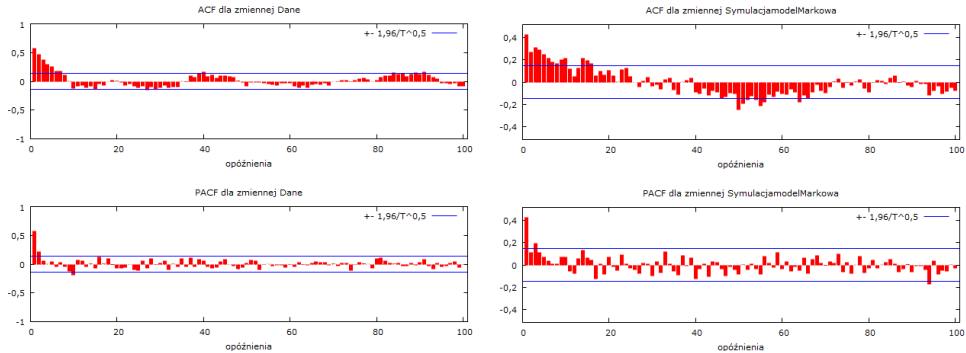
TABLICA 4. FUNKCJE ACF I PACF ORYGINALNEGO SZEREGU

Opóźnienie	ACF	PACF	Ljung-Box Q	p
1	0,5750*	0,5750*	60,5108	[0,000]
2	0,4788*	0,2214*	102,7079	[0,000]
3	0,3827*	0,0644	129,8083	[0,000]
4	0,2978*	0,0043	146,3172	[0,000]
5	0,2662*	0,0496	159,5830	[0,000]
6	0,1858	-0,0415	166,0808	[0,000]
7	0,1768	0,0390	172,0027	[0,000]
8	0,1078	-0,0520	174,2141	[0,000]
9	0,0046	-0,1310	174,2183	[0,000]
10	-0,1211	-0,1884	177,0461	[0,000]
11	-0,0847	0,0735	178,4373	[0,000]
12	-0,0744	0,0541	179,5177	[0,000]
13	-0,1095	-0,0459	181,8702	[0,000]
14	-0,0914	0,0109	183,5173	[0,000]
15	-0,1412	-0,0670	187,4777	[0,000]

* wartości większe niż $\pm 1,96/T^{0,5}$

Źródło: opracowanie własne.

Rysunek 8. Funkcje ACF i PACF szeregu oryginalnego i symulowanego



Źródło: obliczenia własne w programie Gretl.

Funkcje ACF i PACF mogą wskazywać, że odpowiedni do modelowania szeregu będzie łańcuch Markowa drugiego rzędu. Prawdopodobieństwa początkowe znalezienia się procesu w danym stanie ustalono tak jak poprzednio. W tabl. 5 i 6 przedstawiono oszacowane parametry macierzy przejścia i macierzy emisji.

**TABLICA 5. MACIERZ PRZEJŚCIA MODELU
DLA ŁAŃCUCHA MARKOWA DRUGIEGO RZĘDU**

St an	<i>N</i>	<i>S</i>	<i>W</i>
<i>N</i>	0,97	0,02	0,00
<i>S</i>	0,50	0,33	0,03
<i>W</i>	0,08	0,63	0,18

Źródło: opracowanie własne.

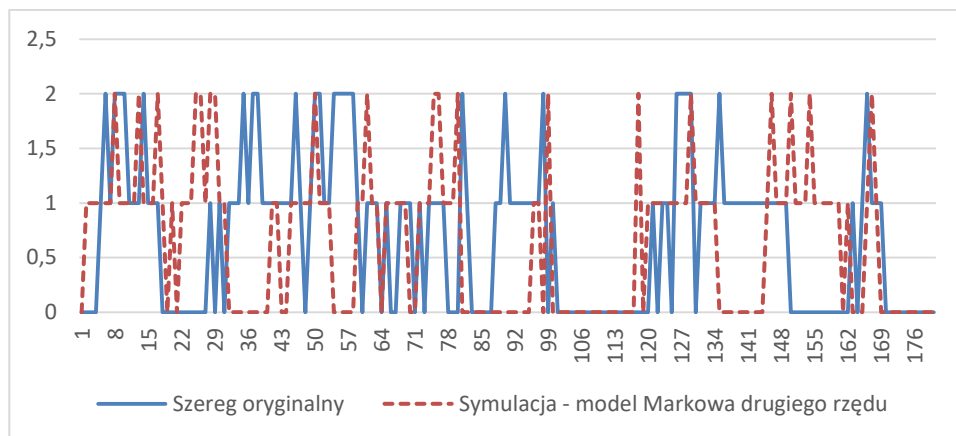
TABLICA 6. MACIERZ EMISJI MODELU DLA ŁAŃCUCHA MARKOWA DRUGIEGO RZĘDU

St an	(0,0)	(0,1)	(0,2)	(1,0)	(1,1)	(1,2)	(2,0)	(2,1)	(2,2)
<i>N</i>	0,67	0,08	0,01	0,09	0,09	0,04	0,00	0,01	0,01
<i>S</i>	0,09	0,12	0,01	0,09	0,43	0,09	0,01	0,09	0,05
<i>W</i>	0,00	0,08	0,00	0,12	0,28	0,08	0,04	0,16	0,24

Źródło: opracowanie własne.

W wyniku symulacji, polegającej na wygenerowaniu 180 obserwacji spełniających założenia procesu Markowa, o wyznaczonych poprzednio parametrach, uzyskano szereg przedstawiony na rys. 9.

Rysunek 9. Porównanie oryginalnego szeregu z symulacją – model drugiego rzędu

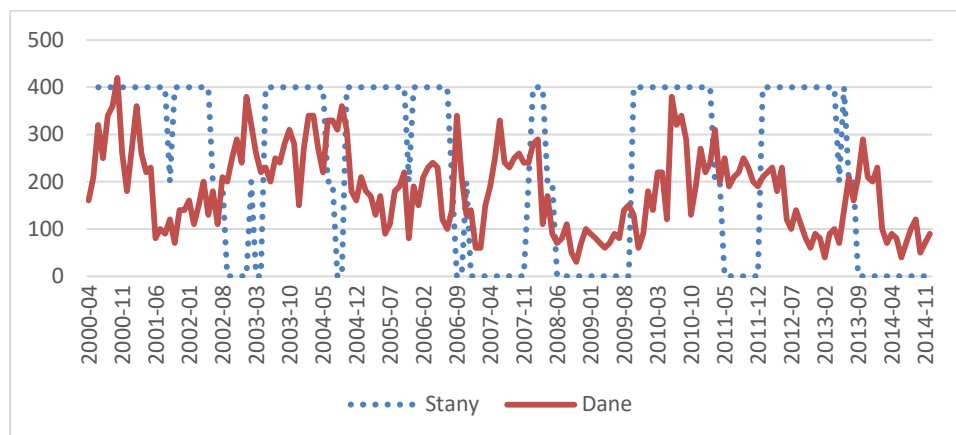


Źródło: obliczenia własne w programie Excel.

Tym razem funkcje ACF i PACF kształtują się jak dla oryginalnego szeregu (rys. 11). Model drugiego rzędu uwzględnia występującą korelację.

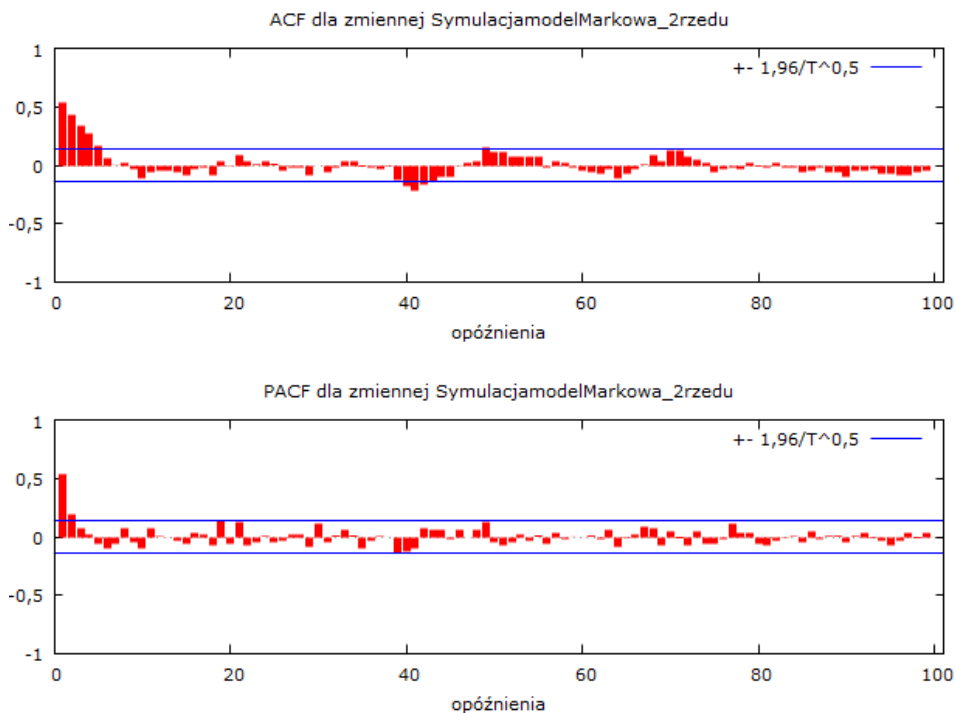
Do określenia prawdopodobnego przebiegu stanów wykorzystano algorytm Viterbiego. Rysunek 10 przedstawia, jak kształtują się zmiany stanów względem kolejnych obserwacji szeregu. Obserwujemy stan spadku popytu dla okresu od kwietnia 2008 r. do października 2009 r. oraz w 2014 r. Brak jest jednak odniesienia do innych niż badany szereg danych referencyjnych, które wskazałyby, czy wyznaczone stany pokrywają się z obserwacjami empirycznymi.

Rysunek 10. Algorytm Viterbiego – przebieg stanów względem rzeczywistych obserwacji



Źródło: obliczenia własne w programie Excel.

Rysunek 11. Funkcje ACF i PACF dla modelu drugiego rzędu



Źródło: obliczenia własne w programie Gretl.

Rezultat uzyskany przez wygenerowanie na podstawie modelu pojedynczego szeregu może mieć charakter przypadkowy. W celu oceny jego jakości przeprowadzono symulację polegającą na wygenerowaniu 1000 szeregów dla modelu Markowa drugiego rzędu. Tablica 7 przedstawia średnie różnice między wartościami rzeczywistymi a wartościami prognozowanymi.

TABLICA 7. ŚREDNIE RÓŻNICE MIĘDZY WARTOŚCIAMI RZECZYWISTYMI A PROGNOZOWANYMI

Różnica	Liczba obserwacji	Skumulowana liczba obserwacji	%	Skumulowany %
0	81	81	45	45
-1	40	121	22	67
+1	39	160	22	89
-2	12	172	7	96
+2	8	180	4	100

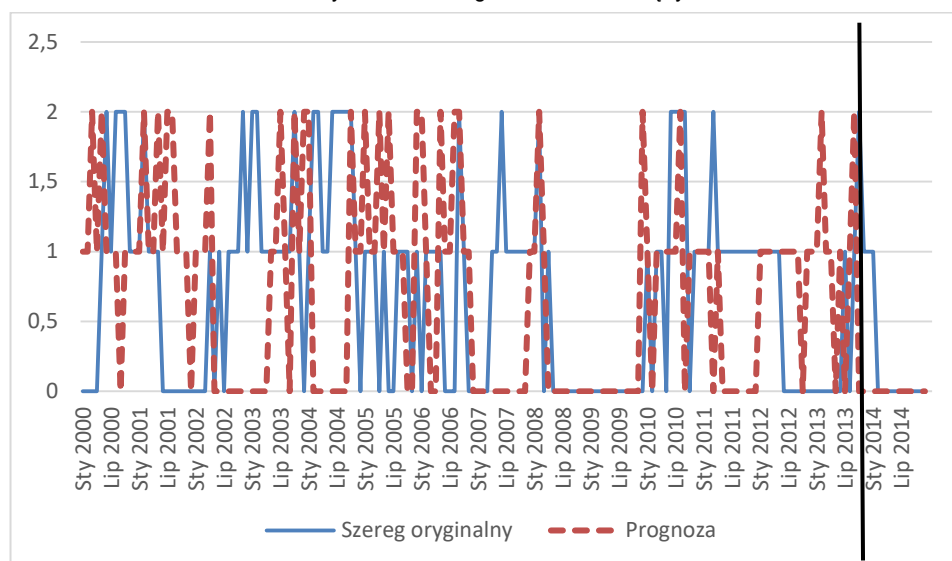
Źródło: opracowanie własne.

Wartość 0 oznacza zbieżność obu wartości. Wartości -1 i -2 oznaczają niedoszacowanie modelu względem wartości rzeczywistych i pomyłkę o odpowiednio jedną lub dwie wartości. Wartości $+1$ i $+2$ oznaczają przeszacowanie modelu. Najmniej pożądane jest niedoszacowanie lub przeszacowanie o dwie wartości, które odnotowano w 11% przypadków. Trafną prognozę uzyskano średnio dla 45% przypadków. Różnice rozkładają się symetrycznie, brak tendencji do przeszacowania lub niedoszacowania. Niedoszacowanie lub przeszacowanie modelu o jedną wartość również jest niepożądane, bo wartości szeregu są skodyfikowane, a rozpiętości przedziałów wynoszą odpowiednio 130 t, 120 t i 140 t dla kolejnych grup. Szeregi generowane przez model Markowa w dużym stopniu korelują z szeregiem referencyjnym.

6. PROGNOZA

Dokonano rekalkulacji modelu dla skróconego szeregu, pozostawiając 12 ostatnich obserwacji jako zbiór testowy. Przyjęto te same wartości prawdopodobieństw początkowych. Wartości parametrów macierzy przejścia i macierzy emisji uległy nieznacznej modyfikacji w porównaniu z tabl. 5 i 6. Rysunek 12 ilustruje prognozę dla 12-miesięcznego okresu. Wartości zbioru testowego oddzielono pionową linią. Tylko dla pierwszej obserwacji ze zbioru testowego wartość prognozy odbiega od wartości rzeczywistej – w tym przypadku popyt zaklasyfikowano jako umiarkowany, a według prognozy jego wartość jest niska. Dla pozostałych obserwacji wartości prognozowane pokrywają się z rzeczywistymi (tabl. 8).

Rysunek 12. Prognoza dla 12 miesięcy

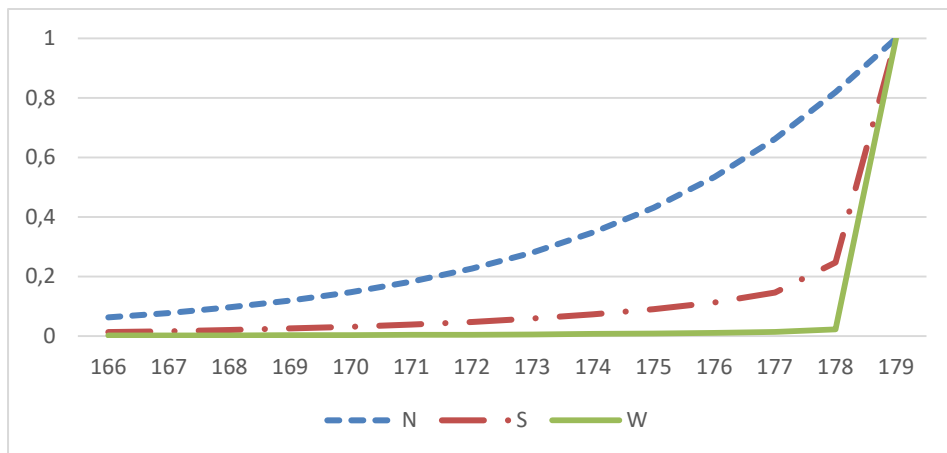


TABLICA 8. WARTOŚCI PROGNOZOWANE I RZECZYWISTE

Nr obserwacji	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
Szereg oryginalny	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Wartości prognozowane	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Źródło: opracowanie własne.

Na rys. 13 zaprezentowano obliczenia algorytmu *backward* dla 12 ostatnich obserwacji. Wskazuje on na prawdopodobieństwo wystąpienia danej sekwencji obserwacji $[k + 1, \dots, n]$ pod warunkiem wystąpienia stanu X w momencie k . Zgodnie z oczekiwaniami dany ciąg obserwacji jest najbardziej prawdopodobny w stanie niskiego popytu.

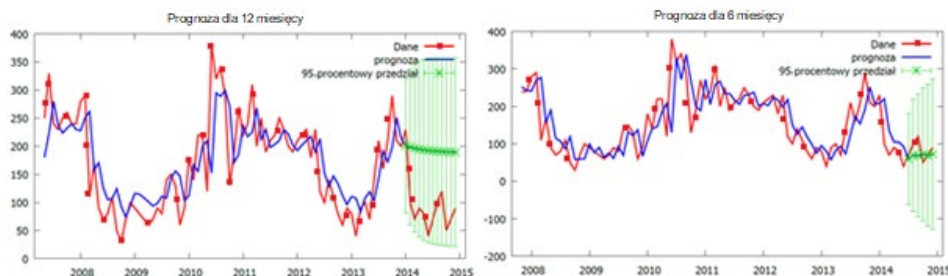
Rysunek 13. Wartości wyznaczone w kolejnych krokach algorytmu *backward*

Źródło: obliczenia własne w programie Excel.

W prognozowaniu szeregów czasowych często stosuje się modele typu ARIMA, dlatego prognozę dla ARIMA porównano z prognozą modelu Markowa. Z szeregu wyłączono 12 i 6 ostatnich obserwacji, aby dokonać prognozy długookresowej (rys. 14). W obu przypadkach najlepszy rezultat osiągnięto dla modelu ARIMA (1,0,1) (na podstawie najniższych wartości kryteriów informacyjnych i szerokości przedziału ufności). Analiza korelogramu nie wskazała na występowanie sezonowości. W przypadku prognozy długookresowej wyłączono wszystkie obserwacje z 2014 r., kiedy nastąpił znaczny spadek wartości popytu. Prognoza modelu ARIMA nie odzwierciedla tego spadku. W prognozowanym okresie obserwujemy niski popyt i według przyjętej klasyfikacji wartości oznaczono by jako 0. Wartości prognozy oscylują natomiast wokół 200, zatem zostałyby zaklasyfikowane jako 1 – umiarkowany popyt. Dużo lepszy wynik uzyskano w przypadku prognozy średniokresowej, gdzie wartości empiryczne

kształtują się podobnie jak wartości rzeczywiste, uwzględniając wygładzenie szeregu przez model ARIMA. Zarówno wartości prognozowane, jak i rzeczywiste zostałyby zaklasyfikowane jako 0 – niski popyt. W przypadku prognozy długookresowej lepszy rezultat uzyskano by zatem dla modelu Markowa, który uwzględnił duży spadek popytu w analizowanym okresie.

Rysunek 14. Model ARIMA (1,0,1) – prognoza długo- i średniokresowa



Źródło: obliczenia własne w programie Gretl.

7. PODSUMOWANIE

Zaproponowany model ukrytych łańcuchów Markowa drugiego rzędu może być alternatywą dla tradycyjnych metod analizy szeregów czasowych (m.in. metod wyrównywania wykładniczego czy ARIMA). Pozwala na uwzględnienie zmiennych niemierzalnych bądź ukrytych. Dobrze sprawdził się w prognozowaniu dłuższych okresów obniżonego popytu. Rezultat ten należałoby potwierdzić dla dłuższego szeregu lub innego zestawu danych. W przypadku prognozy średniokresowej sprawdził się lepiej niż model ARIMA, w którym zabrakło informacji o długotrwałym obniżeniu poziomu popytu związanym z potencjalną zmianą stanu w prognozowanym okresie.

Ograniczeniem modelu jest kodyfikacja wartości szeregu, która powoduje utratę części informacji. Wyznaczona prognoza dostarcza informacji na temat kształtowania się trendu zamiast wyznaczenia konkretnych wartości popytu. Możemy ją jednak potraktować jako wskazówkę co do punktów zwrotnych koniunktury.

Wprowadzenie modelu trójstanowego pozwoliło na uwzględnienie tzw. stanu przejściowego jako sygnału o nadchodzącej zmianie pomiędzy fazami wzrostu i spadku. Podobna próba z modelem dwustanowym nie przyniosłaby wystarczająco użytecznej informacji dla badanego przedsiębiorstwa.

LITERATURA

- Albert P. S., (1991), A Two-State Markov Mixture Model for a Time Series of Epileptic Seizure Counts, *Biometrics*, 47(4), 1371–1381. DOI: 10.2307/2532392.
- Azzalini A., Bowman A. W., (1990), A Look at Some Data on the Old Faithful Geyser, *Journal of the Royal Statistical Society. Series C (Applied Statistics)*, 39(3), 357–365. DOI: 10.2307/2347385.

- Bartolucci F., Lupporelli M., Montanari G. E., (2009), Latent Markov Model for Longitudinal Binary Data: An Application to the Performance Evaluation of Nursing Homes, *The Annals of Applied Statistics*, 3(2), 611–636. DOI: 10.1214/08-AOAS230.
- Baum L. E., Eagon J. A., (1967), An Inequality with Applications to Statistical Estimation for Probabilistic Functions of Markov Processes and to a Model of Ecology, *Bulletin of the American Mathematicians Society*, 73(3), 360–363. DOI: 10.1090/S0002-9904-1967-11751-8.
- Baum L. E., Petrie T., (1966), Statistical Interference for Probabilistic Functions of Finite State Markov Chains, *The Annals of Mathematical Statistics*, 37(6), 1554–1563. DOI: 10.1214/aoms/11177699147.
- Bernardelli M., (2013), Nieklasyczne modele Markowa w analizie cykli koniunktury gospodarczej w Polsce, *Roczniki Kolegium Analiz Ekonomicznych*, 30, 59–74.
- Briffaut J. P., Lallement P., (2010), Volatility Forecasting of Market Demand as Aids for Planning Manufacturing Activities, *Service Science & Management*, 3, 383–389. DOI: 10.1109/ICCIIE.2009.5223926.
- Cappé O., Moulines E., Rydén T., (2005), *Inference in Hidden Markov Models*, Springer.
- Crowder M., Davis M., Giampieri G., (2005), Analysis of Default Data Using Hidden Markov Model of Default Interaction, *Quantitative Finance*, 5(1), 27–34. DOI: 10.1080/14697680500039951.
- Figielska E., (2011), Ewolucyjne metody uczenia ukrytych modeli Markowa, *Zeszyty Naukowe Warszawskiej Wyższej Szkoły Informatyki*, 5, 63–74.
- Hamilton J. D., (1990), Analysis of Time Series Subject to Changes in Regime, *Journal of Econometrics*, 45(1–2), 39–70. DOI: 10.1016/0304-4076(90)90093-9.
- Hidalgo Gonzalez I., Kamiński J., (2011), The Iron and Steel Industry: A Global Market Perspective, *Gospodarka Surowcami Mineralnymi*, 27(3), 5–28.
- Hutnicza Izba Przemysłowo-Handlowa, (2017), *Polski przemysł stalowy 2017. Pobrane z: http://www.hiph.org//ANALIZY_RAPORTY/pliki/PPS-2017.pdf*.
http://www.hiph.org//ANALIZY_RAPORTY/pliki/PPS-2017.pdf.
- Instytut Studiów Wschodnich, (2008), *Polski przemysł stoczniowy – stan obecny, perspektywy, zagrożenia*, Forum Ekonomiczne, Warszawa.
- Jelinek F. (1976), Continuous Speech Recognition by Statistical Methods, *Proceedings of the IEEE*, 64(4), 532–556. DOI: 10.1109/PROC.1976.10159.
- Jurafsky D., Martin J. H., (2008), *Speech and Language Recognition*, Prentice Hall.
- Klug F., (2011), Automotive Supply Chain Logistics: Container Demand Planning using Monte Carlo Simulation, *International Journal of Automotive Technology and Management*, 11(3), 254–268. DOI: 10.1504/IJATM.2011.040871.
- Kwilinski A., (2018), Mechanism of formation of industrial enterprise development strategy in the information economy, *Virtual Economics*, 1(1), 7–25. DOI: 10.34021/ve.2018.01.01(1).
- Le N.D., Leroux B. G., Puterman M. L., (1992), Reading Reaction: Exact Likelihood Evaluation in a Markov Mixture Model for Time Series of Seizure Counts, *Biometrics*, 48(1), 317–323. DOI: 10.2307/2532758.
- Mitchell T. M., (1997), *Machine Learning*, McGraw-Hill Corporation, New York.
- Nguyen N., Nguyen D., (2015), Hidden Markov Model for Stock Selection, *Risks*, 3(4), 455–473. DOI: 10.3390/risks3040455.
- Nowara W., Szarzec K., (2004), Skutki procesów upadłościowych i układowych przedsiębiorstw w Polsce w latach 1990–2002, w: A. Manikowski, A. Psyk (red.), *Unifikacja gospodarek europejskich: szanse i zagrożenia*, Wydawnictwo Naukowe Wydziału Zarządzania Uniwersytetu Warszawskiego, Warszawa.

- Pietrzykowski M., Salabun W., (2014), Applications of Hidden Markov Model: State-of-the-Art, *International Journal of Computer Technology and Applications*, 5(4), 1384–1391.
- Rabiner L. R., (1989), Tutorial on Hidden Markov Models and Selected Applications in Speech Recognition, *Proceedings of the IEEE*, 77(2), 257–286. DOI: 10.1109/5.18626.
- Rabiner L. R., Juang B. H., (1991), Hidden Markov Models for Speech Recognition, *Technometrics*, 33(3), 251–272. DOI: 10.2307/1268779.
- Rachwał T., (2008), Problematyka badawcza funkcjonowania przedsiębiorstw przemysłowych, w: Z. Ziolo, M. Rachwał (red.), *Problematyka badawcza geografii przemysłu*, 11, 53–85. Wydawnictwo Naukowe AP, Kraków.
- Rippe R., Wilkinson W., Morrison D., (1976), Industrial Market Forecasting with Anticipations Data, *Management Science*, 22(6), 639–651. DOI: 10.1287/mnsc.22.6.639.
- Schrodt P. A., (2006), Forecasting Conflict in the Balkans using Hidden Markov Models, w: R. Trapple (ed.), *Programming for Peace: Computer-Aided Methods for International Conflict Resolution and Prevention*, Springer, 161–184.
- Skrondal A., Rabe-Hesketh S., (2004), *Generalized Latent Variable Modeling: Multilevel, Longitudinal, and Structural Equation Models*, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton.
- Tirole J., (1988), *The Theory of Industrial Organization*, MIT Press, Cambridge.
- Urbaniak M., (1999), *Marketing przemysłowy*, Wydawnictwo Infor, Warszawa.
- Zucchini W., Guttorp P., (1991), A Hidden Markov Model for Spacetime Precipitation, *Water Resources Research*, 27(28), 1917–1923. DOI: 10.1029/91WR01403.
- Zwiernik P. W., (2005), *Wstęp do ukrytych modeli Markowa i metody Bauma-Welcha*. Pobrane z: <http://www.mimuw.edu.pl/~pzwiernik/docs/hmm.pdf>.