DOI: 10.5604/01.3001.0013.7608

PRZEGLĄD STATYSTYCZNY
TOM LXVI – ZESZYT 2 – 2019

Emil PANEK [1]

O pewnej wersji twierdzenia o wielopasmowej magistrali w niestacjonarnej gospodarce Gale'a

Streszczenie. *W zdecydowanej większości prac poświęconych asymptotycznym (magistralnym) własnościom optymalnych procesów wzrostu w stacjonarnych gospodarkach typu Neumanna-Gale'a-Leontiefa obrazem geometrycznym magistrali jest pojedyncza półprosta, nazywana promieniem von Neumanna. Mimo że ani postulat stacjonarności, ani jednoznaczności magistrali produkcyjnej nie są zgodne z obserwacją realnych procesów gospodarczych, lista publikacji poświęconych efektowi magistrali w niestacjonarnych gospodarkach Neumanna-Gale'a-Leontiefa (ze zmienną technologią) oraz wieloma magistralami jest znacznie skromniejsza. Należą do nich w szczególności prace Panka (2017, 2018), w których pojedyncza magistrala produkcyjna w niestacjonarnej gospodarce Gale'a jest zastąpiona przez wiązkę magistrali (magistralę wielopasmową).*

Artykuł nawiązuje bezpośrednio do publikacji Panka (2019), prezentującej dwa twierdzenia o magistrali, przy założeniu, że w niestacjonarnej gospodarce Gale'a optymalna struktura produkcji w okresie t pozostaje optymalna także w przyszłości. Obecnie założenie to zostało znacznie osłabione.

Słowa kluczowe: niestacjonarna gospodarka Gale'a, równowaga chwilowa von Neumanna, magistrala wielopasmowa

On a certain version of the multilane turnpike theorem in Gale's non-stationary economy

Abstract. *In the vast majority of papers concerning asymptotic (main) properties of the optimal growth processes in Neumann-Gale-Leontief's stationary economies, the geometric image of a turnpike is expressed by a single ray, called von Neumann's ray. Even though neither the postulate of stationariness nor unambigiousness of a production turnpike are consistent with the observations of real economic processes, the list of papers devoted to the effect of a multilane turnpike in Neumann-Gale-Leontief's non-stationary economies (with changing technology and multiple lanes) is much more modest. These works include mainly papers by Panek (2017, 2018), where the author replaces a single production turnpike in Gale's non-stationary economy with a multilane turnpike.*

This paper draws directly upon the author's earlier work (Panek, 2019), where two turnpike theorems were presented. Both of them were based on the assumption significantly weakened by this paper – that in Gale's non-stationary economy the optimal production structure in period t remains optimal also in the future.

Keywords: Gale's non-stationary economy, von Neumann's temporary equilibrium, multilane turnpike

JEL Classification: C6, O4

[1] Uniwersytet Zielonogórski, Instytut Ekonomii i Finansów, ul. Podgórna 50, 65-246 Zielona Góra, Polska, e-mail: e.panek@wez.uz.zgora.pl, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7950-1689.

1. WPROWADZENIE

W pracach poświęconych efektowi magistrali w stacjonarnych gospodarkach Neumanna-Gale'a-Leontiefa dowodzi się, że w długich okresach wszystkie optymalne procesy wzrostu „prawie zawsze" przebiegają w pobliżu pojedynczej ścieżki (magistrali), której obrazem geometrycznym w przestrzeni stanów gospodarki jest półprosta zwana promieniem von Neumanna[2]. Mimo że postulat stacjonarności gospodarki nie jest zgodny z obserwacją realnych procesów gospodarczych, lista prac poświęconych efektowi magistrali w gospodarkach niestacjonarnych (ze zmienną technologią) jest znacznie skromniejsza[3]. Do tej grupy prac należą również artykuły Panka (2017, 2018). Założono w nich, że technologia produkcji w niestacjonarnej gospodarce Gale'a jest zbieżna z czasem do pewnej technologii granicznej, a pojedynczą magistralę produkcyjną zastąpiono wiązką magistrali, którą nazwano magistralą wielopasmową. Kontrowersyjny postulat zbieżności technologii produkcji do pewnej technologii granicznej został uchylony w pracy Panka (2019), w której z kolei obowiązuje założenie, że technologia produkcji optymalna w okresie t pozostaje optymalna również w przyszłości[4]. Obecnie założenie to zostaje osłabione.

2. MODEL. WIELOPASMOWA MAGISTRALA PRODUKCYJNA – NIEKTÓRE WŁASNOŚCI[5]

Interesuje nas $n-$ produktowa gospodarka, w której czas t zmienia się skokowo, $t = 0, 1, \dots$. Przez $x(t) = \big(x_1(t), \dots, x_n(t)\big) \geqq 0$ oznaczamy wektor towarów zużywanych, a przez $y(t) = \big(y_1(t), \dots, y_n(t)\big) \geqq 0$ wektor towarów wytwarzanych w gospodarce w okresie t[6]. Jeżeli technologia, którą dysponuje gospodarka w okresie t, pozwala z nakładów $x(t)$ wytworzyć produkcję $y(t)$, to mówimy, że para $\big(x(t), y(t)\big)$ opisuje technologicznie dopuszczalny proces produkcji w okresie t. Symbolem $Z(t) \subset R^{2n}_{+}$ oznaczamy zbiór wszystkich technologicznie dopuszczalnych procesów produkcji w gospodarce w okresie t. Nazywamy go przestrzenią produkcyjną (lub zbiorem technologicznym) gospodarki w okresie t.

Zapis $(x, y) \in Z(t)$ (lub $\big(x(t), y(t)\big) \in Z(t)$) oznacza, że w okresie t z nakła-

---

[2] Zob. np. Gale (1967), Majumdar (2009), Makarov i Rubinov (1977), McKenzie (1976, 1998, 2005), Mowszowicz (1969), Nikaido (1968), Panek (2003), Takayama (1985). Obszerną bibliografię można znaleźć także w publikacji Panka (2011).

[3] Do nielicznych prac poświęconych efektowi magistrali w niestacjonarnych gospodarkach ze zmienną technologią należą m.in. publikacje: Gantz (1980), Joshi (1997), Keeler (1972), Panek (2014a, 2014b, 2015a, 2015b).

[4] W konsekwencji, towarzysząca jej optymalna struktura produkcji (na wielopasmowej magistrali) w okresie t pozostaje optymalną również w przyszłości. Tak może być, ale tak być nie musi.

[5] Prezentowany model, poza warunkiem **(G8)**, nie różni się od modelu przedstawionego w pracy Panka (2019).

[6] Jeżeli $a, b \in R^n$, wtedy odróżniamy warunek $a \geqq b$ od $a \geq b$. Warunek $a \geqq b$ oznacza, że $\forall i (a_i \geq b_i)$, natomiast $a \geq b$ stanowi, że $a \geqq b$ i $a \neq b$.

dów $x(t)$ można w gospodarce wytworzyć produkcję $y(t)$. Zakładamy, że przestrzenie produkcyjne $Z(t), t = 0, 1, ...$, spełniają następujące warunki:

(G1) $\forall (x^1, y^1) \in Z(t)\ \forall (x^2, y^2) \in Z(t)\ \forall\ \lambda_1, \lambda_2 \geq 0\ \left(\lambda_1(x^1, y^1) + \lambda_2(x^2, y^2) \in Z(t)\right)$

(warunek proporcjonalności nakładów i wyników oraz addytywności procesów produkcyjnych),

(G2) $\forall (x, y) \in Z(t)\ (x = 0 \Rightarrow y = 0)$

(warunek „braku rogu obfitości"),

(G3) $\forall (x, y) \in Z(t)\ \forall x' \geqq x\ \forall\ 0 \leqq y' \leqq y\ \left((x', y') \in Z(t)\right)$

(możliwość marnotrawstwa nakładów i/lub wyników),

(G4) przestrzenie produkcyjne $Z(t)$ są zbiorami domkniętymi w R_+^{2n},

(G5) $Z(0) \neq \emptyset\ \wedge\ Z(t) \subseteq Z(t+1)$

(każdy proces produkcji $(x, y) \in Z(t)$ dostępny w okresie t jest także dostępny w okresie następnym).

Zbiory $Z(t), t = 0, 1, ...$, są stożkami domkniętymi w R^{2n} z wierzchołkami w 0 mającymi tę własność, że jeżeli $(x, y) \in Z(t)$ oraz $(x, y) \neq 0$, to $x \neq 0$. Dalej interesują nas wyłącznie nietrywialne (niezerowe) procesy $(x, y) \in Z(t)\backslash\{0\}$. Weźmy dowolny okres $t \geq 0$ i proces $(x, y) \in Z(t)\backslash\{0\}$. Nieujemną liczbę

$$\alpha(x, y) = \max\{\alpha |\ \alpha x \leqq y\}$$

nazywamy wskaźnikiem technologicznej efektywności procesu (x, y) (w okresie t). Przy przyjętych założeniach $\alpha(x, y) = \min\limits_i \frac{y_i}{x_i}$, funkcja $\alpha(\cdot)$ jest dodatnio jednorodna stopnia 0 na obszarze określoności oraz

$$\exists\left(\bar{x}(t), \bar{y}(t)\right) \in\ Z(t)\backslash\{0\}\ \left(\alpha\left(\bar{x}(t), \bar{y}(t)\right) = \max_{(x,y)\in Z(t)\backslash\{0\}} \alpha(x, y) = \alpha_{M,t}\right) \geq 0,$$
$$\forall \lambda > 0\left(\ \alpha\left(\bar{x}(t), \bar{y}(t)\right) =\ \alpha\left(\lambda\bar{x}(t), \lambda\bar{y}(t)\right)\right).$$

Liczbę $\alpha_{M,t}$ nazywamy optymalnym wskaźnikiem technologicznej efektywności produkcji w niestacjonarnej gospodarce Gale'a w okresie t. Proces $\left(\bar{x}(t), \bar{y}(t)\right)$ nazywamy optymalnym procesem produkcji w okresie t. Proces ten jest określony z dokładnością do mnożenia przez stałą dodatnią (z dokładnością do struktury). Z **(G5)** płynie wniosek, że:

$$\alpha_{M,t+1} \geq \alpha_{M,t}. \tag{1}$$

Zakładamy, że:

(G6) $\alpha_{M,0} > 0$,

co wobec (1) prowadzi do konkluzji, że $\forall t \geq 0\big(\alpha_{M,t} > 0\big)$. Przez

$$Z_{opt}(t) = \big\{(\bar{x}, \bar{y}) \in Z(t)\backslash\{0\} | \alpha(\bar{x}, \bar{y}) = \alpha_{M,t} > 0\big\}$$

oznaczamy zbiór wszystkich optymalnych procesów produkcji w okresie t. Zbiory $Z_{opt}(t)$, $t = 0, 1, ...$ są stożkami zawartymi w $R_+^{2n}\backslash\{0\}$[7]. Nietrudno zauważyć, że jeżeli $(\bar{x}, \bar{y}) \in Z_{opt}(t)$, to także $\big(\bar{x}, \alpha_{M,t}\bar{x}\big) \in Z_{opt}(t)$ oraz $\big(\bar{y}, \alpha_{M,t}\bar{y}\big) \in Z_{opt}(t)$.

O wektorze $s(t) = \frac{\bar{y}(t)}{\|\bar{y}(t)\|}$ mówimy, że charakteryzuje strukturę produkcji w optymalnym procesie $(\bar{x}, \bar{y}) \in Z(t)\backslash\{0\}$ [8]. Przez $S(t)$ oznacza się zbiór wektorów struktury produkcji we wszystkich optymalnych procesach w okresie t:

$$S(t) = \left\{s(t) | \exists\big(\bar{x}(t), \bar{y}(t)\big) \in Z_{opt}(t)\left(s(t) = \frac{\bar{y}(t)}{\|\bar{y}(t)\|}\right)\right\}.$$

Przy założeniach **(G1)–(G6)** zbiory $S(t), t = 0, 1, ...$, są niepuste, zwarte i wypukłe (por. twierdzenie 2 w pracy Panka, 2016)[9]. Jeżeli $s = s(t) \in S(t)$, wtedy półprostą

$$N_s^t = \{\lambda s | \lambda >\} \subset R_+^n$$

nazywamy pojedynczą magistralą produkcyjną (lub promieniem von Neumanna) w niestacjonarnej gospodarce Gale'a rozpoczynającą się (z początkiem) w okresie t. Zbiór

$$\mathbb{N}^t = \cup_{s \in S(t)} N_s^t = \{\lambda s | \lambda > 0, s \in S(t)\} \tag{2}$$

nazywamy wielopasmową magistralą produkcyjną dostępną w niestacjonarnej gospodarce Gale'a od okresu t. Każda taka magistrala jest stożkiem w R_+^n niezawierającym 0.

Jeżeli w niestacjonarnej gospodarce Gale'a spełniającej warunki **(G1)–(G6)** struktura nakładów $\frac{x}{\|x\|}$ lub produkcji $\frac{y}{\|y\|}$ w pewnym procesie $(x, y) \in Z(t)\backslash\{0\}$

[7] Dowód przebiega podobnie jak dowód twierdzenia 1 w pracy Panka (2016) (po podstawieniu $Z_{opt}(t)$, $\alpha_{M,t}$ zamiast Z_{opt}, α_M).

[8] Tutaj i dalej: jeżeli $a \in R^n$, to $\|a\| = \sum_{i=1}^n |a_i|$, $\frac{a}{\|a\|} = \left(\frac{a_1}{\|a\|}, \frac{a_2}{\|a\|}, ..., \frac{a_n}{\|a\|}\right)$.

[9] Łatwo pokazać, że równoważnie $S(t) = \left\{s(t) | \exists\big(\bar{x}(t), \bar{y}(t)\big) \in Z_{opt}(t)\left(s(t) = \frac{\bar{x}(t)}{\|\bar{x}(t)\|}\right)\right\}$.

różni się od struktury magistralnej, to technologiczna efektywność takiego procesu jest zawsze niższa od optymalnej:

$$\forall (x,y) \in Z(t)\backslash\{0\}\left(\frac{x}{\|x\|} \notin S(t) \vee \frac{y}{\|y\|} \notin S(t) \Rightarrow \alpha(x,y) < \alpha_{M,t}\right) \tag{3}$$

(por. lemat 1 w pracy Panka, 2018).

3. RÓWNOWAGA CHWILOWA VON NEUMANNA

Przez $p(t) = \big(p_1(t), \dots, p_n(t)\big) \geq 0$ oznaczamy wektor cen towarów w gospodarce w okresie t. Niech $\big(x(t), y(t)\big) \in Z(t)\backslash\{0\}$. Liczbę[10]

$$\beta\big(x(t), y(t), p(t)\big) = \frac{\langle p(t), y(t)\rangle}{\langle p(t), x(t)\rangle} \geq 0$$

($\langle p(t), x(t)\rangle \neq 0$) nazywamy wskaźnikiem ekonomicznej efektywności procesu $\big(x(t), y(t)\big)$ w okresie t (przy cenach $p(t)$). O trójce $\big\{\alpha_{M,t}, \big(\bar{x}(t), \bar{y}(t)\big), \bar{p}(t)\big\}$ spełniającej następujące warunki:

$$\alpha_{M,t}\bar{x}(t) \leqq \bar{y}(t), \tag{4}$$

$$\forall (x,y) \in Z(t)\big(\langle \bar{p}(t), y\rangle \leq \alpha_{M,t}\langle \bar{p}(t), x\rangle\big), \tag{5}$$

$$\langle \bar{p}(t), \bar{y}(t)\rangle > 0 \tag{6}$$

mówimy, że charakteryzuje niestacjonarną gospodarkę Gale'a w (chwilowej) równowadze von Neumanna. Wektor $\bar{p}(t)$ nazywamy wektorem cen równowagi von Neumanna w okresie t. Z (4) wynika w szczególności, że $\alpha\big(\bar{x}(t), \bar{y}(t)\big) = \alpha_{M,t}$, zatem $\big(\bar{x}(t), \bar{y}(t)\big) \in Z(t)\backslash\{0\}$ jest optymalnym procesem produkcji w okresie t. Wektor cen równowagi $\bar{p}(t)$ oraz optymalny proces produkcji $\big(\bar{x}(t), \bar{y}(t)\big)$ w równowadze są określone z dokładnością do mnożenia przez dowolną stałą dodatnią (z dokładnością do struktury). Z (4)–(6) otrzymujemy:

$$\beta\big(\bar{x}(t), \bar{y}(t), \bar{p}(t)\big) = \frac{\langle \bar{p}(t), \bar{y}(t)\rangle}{\langle \bar{p}(t), \bar{x}(t)\rangle} = \max_{(x,y)\in Z(t)\backslash\{0\}} \beta\big(x, y, \bar{p}(t)\big) = \alpha\big(\bar{x}(t), \bar{y}(t)\big) = \alpha_{M,t}.$$

W równowadze chwilowej w każdym okresie t dochodzi do zrównania – na najwyższym możliwym do osiągnięcia przez gospodarkę poziomie – efektywności ekonomicznej produkcji z jej efektywnością technologiczną.

---

[10] Tutaj i dalej przez $\langle a, b\rangle$ oznaczamy iloczyn skalarny wektorów $a, b \in R^n$: $\langle a, b\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$.

□ **Twierdzenie 1. (i)** Jeżeli zachodzą warunki **(G1)–(G6)**, to w każdym okresie t istnieją ceny równowagi chwilowej $\bar{p}(t) \geq 0$ spełniające warunek (5):

$$\forall t \geq 0 \ \exists \bar{p}(t) \geq 0 \ \forall \big(\bar{x}(t), \bar{y}(t)\big) \in Z_{opt}(t) \ \forall (x,y) \in Z(t) \big(\langle \bar{p}(t), y \rangle \leq \alpha_{M,t} \langle \bar{p}(t), x \rangle\big).$$

(ii) Jeżeli ponadto spełniony jest warunek:

(G7)

$$\forall t \geq 0 \ \forall (x,y) \in Z(t) \backslash \{0\} \left(\alpha(x,y) < \alpha_{M,t} \Rightarrow 0 \leq \beta\big(x, y, \bar{p}(t)\big) = \frac{\langle \bar{p}(t), y \rangle}{\langle \bar{p}(t), x \rangle} < \alpha_{M,t}\right),$$

to wyrażona w cenach $\bar{p}(t)$ wartość produkcji wytworzonej w dowolnym optymalnym procesie $\big(\bar{x}(t), \bar{y}(t)\big) \in Z_{opt}(t)$ jest dodatnia, tzn. zachodzi warunek (6).

Dowód. (i) Pokażemy najpierw, że każda przestrzeń produkcyjna $Z(t), t = 0, 1, \ldots$, zawiera wektory $(e^i, 0) \in R_+^{2n}$, gdzie $e^i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0) \in R^n$ jest n –wymiarowym wektorem z jedynką na i-tym miejscu, $i = 1, 2, \ldots, n$. Ponieważ $Z(0) \subseteq Z(1) \subseteq \cdots \subseteq Z(t)$, zatem wystarczy wykazać, że $\forall i \ \big((e^i, 0) \in Z(0)\big)$. Zbiór $Z(0)$ jest niepusty, więc zawiera pewien proces produkcji $(x, y) \geqq 0$. Wówczas, wobec **(G3)**, należą do niego także procesy $(x^{i,k}, 0) = (x + ke^i, 0)$, $i = 1, 2, \ldots, n$; $k = 1, 2, \ldots$. Wtedy, zgodnie z **(G2)**, **(G4)**:

$$(\xi^{i,k}, 0) = \left(\frac{x^{i,k}}{\|x^{i,k}\|}, 0\right) \in Z(0), \ i = 1, 2, \ldots, n; \ k = 1, 2, \ldots,$$
$$(\xi^{i,k}, 0) \underset{k}{\rightarrow} (e^i, 0) \in Z(0), \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Weźmy dowolny okres $t \geq 0$. Jeżeli $\big(\bar{x}(t), \bar{y}(t)\big) \in Z_{opt}(t) \subset Z(t) \backslash \{0\}$, to $\alpha_{M,t} \bar{x}(t) \leqq \bar{y}(t)$, więc każdy optymalny proces produkcji spełnia warunek (4). Zbiór

$$C(t) = \big\{c \in R^n | \ c = \alpha_{M,t} x - y, (x,y) \in Z(t)\big\}$$

jest stożkiem wypukłym w R^n (jako liniowe odwzorowanie stożka *Z*(*t*)) niezawierającym wektorów ujemnych

$$\exists (x', y') \in Z(t) \big(c' = \alpha_{M,t} x' - y' < 0\big).$$

Wówczas:

$$\exists \varepsilon' > 0 \left(\alpha_{M,t} = \max_{(x,y) \in Z(t) \backslash \{0\}} \alpha(x,y) \geq \alpha(x', y') \geq \alpha_{M,t} + \varepsilon'\right),$$

co przeczy definicji optymalnego wskaźnika $\alpha_{M,t}$. Ponieważ procesy $(e^i, 0)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ należą do $Z(t)$, więc

$$c^i = \alpha_{M,t} e^i - 0 = \left(0, \dots, \alpha_{M,t}, \dots, 0\right) \in C(t), i = 1, 2, \dots, n$$

(w wektorze c^i liczba $\alpha_{M,t} > 0$ znajduje się na i-tym miejscu). Z twierdzenia o hiperpłaszczyźnie oddzielającej wnioskujemy, że

$$\exists \bar{p}(t) \neq 0 \ \forall c \in C(t)(\langle \bar{p}(t), c \rangle \geq 0), \tag{7}$$

w szczególności:

$$\langle \bar{p}(t), c^i \rangle = \alpha_{M,t} \bar{p}_i(t) \geq 0, i = 1, 2, \dots, n,$$

czyli $\bar{p}(t) \geq 0$. Warunek (7) jest równoważny z (5).
Dowód części **(ii)** przebiega podobnie jak w twierdzeniu 1 w pracy Panka (2018) po podstawieniu $\left(\bar{x}(t), \bar{y}(t)\right) \in Z_{opt}(t)$, $\alpha_{M,t}$ zamiast $(\bar{x}, \bar{y}) \in Z_{opt}$, α_M. ■

Z twierdzenia płynie ważny wniosek, że w gospodarce spełniającej warunki **(G1)–(G7)** każda trójka $\left\{\alpha_{M,t}, \left(\bar{x}(t), \bar{y}(t)\right), \bar{p}(t)\right\}$ z dowolnym procesem $\left(\bar{x}(t), \bar{y}(t)\right) \in Z_{opt}(t)$ tworzy stan chwilowej równowagi von Neumanna, tj. spełnia warunki (4)–(6).

Weźmy teraz dowolny wektor towarów $x \geq 0$ i przyjmijmy następującą miarę jego odległości (kątowej) od wielopasmowej magistrali $\mathbb{N}^t$:

$$d(x, \mathbb{N}^t) = \inf_{x' \in \mathbb{N}^t} \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{x'}{\|x'\|} \right\|. \tag{8}$$

Zważywszy na definicję magistrali $\mathbb{N}^t$ (zob. (2)), metrykę (8) można zapisać w następującej równoważnej postaci:

$$d(x, \mathbb{N}^t) = \inf_{s \in S(t)} f(x, s), \tag{9}$$

gdzie $f(x, s) = \left\| \frac{x}{\|x\|} - s \right\|$, $s = \frac{x'}{\|x'\|}$, $f \in C^0\left(R_+^n \backslash \{0\} \times S(t)\right)$ oraz zbiór $S(t)$ jest zwarty.

Konsekwencją warunku **(G7)** jest następujący lemat nawiązujący do lematu Radnera (1961).

□ **Lemat 1.** Jeżeli zachodzą warunki **(G1)–(G7)**, to

$$\begin{gathered} \forall \varepsilon > 0 \ \forall t \geq 0 \ \exists \delta_{\varepsilon,t} \in \left(0, \alpha_{M,t}\right) \forall (x, y) \in Z(t) \setminus \{0\} \left(d(x, \mathbb{N}^t) \geq \varepsilon \Rightarrow \right. \\ \left. \beta\left(x, y, \bar{p}(t)\right) \leq \alpha_{M,t} - \delta_{\varepsilon,t}\right). \end{gathered} \tag{10}$$

Dowód przebiega podobnie jak dowód lematu 2 w pracy Panka (2019)[11]. ■

[11] Por. także twierdzenie 5 w pracy Panka (2016).

Warunek (10) odgrywa istotną rolę przy dowodzie twierdzenia o wielopasmowej magistrali w niestacjonarnej gospodarce Gale'a, które zaprezentowano w kolejnym punkcie.

4. „SŁABY" EFEKT WIELOPASMOWEJ MAGISTRALI

Ustalmy (skończony) zbiór okresów $T = \{0, 1, \dots, t_1\}$, $t_1 < +\infty$. Nazywamy go horyzontem (funkcjonowania) gospodarki. Gospodarka jest zamknięta w tym sensie, że nakłady $x(t+1)$ ponoszone w okresie $t+1$ pochodzą w niej z produkcji $y(t)$ wytworzonej w okresie poprzednim t:

$$x(t+1) \leqq y(t),\ t = 0, 1, \dots, t_1 - 1.$$

Wówczas, zgodnie z **(G3)**, otrzymujemy:

$$\big(y(t), y(t+1)\big) \in Z(t+1),\ t = 0, 1, \dots, t_1 - 1. \tag{11}$$

Przez y^0 oznaczamy ustalony, początkowy, dodatni wektor produkcji w okresie $t = 0$:

$$y(0) = y^0 > 0. \tag{12}$$

O ciągu wektorów produkcji $\{y(t)\}_{t=0}^{t_1}$ spełniającym warunki (11), (12) mówmy, że opisuje (y^0, t_1) – dopuszczalny proces wzrostu (trajektorię produkcji) w niestacjonarnej gospodarce Gale'a z wielopasmową magistralą.

W artykule Panka (2019) zakładano, że każdy wektor produkcji $\bar{y}(t)$ w optymalnym procesie $\big(\bar{x}(t), \bar{y}(t)\big) \in Z_{opt}(t)$ jest jednocześnie wektorem nakładów w pewnym optymalnym procesie $\big(\bar{x}(t+1), \bar{y}(t+1)\big) \in Z_{opt}(t+1)$ w okresie następnym, $t = 0, 1, \dots, t_1 - 1$:

$$\forall t < t_1\ \forall \big(\bar{x}(t), \bar{y}(t)\big) \in Z_{opt}(t)\ \exists \big(\bar{x}(t+1), \bar{y}(t+1)\big) \in Z_{opt}(t+1)$$
$$\big(\bar{x}(t+1) = \bar{y}(t)\big).$$

Zgodnie z tym założeniem:

$$\begin{gathered}\forall \check{t} < t_1\ \forall s(\check{t}) \in S(\check{t})\ \exists \{\bar{y}(t)\}_{t=\check{t}}^{t_1} \left(\frac{\bar{y}(\check{t})}{\|\bar{y}(\check{t})\|} = s(\check{t}) \wedge \big(\bar{y}(t), \bar{y}(t+1)\big) \in Z(t+1),\right.\\ \left.\bar{y}(t+1) = \alpha_{M,t+1}\bar{y}(t),\ t = \check{t}, \dots, t_1 - 1\right),\end{gathered} \tag{13}$$

co w szczególności oznacza, że $S(t) \subseteq S(t+1)$, czyli $\mathbb{N}^t \subseteq \mathbb{N}^{t+1}$, $t = 0, 1, \dots, t_1 - 1$. Jeżeli ciąg wektorów $\{\bar{y}(t)\}_{t=\check{t}}^{t_1}$ spełnia powyższy warunek, to

$$\bar{y}(t) = \left(\prod_{\theta=\check{t}+1}^{t} \alpha_{M,\theta}\right)\bar{y}(\check{t}), \quad t = \check{t}+1, \dots, t_1.$$

Ciąg taki charakteryzuje się stałą w czasie strukturą produkcji:

$$\forall t \in \{\check{t}, \dots, t_1\}\left(\frac{\bar{y}(t)}{\|\bar{y}(t)\|} = \frac{\bar{y}(\check{t})}{\|\bar{y}(\check{t})\|} = s(\check{t}) = \text{const.}\right),$$

dlatego mówimy, że tworzy $(\check{t}, t_1)$ – stacjonarny proces wzrostu leżący na wielopasmowej magistrali $\mathbb{N}^{\check{t}}$. Warunek (13) oznacza, że w gospodarce **każda** technologia produkcji optymalna w okresie $t < t_1$ pozostaje optymalną technologią produkcji wszędzie dalej w przyszłości. To mocne założenie zastąpimy obecnie następującym warunkiem głoszącym, że w gospodarce **istnieje** pewna (przynajmniej jedna) technologia produkcji, która pozostaje optymalna w całym horyzoncie czasu T:

(G8) $\exists\{\bar{x}(t), \bar{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}\ \forall t \in T\left(\left(\bar{x}(t), \bar{y}(t)\right) \in Z_{opt}(t)\right) \wedge \forall t < t_1\ \left(\bar{x}(t+1) = \bar{y}(t)\right).$

Jeżeli zachodzi warunek **(G8)**, to (wobec (3), **(G7)**, (11)):

$$\exists \bar{s} \in S(0)\ \exists\{\bar{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$$
$$\left(\frac{\bar{y}(0)}{\|\bar{y}(0)\|} = \bar{s} \wedge \left(\bar{y}(t), \bar{y}(t+1)\right) \in Z(t+1),\ \bar{y}(t+1) = \alpha_{M,t+1}\bar{y}(t),\ t = 0, \dots, t_1 - 1\right),$$

czyli

$$\bar{y}(t) = \left(\prod_{\theta=1}^{t} \alpha_{M,\theta}\right)\bar{y}(0), \quad t = 1, \dots, t_1. \tag{14}$$

Proces ten w całości leży na promieniu von Neumanna (półprostej):

$$N_{\bar{s}}^{0} = \{\lambda\bar{s} | \lambda > 0\}. \tag{15}$$

Oczywiście, $N_{\bar{s}}^{0} \in \mathbb{N}^t$ w każdym okresie $t \in T$, ale generalnie

$$\neg\forall t \in \{0, 1, \dots, t_1 - 1\}(\mathbb{N}^t \subseteq \mathbb{N}^{t+1}).$$

Półprostą (15) nazywamy szczytową magistralą (szczytowym promieniem von Neumanna) w gospodarce Gale'a spełniającej warunki **(G1)–(G8)**. Tylko na szczytowej magistrali gospodarka we wszystkich okresach $t \in T\backslash\{0\}$ osiąga najwyższe tempo wzrostu. Jeżeli proces postaci (14) leży na szczytowej magistrali:

$$\bar{y}(t) \in N_{\bar{s}}^{0},\ t = 0, \dots, t_1,$$

to dla dowolnej liczby $\lambda > 0$ także

$$\lambda\bar{y}(t) \in N_{\bar{s}}^{0},\ t = 0, \dots, t_1.$$

Jeżeli istnieją dwa procesy $\{\bar{y}^1(t)\}_{t=0}^{t_1}$, $\{\bar{y}^2(t)\}_{t=0}^{t_1}$ postaci (14), leżące na szczytowej magistrali, to należy do niej także ich suma:

$$\bar{y}^1(t) + \bar{y}^2(t) \in N_{\bar{s}}^0,\ t = 0, \dots, t_1.$$

Podobnie jak w pracach Panka (2018, 2019) przez $u: R_+^n \longrightarrow R^1$ oznaczamy ciągłą, dodatnio jednorodną stopnia 1, wklęsłą i rosnącą funkcję użyteczności, określoną na wektorach produkcji w ostatnim okresie t_1 horyzontu T, spełniającą ponadto następujące warunki[12]:

(U1) $\exists a > 0\ \forall t_1\ \forall s \in S_+^n(1)(u(s) \leq a\langle \bar{p}(t_1), s\rangle)$,
(U2) $\forall s \in S(0)(u(s) > 0)$.

Interesuje nas następujące zadanie wzrostu docelowego:

$$\begin{gathered}\max\ u\big(y(t_1)\big)\\ \text{p.w. (11), (12)}\\ (\text{wektor } y^0 \text{ dany}).\end{gathered} \tag{16}$$

Jego rozwiązanie nazywamy tradycyjnie (y^0, t_1, u) – optymalnym procesem (ścieżką) wzrostu i oznaczamy przez $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$.

Zanim zostanie sformułowane kluczowe dla tej pracy twierdzenie 2 o „słabym" efekcie magistrali w niestacjonarnej gospodarce Gale'a, powróćmy na chwilę jeszcze do lematu 1. Otóż warunki, przy których został on udowodniony, nie wykluczają takiej nierealistycznej sytuacji, gdy dla pewnej liczby $\varepsilon > 0$:

$$\lim_t \delta_{\varepsilon,t} = 0.$$

Sytuacja taka oznaczałaby, że z upływem czasu efektywność ekonomiczna procesów produkcji $\big(x(t), y(t)\big) \in Z(t)\backslash\{0\}$ może rosnąć, zbliżając się do maksymalnej:

$$\beta\big(x(t), y(t), \bar{p}(t)\big) \underset{t}{\rightarrow} \alpha_{M,t},$$

chociaż struktura nakładów w takich procesach stale różniłaby się co najmniej o ε od struktury magistralnej:

$$d(x(t), \mathbb{N}^t) \geq \varepsilon.$$

[12] Symbolem $S_+^n(1)$ oznaczamy simpleks jednostkowy w R^n. Ponieważ warunek **(U1)** jest równoważny z następującym: $\exists a > 0\ \forall t_1\ \forall y \in R_+^n\backslash\{0\}(u(y) \leq a\langle \bar{p}(t_1), y\rangle)$, zatem głosi, że niezależnie od długości horyzontu T funkcję użyteczności można aproksymować (z góry) pewną formą liniową z wektorem współczynników $a\bar{p}(t_1)$; $a > 0$. Warunek **(U2)** jest równoważny z następującym: $\forall y \in \mathbb{N}^0(u(y) > 0)$. Warunki te spełniają m.in. wybrane dodatnio jednorodne stopnia 1 funkcje użyteczności typu CES.

Dlatego dalej zakładamy, że:

(G9) $\forall\varepsilon > 0\ \exists\nu_\varepsilon > 0\ \forall t\left(\frac{\delta_{\varepsilon,t}}{\alpha_{M,t}} \geq \nu_\varepsilon\right)$.

Ostatni warunek, który uwzględniono przy dowodzie twierdzenia 3 o wielopasmowej magistrali, dotyczy regularnego rozwoju technologii w gospodarce, co znajduje wyraz w osiąganej w poszczególnych okresach technologicznej efektywności produkcji. Warunek **(G5)** przewiduje wprawdzie możliwość wzrostu efektywności produkcji w gospodarce, ale nie gwarantuje, że będzie to (przynajmniej na magistrali) wzrost harmonijny, bez skoków i wahań. W długich okresach (w dowolnie długim horyzoncie T) taki regularny, harmonijny rozwój technologii w niestacjonarnej gospodarce Gale'a zapewnia następujący warunek:

(G10) $\exists\rho > 0\left(\lim_t \Gamma_t \geq \rho\right)$,

gdzie $\Gamma_t = \frac{\prod_{\theta=1}^{t}\alpha_{M,\theta}}{\alpha_{M,t}^{t}}$. Wobec **(G5)** (zob. (1)) ciąg $\{\Gamma_t(t)\}_{t=1}^{\infty}$ jest nierosnący i ograniczony, $1 \geq \Gamma_t \geq \Gamma_{t+1}$, więc ma granicę $\bar{c} \geq 0$. Warunek **(G10)** wymaga, aby była to granica dodatnia. Wyklucza nie tylko możliwość występowania gwałtownych zmian/skoków wskaźnika technologicznej efektywności produkcji $\alpha_{M,t}$ – a w efekcie tempa wzrostu na magistrali[13] – ale oznacza istnienie pewnego, niezależnego od długości horyzontu $T = \{0, 1, \ldots, t_1\}$, granicznego (górnego) pułapu tempa wzrostu możliwego do osiągnięcia w ogóle przez gospodarkę (Panek, 2019).

□ **Twierdzenie 2.** Jeżeli zachodzą warunki **(G1)–(G10)**, **(U1)**, **(U2)**, to dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba naturalna k_ε, że liczba okresów, w których (y^0, t_1, u) – optymalny proces wzrostu $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ spełnia warunek

$$d(y^*(t), \mathbb{N}^{t_1}) \geq \varepsilon, \tag{17}$$

nie przekracza k_ε. Liczba k_ε nie zależy od długości horyzontu T.

Dowód. Weźmy optymalny proces wzrostu $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$. Wobec **(G5)**, (5), (11) mamy:

$$\langle\bar{p}(t_1), y^*(t+1)\rangle \leq \alpha_{M,t_1}\langle\bar{p}(t_1), y^*(t)\rangle,\ t = 0,1,\ldots,t_1 - 1, \tag{18}$$

$\|\bar{p}(t_1)\| = 1$[14]. Jeżeli w okresach $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k < t_1$ zachodzi warunek (17), to zgodnie z lematem 1:

---

[13] Przy założeniu **(G10)** amplituda wahań tempa wzrostu produkcji na magistrali z czasem maleje (asymptotycznie do 0, przy $t \longrightarrow +\infty$).

[14] Ceny von Neumanna (spełniające warunki (4)–(6)) są określone z dokładnością do struktury, dlatego bez ograniczeń możemy przyjąć $\|\bar{p}(t_1)\| = 1$.

$$\langle \bar{p}(t_1), y^*(t+1)\rangle \leq \left(\alpha_{M,t_1} - \delta_{\varepsilon,t_1}\right)\langle \bar{p}(t_1), y^*(t)\rangle,\ t = \tau_1, \dots, , \tau_k, \tag{19}$$

gdzie $\delta_{\varepsilon,t_1} \in \left(0, \alpha_{M,t_1}\right)$. Łącząc (18), (19), dochodzimy do warunku:

$$\langle \bar{p}(t_1), y^*(t_1)\rangle \leq \alpha_{M,t_1}^{t_1-k}\left(\alpha_{M,t_1} - \delta_{\varepsilon,t_1}\right)^k \langle \bar{p}(t_1), y^0\rangle,$$

a stąd, wobec **(U1)**:

$$u\big(y^*(t_1)\big) \leq a\alpha_{M,t_1}^{t_1-k}\left(\alpha_{M,t_1} - \delta_{\varepsilon,t_1}\right)^k \langle \bar{p}(t_1), y^0\rangle, \tag{20}$$

gdzie a jest pewną liczbą dodatnią.

Ponieważ $y^0 > 0$, więc

$$\exists \sigma > 0 (y^0 \geqq \sigma\bar{s})$$

($\bar{s}$ jest wektorem struktury produkcji na szczytowej magistrali (15))[15] i zgodnie z **(G8)** następujący ciąg wektorów produkcji:

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} y^0, & t = 0, \\ \sigma\left(\prod_{\theta=1}^{t} \alpha_{M,\theta}\right)\bar{s}, & t = 1, \dots, t_1 \end{cases}$$

tworzy (y^0, t_1) – dopuszczalny proces wzrostu, który otrzymujemy po przejściu gospodarki w okresie $t = 1$ ze stanu początkowego y^0 na szczytową magistralę $N_{\bar{s}}^0$[16]. Wówczas z definicji procesu (y^0, t_1, u) – optymalnego otrzymujemy:

$$u\big(y^*(t_1)\big) \geq u\big(\tilde{y}(t_1)\big) = \sigma\left(\prod_{\theta=1}^{t_1} \alpha_{M,\theta}\right)u(\bar{s}) > 0.) \tag{21}$$

Z (20), (21) dostajemy nierówność:

$$a\alpha_{M,t_1}^{t_1-k}\left(\alpha_{M,t_1} - \delta_{\varepsilon,t_1}\right)^k \langle \bar{p}(t_1), y^0\rangle \geq \sigma\left(\prod_{\theta=1}^{t_1} \alpha_{M,\theta}\right)u(\bar{s}) > 0,$$

lub inaczej:

$$\left(\frac{\alpha_{M,t_1} - \delta_{\varepsilon,t_1}}{\alpha_{M,t_1}}\right)^k \geq \frac{\sigma u(\bar{s})}{a\langle \bar{p}(t_1), y^0\rangle} \cdot \frac{\prod_{\theta=1}^{t_1} \alpha_{M,\theta}}{\alpha_{M,t_1}^{t_1}} = \frac{\sigma u(\bar{s})}{a\langle \bar{p}(t_1), y^0\rangle} \cdot \Gamma_{t_1},$$

---

[15] Wystarczy wziąć $\sigma = \min_i \frac{y_i^0}{\bar{s}_i} > 0$.

[16] Dla $t = 1, 2, \dots, t_1$ mamy: $\tilde{y}(t) \in N_{\bar{s}}^0 \in \mathbb{N}^{t_1}$.

z której, wobec **(G9)**, **(G10)** wynika, że:

$$1 > (1-\nu_\varepsilon)^k \geq \frac{\sigma\rho c_{min}}{a c_{max}} > 0,$$

$c_{min} = \min_{s\in S(0)} u(s) > 0,\ c_{max} = \max_{\substack{p\geq 0\\ \|p\|=1}} \langle p, y^0\rangle > 0$[17]. Wówczas:

$$k \leq \frac{\ln C}{\ln(1-\nu_\varepsilon)} = A,$$

gdzie $C = \frac{\sigma\rho c_{min}}{a c_{max}} > 0$. W charakterze liczby k_ε, o której mowa w tezie twierdzenia, wystarczy wziąć najmniejszą liczbę naturalną większą od max $\{0, A\}$. ■

5. UWAGI KOŃCOWE

1^0 Twierdzenie 2 pozostaje prawdziwe po zastąpieniu dodatniego wektora produkcji w okresie początkowym w (12) półdodatnim wektorem

$$y^0 \geq 0, \tag{12'}$$

pod warunkiem, że istnieje $(y^0, \check{t})$ – dopuszczalny proces wzrostu $\{\check{y}(t)\}_{t=0}^{\check{t}}$, prowadzący w okresie $\check{t} < t_1$ ze stanu początkowego (12') do szczytowej magistrali $N_{\bar{s}}^0$, $\check{y}(\check{t}) \in N_{\bar{s}}^0$. Technika dowodu nie zmienia się.

2^0 Twierdzenie 2 pozostaje prawdziwe również wtedy, gdy:

- warunek **(G8)** zastąpimy (słabszym) warunkiem:

$$\textbf{(G8')}\ \exists \bar{t} < t_1\ \exists \{\bar{x}(t), \bar{y}(t)\}_{t=\bar{t}}^{t_1}\ \forall t \in \{\bar{t}, \bar{t}+1, \dots, t_1\} \left(\left(\bar{x}(t), \bar{y}(t)\right) \in Z_{opt}(t)\right) \wedge$$
$$\wedge\ \forall t \in \{\bar{t}, \bar{t}+1, \dots, t_1 - 1\} \left(\bar{x}(t+1) = \bar{y}(t)\right),$$

- podobnie jak w pkt 1^0, warunek (12) zastąpimy (słabszym) warunkiem (12'),
- założymy, że istnieje $(y^0, \check{t})$ – dopuszczalny proces wzrostu $\{\check{y}(t)\}_{t=0}^{\check{t}}$, prowadzący w okresie $\check{t} \geq \bar{t}$ ze stanu początkowego (12') do szczytowej magistrali $N_{\bar{s}}^{\bar{t}} = \{\lambda\bar{s} | \lambda > 0\}$, gdzie $\bar{s} = \frac{\bar{y}(\bar{t})}{\|\bar{y}(\bar{t})\|} \in S(\bar{t})$[18].

3^0 Jeżeli w niestacjonarnej gospodarce Gale'a, spełniającej warunki **(G1)–(G10)**, proces $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ jest rozwiązaniem następującego zadania maksymalizacji wartości produkcji (mierzonej w cenach von Neumanna) w końcowym okresie horyzontu T:

$$\begin{gathered} \max \langle \bar{p}(t_1), y(t_1)\rangle \\ \text{p.w. (11), (12)} \\ (\text{wektor } y^0 \text{ dany}), \end{gathered} \tag{16'}$$

[17] Liczby $c_{min} > 0, c_{max} > 0$ istnieją, gdyż funkcja $u(\cdot)$ oraz forma liniowa $\langle \cdot, y^0\rangle$ są ciągłe, a zbiory $S(0)$, $S_+^n(1)$ zwarte.

[18] W tej wersji szczytowa magistrala $N_{\bar{s}}^{\bar{t}}$ istnieje od okresu $t = \bar{t}$ (a nie od $t = 0$).

wtedy otrzymujemy następującą wersję twierdzenia o wielopasmowej magistrali:

□ **Twierdzenie 3.** Dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba naturalna $\bar{t}$, że każdy optymalny proces wzrostu $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ (rozwiązanie zadania (16')), który w okresie $\check{t} \geq \bar{t}$ $(< t_1)$ dociera do szczytowej magistrali $N_{\bar{s}}^{\bar{t}}$,

$$y^*(\check{t}) \in N_{\bar{s}}^{\bar{t}},$$

w kolejnych okresach $t = \check{t} + 1, \dots, t_1 - 1$ horyzontu T (z wyjątkiem, ewentualnie, ostatniego okresu t_1) zawsze pozostaje w $\varepsilon -$ otoczeniu wielopasmowej magistrali $\mathbb{N}^{t_1}$ (w sensie metryki (8)).

Dowód przebiega podobnie jak dowód twierdzenia 3 w artykule Panka (2019). ■

LITERATURA

Gale D., (1967), On optimal development in a multi-sector economy, *Review of Economic Studies*, 34(1), 1–18.

Gantz D., (1980), A Strong Turnpike Theorem for a Nonstationary von Neumann-Gale Production Model, *Econometrica*, 48(7), 1977–1990.

Joshi S., (1997), Turnpike Theorems in Nonconvex Nonstationary Environments, *International Economic Review*, 38(1), 225–248.

Keeler E. B., (1972), A Twisted Turnpike, *International Economic Review*, 13(1), 160–166.

Majumdar M., (2009), Equilibrium and optimality: Some imprints of David Gale, *Games and Econ. Behavior*, 66(2), 607–626.

Makarov V. L., Rubinov A. M., (1977), *Mathematical Theory of Economic Dynmics and Equilibria*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin.

McKenzie L. W., (1976), Turnpike Theory, *Econometrica*, 44(5), 841–866.

McKenzie L. W., (1998), Turnpikes, *American Economic Review*, 88, 1–14.

McKenzie L. W., (2005), Optimal Economic Growth, Turnpike Theorems and Comparative Dynamics, w: Arrow K. J., Intriligator M. D. (red.), *Handbook of Mathematical Economics volume 3*, ed. 2, 1281–1355.

Mowszowicz S. M., (1969), Tieoriemy o magistrali w modeliach Neumanna–Gale'a (słabaja forma), *Ekonomika i matiemaiczeskije mietody*, 5(6), 877–889.

Nikaido H., (1968), *Convex Structures and Economic Theory*, Academic Press, New York.

Panek E., (2003), *Ekonomia matematyczna*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Poznań.

Panek E., (2011), O pewnej wersji „słabego" twierdzenia o magistrali w modelu von Neumanna, *Przegląd Statystyczny*, 58(1–2), 75–87.

Panek E., (2014a), Niestacjonarna gospodarka Gale'a z rosnącą efektywnością produkcji na magistrali, *Przegląd Statystyczny*, 61(1), 6–15.

Panek E., (2014b), O pewnej wersji twierdzenia o magistrali w gospodarce Gale'a ze zmienną technologią, *Przegląd Statystyczny*, 61(2), 105–114.

Panek E., (2015a), Zakrzywiona magistrala w niestacjonarnej gospodarce Gale'a. Część I, *Przegląd Statystyczny*, 62(2), 149–163.

Panek E., (2015b), Zakrzywiona magistrala w niestacjonarnej gospodarce Gale'a. Część II, *Przegląd Statystyczny*, 62(4), 349–360.

Panek E., (2016), Gospodarka Gale'a z wieloma magistralami. „Słaby" efekt magistrali, *Przegląd Statystyczny*, 63(4), 355–374.

Panek E., (2017), „Słaby” efekt magistrali w niestacjonarnej gospodarce Gale'a z graniczną technologią i wielopasmową magistralą produkcyjną, w: Appenzeller D. (red.), *Matematyka i informatyka na usługach ekonomii*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego, Poznań, 94–110.

Panek E., (2018), Niestacjonarna gospodarka Gale'a z graniczną technologią i wielopasmową magistralą produkcyjną. „Słaby”, „silny” i „bardzo silny” efekt magistrali, *Przegląd Statystyczny*, 65(4), 373–393.

Panek E., (2019), Optimal growth processes in non-stationary Gale economy with multilane production turnpike, *Economics and Business Review*, 5(2), 3–23.

Radner R., (1961), Path of Economic Growth that are Optimal with Regard to Final States: A Turnpike Theorem, *The Review of Economic Studies*, 28(2), 98–104.

Takayama A., (1985), *Mathematical Economics*, Cambridge University Press, Cambridge.