

**Anna Czapkiewicz**

AGH Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

e-mail: gzrembie@cyf-kr.edu.pl

**Paweł Jamer**

Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie

---

---

## **BADANIE WPLYWU INDEKSÓW ZMIENNOŚCI NA ZMIANY WSPÓLZALEŻNOŚCI POMIĘDZY WYBRANYMI RYNKAMI FINANSOWYMI**

---

## **AN INFLUENCE ANALYSIS OF VOLATILITY INDICES ON INTERDEPENDENCE CHANGES BETWEEN SELECTED FINANCIAL MARKETS**

---

DOI: 10.15611/ekt.2016.3.07

JEL Classification: C32, C51, C52, C58, G15

**Streszczenie:** Badanie współzależności oraz siły związków zachodzących pomiędzy finansowymi szeregami czasowymi jest jednym z ważniejszych zagadnień w analizie rynków finansowych. Do modelowania zależności wielowymiarowych rozkładów stóp zwrotu można zastosować funkcje połączeń. W celu uzyskania dynamiki zmian rozkładów stosuje się ukryty łańcuch Markowa. Jeśli w modelu dodatkowo założymy, że macierz przejścia w łańcuchu Markowa zmienia się w czasie i jest zależna od pewnych zmiennych egzogenicznych, to uzyskamy odpowiedź na pytanie, które zmienne znacząco wpływają na modelowanie zależności pomiędzy rynkami finansowymi. W pracy pokazano, że indeksy zmienności konstruowane na oparciu o opcje na dany indeks, mogą istotnie poprawić model. Analizę przeprowadzono na przykładzie zależności indeksu WIG z wybranymi indeksami europejskimi oraz indeksem amerykańskim. Jako indeks zmienności rozważono VIX oraz VSTOXX.

**Słowa kluczowe:** ukryty proces Markowa, dynamiczna macierz przejścia, giełda papierów wartościowych, indeksy zmienności, badanie zależności.

**Summary:** The study of interdependence and the strength of the relationship between financial time series is a quite important area in the financial literature. Hence we discussed the relationships between the main stock indices. The multivariate distributions of returns we modelled basing on copula functions approach. In order to obtain some dynamics of multivariate distributions we applied the hidden Markov chain. Additionally we assumed that the transition matrix of the Markov chain was dependent on some exogenous variables. The study shows that the volatility indices VIX and VSTOXX which were taken as exogenous variables improved model efficiency.

**Keywords:** hidden Markov model, time-varying transition probability, stock exchange, volatility indices, interdependence analysis.

## 1. Wstęp

Zagadnienie analizy współzależności występujących między rynkami finansowymi jest przedmiotem wielu badań. Wiedza o wzajemnych powiązaniach między różnymi giełdami jest ważna dla inwestorów oraz decydentów i może być wykorzystana do dywersyfikacji ryzyka inwestycji.

W ostatnich latach zaobserwowano wzrost siły zależności między rynkami finansowymi, spowodowany między innymi postępującą globalizacją. W literaturze finansowej panuje również pogląd, że zależność między rynkami jest związana z panującą na tych rynkach sytuacją i jest silniejsza w okresie bessy niż w okresie hossy. Między innymi F. Longin i B. Solnik [1995], badając zależność miesięcznych stóp zwrotu indeksów giełdowych pochodzących z kilku światowych rynków finansowych, zauważyli, że korelacja między rynkami jest większa w okresie spadków niż w okresie wzrostu. K. Forbes i R. Rigobon [2002] zwrócili uwagę na efekt zarażania się rynków, czyli na wystąpienie wyraźnej zmiany między powiązaniem na rynkach finansowych w czasach turbulencji. T. Markwat, E. Kole, D. van Dijk [2009] zauważyli, że w czasie kryzysu występuje efekt domina, zwiększa się powiązanie rynków finansowych, co z kolei wywołuje spadki cen akcji na prawie wszystkich parkietach.

W literaturze przedmiotu spotykamy propozycje modeli, które można wykorzystać do opisu wielowymiarowych szeregów czasowych będących stopami zwrotu z indeksów badanych rynków. Jedną z takich propozycji są wielowymiarowe modele GARCH zaproponowane przez R.F. Engle'a [2002] oraz Y.K. Tse i A.K.C. Tsui [2002], w których warunkowa korelacja jest dynamiczna (model DCC). Innym podejściem do opisu zmieniającej się w czasie zależności między rynkami są modele wykorzystujące teorię funkcji połączeń, w których dynamika zmian sterowana jest ukrytym procesem Markowa. Modele, w których ukryty łańcuch Markowa przyjmuje dwa stany, są szeroko opisywane w literaturze finansowej. Jeden z tych stanów jest wówczas utożsamiany z okresami niepewności panującej na rynkach finansowych, natomiast drugi – z okresami spokoju. Między innymi zagadnieniem tym poświęcone są prace A.J. Pattona [2006; 2009], E. Jondeau i M. Rockinger [2006], C.J. Rodrigueza [2007], L. Chollete'a i in. [2009], D. Kenourgiosa, A. Samitasa i N. Paltalidisa [2011].

W literaturze rozważany był również bardziej ogólny model sterowany ukrytym łańcuchem Markowa, w którym macierz przejścia uzależniona została od zmiennych egzogenicznych mogących mieć wpływ na dynamikę zmian. Podejście takie po raz pierwszy zaproponował A.J. Filardo [1994], który w swojej pracy badał cykle koniunkturalne. Zagadnieniem tym zajmowali się między innymi C.J. Kim, J. Piger i R. Startz [2008] oraz G. Dufrénot, O. Damette i P. Frouté (2014). K. Boudt i inni

[2012] badali zależność między tygodniowymi stopami zwrotu bankowych holdingów z siedzibą w USA. W swojej pracy autorzy argumentowali, że prawdopodobieństwo pozostania w danym stanie zależy od zmieniających się warunków rynkowych. M. Aloy i inni [2014] analizowali wschodnioazjatyckie rynki kapitałowe, stosując procesy Markowa również ze zmienną w czasie macierzą przejścia.

W prezentowanej pracy przedstawiono badanie współzależności między wybranymi rynkami finansowymi. Do modelowania tej współzależności wykorzystano funkcje połączeń oraz ukryty łańcuch Markowa. W modelu założono, że macierz przejścia w ukrytym łańcuchu Markowa zmienia się w czasie oraz zmiana ta jest uwarunkowana zachowaniem wybranych czynników. Celem tego artykułu jest zweryfikowanie hipotezy, że notowania indeksu VIX lub indeksu VSTOXX mogą być czynnikiem poprawiającym precyzję modelu opisującego zmiany współzależności między wybranymi indeksami giełdowymi. Indeks VIX wyraża w syntetyczny sposób zmienność implikowaną z 30-dniowych opcji na indeks S&P 500 (SPX). Natomiast indeks VSTOXX wyraża zmienność implikowaną na EURO STOXX 50 (indeks giełdowy grupujący 50 największych przedsiębiorstw państw strefy euro). Wartość indeksu VIX lub VSTOXX może być również prognozą prawdopodobieństwa przebywania w stanie z silną współzależnością.

W pracy badano zależność między Giełdą Papierów Wartościowych w Warszawie a rynkiem w Londynie, dwoma rynkami ze strefy euro (Niemcy i Francja), rynkiem skandynawskim (Szwecja) oraz z rynkiem amerykańskim.

Londyn to stosunkowo największy ośrodek finansowy w Europie. Londyńska giełda papierów wartościowych zajmuje czwarte miejsce w rankingach światowych pod względem wielkości mierzonej kapitalizacją po giełdzie w Nowym Jorku, rynku NASDAQ OMX oraz rynku w Tokio. Głównym indeksem giełdy w Londynie jest FTSE 100, który obejmuje 100 spółek o najwyższej kapitalizacji reprezentujących około 80% kapitalizacji rynku brytyjskiego [Feder-Sempach 2012].

Giełda papierów wartościowych we Frankfurcie to trzecia pod względem wielkości giełda w Europie, po londyńskiej GPW i Euronext. Najbardziej znanym indeksem giełdy we Frankfurcie jest indeks DAX, obliczany na podstawie trzydziestu największych spółek niemieckich należących do segmentu *Prime Standard*.

NASDAQ OMX jest międzynarodową grupą giełdową, łączącą parkiety z kilkunastu państw, na których to parkietach notowane są firmy reprezentujące ponad 50 krajów. W europejskiej części grupy jest dwanaście rynków, głównie z rejonu Morza Bałtyckiego. Najbardziej dominującym w grupie OMX krajem skandynawskim wydaje się być Szwecja, reprezentowana przez indeks OMX Stockholm 30.

Giełda warszawska zajmuje w rankingu giełd europejskich środkową pozycję pod względem kapitalizacji, wyprzedzając wszystkie giełdy nowych państw członkowskich Unii Europejskiej.

## 2. Model i jego estymacja

### 2.1. Model

Przed przystąpieniem do formalnego opisu modelu zastosowanego w badaniach empirycznych przypomnimy pojęcie funkcji połączeń (*copula function*). Funkcja ta intuicyjnie może być traktowana jako wielowymiarowa dystrybuanta o jednostajnych na przedziale  $[0,1]$  rozkładach brzegowych. Formalnie natomiast  $d$ -wymiarową funkcją przełączeń nazywamy funkcję  $C: [0,1]^d \rightarrow [0,1]$  spełniającą następujące warunki:

1. dla wszystkich  $u_i \in [0,1]: C(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1) = u_i$ ,
2. dla każdego  $u \in [0,1]^d: C(u_1, \dots, u_d) = 0$ , jeżeli co najmniej jedna współrzędna  $u_i = 0$ ,
3.  $C$  jest funkcją  $d$ -rosnącą.

Jeśli  $X = (X_1, \dots, X_d)$  będzie  $d$ -wymiarową zmienną losową o ciągłej dystrybucji  $F$ , to według twierdzenia Sklara (1959) istnieje jednoznaczna funkcja połączeń  $C: [0,1]^d \rightarrow [0,1]$  taka, że

$$F(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)), \quad (1)$$

gdzie  $F_i(x_i)$  jest dystrybuantą rozkładu brzegowego. Fundamentalnym wnioskiem z twierdzenia Sklara jest fakt, że ciągły rozkład wielowymiarowy i rozkłady brzegowe mogą być rozważane osobno, a miara zależności między nimi może być reprezentowana funkcją połączeń. Podstawową klasę funkcji połączeń stanowią tzw. kopule eliptyczne, do których należy funkcja połączeń Gaussa i funkcja połączeń  $t$ -Studenta. Parametrem funkcji kopuli Gaussa jest współczynnik korelacji. W przypadku wielowymiarowych rozkładów normalnych jest on liczbowo równy współczynnikowi korelacji Pearsona. Współczynnik ten, dla pierwszego stanu, oznaczmy jako  $\rho_1$ , natomiast dla drugiego stanu –  $\rho_2$ . Inną klasę stanowią Archimedesowskie funkcje połączeń.

W celu wprowadzenia dynamiki do modeli konstruowanych, wykorzystując teorię funkcji połączeń, wykorzystuje się często ukryte procesy Markowa, definiowanych jako para procesów  $(S_t, R_t)$ , w których  $S_t$  jest nieobserwowalnym łańcuchem Markowa z przestrzenią stanów  $S$  oraz macierzą przejścia  $P = [p_{ij}]_{i,j}$ ,  $p_{ij} = P(S_t = j | S_{t-1} = i)$ , a  $R_t$  jest obserwowalnym  $k$ -wymiarowym szeregiem czasowym.

W badaniu empirycznym zakładamy, że macierz przejścia  $P$  zmienia się w czasie i jest zdefiniowana w następujący sposób

$$P_t = \begin{bmatrix} p_t^{11} = \frac{\exp(x_{t-1}^T \beta_1)}{1 + \exp(x_{t-1}^T \beta_1)} & p_t^{12} = 1 - \frac{\exp(x_{t-1}^T \beta_1)}{1 + \exp(x_{t-1}^T \beta_1)} \\ p_t^{21} = 1 - \frac{\exp(x_{t-1}^T \beta_2)}{1 + \exp(x_{t-1}^T \beta_2)} & p_t^{22} = \frac{\exp(x_{t-1}^T \beta_2)}{1 + \exp(x_{t-1}^T \beta_2)} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

gdzie  $p_t^{ij} = P(S_t = j | S_{t-1} = i)$  są prawdopodobieństwami przejścia ze stanu  $i$  do stanu  $j$ . Prawdopodobieństwa te są wyrażone przez regresję logistyczną, w której logit jest liniową funkcją zmiennych egzogenicznych, czyli wyrażenia  $x_{t-1}^T \beta_i$ . Macierz  $x_{t-1}^T$  zawiera rozważane czynniki.

W modelu przełącznikowym przyjmujemy, że warunkowa dystrybuanta dla  $R_t | (S_t, \Omega_{t-1})$  ma postać:

$$F(r_t | S_t = j, \Omega_{t-1}; \theta) = C_j(F_t | \Omega_{t-1}; \theta_c^j), \quad (3)$$

gdzie  $C_j$  jest funkcją przełączeń dla zmiennych będących w  $j$ -tym stanie,  $\Omega_{t-1}$  jest zbiorem informacji o procesie do chwili  $t - 1$ , natomiast  $F_t$  jest wektorem wartości dystrybuant rozkładów brzegowych w chwili  $t$ :

$$F_t = \left( F_1(r_{1,t} | \mathcal{R}_{t-1}; \theta_1), \dots, F_N(r_{N,t} | \mathcal{R}_{t-1}; \theta_N) \right). \quad (4)$$

Do opisu rozkładów brzegowych przyjęto model AR(1)-GARCH(1,1) z warunkowym rozkładem skośnym  $t$ -Studenta.

## 2.2. Estymacja modelu

Estymacja parametrów modelu przebiega w dwóch krokach. W pierwszym, dla wszystkich rozważanych szeregów stóp zwrotu, dokonujemy szacowania parametrów modelu AR(1)-GARCH(1,1) z warunkowym rozkładem skośnym  $t$ -Studenta. W drugim kroku dokonujemy estymacji parametrów modelu przełącznikowego, w którym nieznanymi parametrami są parametry funkcji połączeń oraz wektory  $\beta_1, \beta_2$ .

Niech  $\theta$  oznacza wszystkie nieznanne parametry modelu. Logarytm funkcji wiarygodności  $\ell_c(\theta)$  ma postać:

$$\ell_c(\theta) = \sum_{t=1}^T \log \left( \sum_{j=1}^2 c_j(\hat{F}_t | \Omega_{t-1}; \theta_c^j) P(S_t = j | \Omega_{t-1}; \theta) \right), \quad (5)$$

gdzie

$$\hat{F}_t = \left( F_1(r_{1,t} | \Omega_{t-1}; \hat{\theta}_1), F_2(r_{2,t} | \Omega_{t-1}; \hat{\theta}_2) \right) \quad (6)$$

oraz  $c_j(\cdot)$  oznacza gęstość funkcji połączeń w  $j$ -tym stanie.

Kiedy rozważamy model z dwoma stanami, estymacji parametrów funkcji połączeń w modelu przełącznikowym dokonujemy metodą największej wiarygodności z zastosowaniem filtru Hamiltona [1994].

Niech  $\eta_t$  oznacza wektor gęstości w chwili  $t$  rozpatrywanych funkcji połączeń:

$$\eta_t = \left[ c_1(\hat{F}_t | \Omega_{t-1}; \theta_c^1), c_2(\hat{F}_t | \Omega_{t-1}; \theta_c^2) \right]^T \quad (7)$$

oraz niech  $\hat{\xi}_{t|\tau}$  oznacza warunkowe prawdopodobieństwa  $P(S_t = j|\Omega_\tau; \theta)$ :

$$\hat{\xi}_{t|\tau} = [P(S_t = 1|\Omega_\tau; \theta), P(S_t = 2|\Omega_\tau; \theta)]^T. \quad (8)$$

Stosując filtr Hamiltona [1994], mamy następujące równości w każdej chwili  $t$ :

$$\hat{\xi}_{t|t} = \frac{\hat{\xi}_{t|t-1} \odot \eta_t}{1^T(\hat{\xi}_{t|t-1} \odot \eta_t)}, \quad (9)$$

$$\hat{\xi}_{t|t+1} = P_t \hat{\xi}_{t|t}, \quad (10)$$

gdzie operator  $\odot$  definiujemy jako następujące mnożenie wektorów:

$$[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]^T \odot [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n]^T = [\alpha_1\beta_1, \alpha_2\beta_2, \dots, \alpha_n\beta_n]^T. \quad (11)$$

Funkcja log-wiarogodności (5) przyjmuje postać:

$$\ell_c(\theta) = \sum_{t=1}^T \log(1^T(\hat{\xi}_{t|t-1} \odot \eta_t)). \quad (12)$$

Istotność parametrów modelu wyznaczono metodą Monte Carlo, przyjmując 1000 powtórzeń.

### 3. Badanie empiryczne

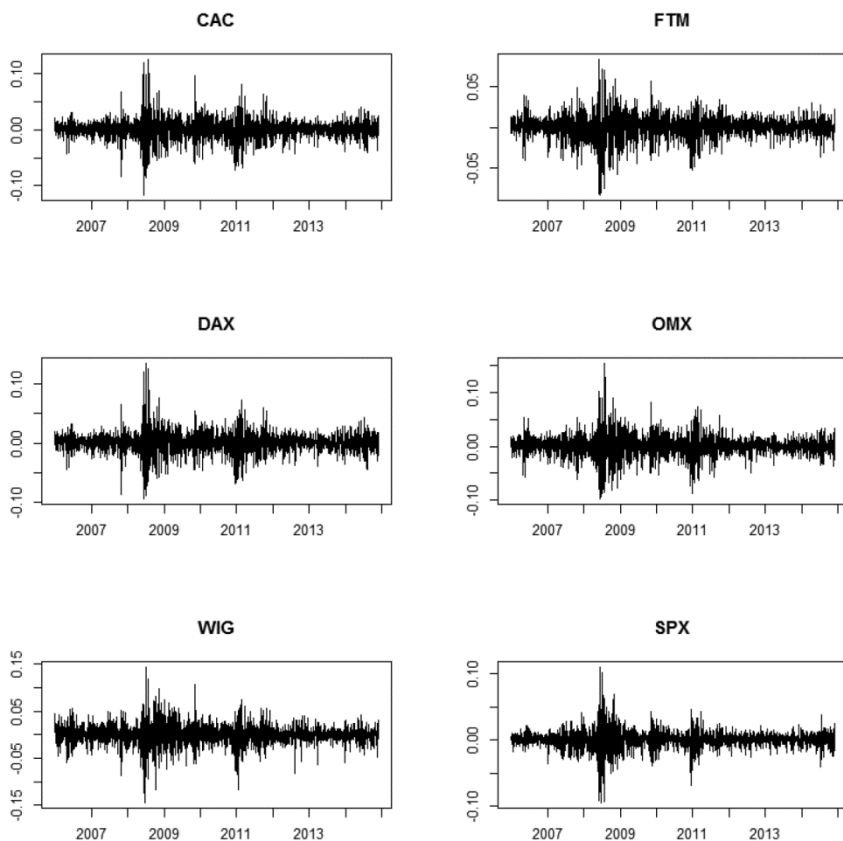
#### 3.1. Dane

Badaniem objęto notowania głównych indeksów wybranych krajów z okresu od 2006 r. do końca kwietnia 2016 r. Rozważanymi krajami były: Polska (indeks WIG), Niemcy (indeks DAX), Francja (indeks CAC), Anglia (indeks FTSE), Szwecja (indeks OMX) oraz USA (indeks SPX). Na potrzeby analizy indeksy przekształcono do postaci logarytmicznych stóp zwrotu definiowanych jako

$$r_{it} = \ln \frac{P_{i,t}}{P_{i,t-1}}, \quad (13)$$

gdzie  $P_{i,t}$  jest ceną zamknięcia  $i$ -tego indeksu w chwili  $t$ , natomiast  $P_{i,t-1}$  jest ceną zamknięcia z dnia poprzedniego.

Na rysunku 1 przedstawiono wahania stóp zwrotu dla wybranych indeksów. Należy zwrócić uwagę na skupiska silnych wahań oraz okresy względnego spokoju, które świadczą o występowaniu efektu GARCH w tych szeregach (odpowiednie testy potwierdziły tę hipotezę), widoczna jest również asymetria rozkładu oraz tzw. grube ogony.

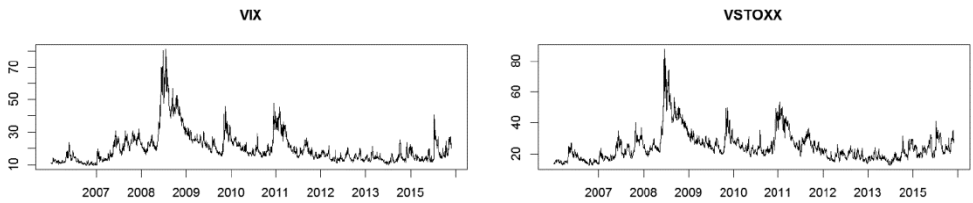


**Rys. 1.** Wahania stóp zwrotów indeksów CAC, FTSE, DAX, OMX, WIG i SPX w okresie 2006-2016

Źródło: opracowanie własne.

Analizując zachowania stóp zwrotu zauważamy dwa skupiska szczególnie silnych wahań. Jest to okres 2008-2009 i okres 2010-2011. Pierwszy związany jest z ogólnoswiatowym kryzysem gospodarczym na rynkach finansowych i bankowych. Początek kryzysowi dała zapaść na rynku pożyczek hipotecznych wysokiego ryzyka w Stanach Zjednoczonych. 13 października 2008 r. ogłoszono upadek banku inwestycyjnego Lehman Brothers, co odbiło się szerokim echem na kondycji światowych rynków finansowych. Okres 2010-2011 utożsamiany jest z drugą falą kryzysu.

Rysunek 2 przedstawia wahania indeksu zmienności VIX oraz VSTOXX. Można zauważyć, że wysokie wartości indeksów odpowiadają silnym wahanom na rynku akcji. Oba rozważane indeksy charakteryzują wysokie wartości w okresie 2008-2009 oraz 2010-2011. Daje się również zaobserwować silną korelację między tymi dwoma indeksami. Zachowanie obu indeksów jest do siebie bardzo zbliżone (współczynnik korelacji Pearsona wynosi 0,95).



**Rys. 2.** Wartości indeksów VIX oraz VSTOXX w okresie 2006-2016

Źródło: opracowanie własne.

Przed przystąpieniem do dalszych analiz dla wszystkich rozpatrywanych szeregów czasowych zweryfikowano hipotezę o stacjonarności tych szeregów. W tym celu przeprowadzono test Dickeya-Fullera na stacjonarność. Wyniki testu dały podstawy do odrzucenia hipotezy o niestacjonarności na poziomie istotności 0,05, zatem wszystkie rozważane szeregi czasowe można przyjąć za stacjonarne.

**Tabela 1.** Wartości statystyki testu D-F

Indeks	Test D-F
VIX	-3,37*
VSTOXX	-3,74**
Francuski (CAC)	-14,34***
Niemiecki (DAX)	-13,88***
Angielski (FTSE)	-13,41***
Szwedzki (OMX)	-14,79***
Amerykański (SPX)	-14,09***
Polski (WIG)	-13,58***

Symbolami \*, \*\* oraz \*\*\* oznaczono wyniki istotne statystycznie na poziomie istotności odpowiednio 0,10, 0,05 oraz 0,01.

Źródło: opracowanie własne.

Notowania indeksów VIX oraz VSTOXX przyjęto jako zmienne egzogeniczne w dyskutowanym modelu opisującym zmieniającą się w czasie zależność między rynkami finansowymi. Zakładamy więc, że występujące w macierzy przejścia  $P_t$  wyrażenie  $x_{t-1}^T \beta_i$  przyjmuje postać:

$$x_{t-1}^T \beta_i = \beta_{i,0} + \beta_{i,VIX} VIX_{t-1} \quad (14)$$



lub

$$x_{t-1}^T \beta_i = \beta_{i,0} + \beta_{i,VSTOXX} VSTOXX_{t-1} \quad (15)$$

Indeks VIX jest to indeks zmienności często nazywany indeksem strachu. Został on wprowadzony przez Chicago Board Options Exchange (CBOE) w 1993 r. Mierzy oczekiwania rynkowe dotyczące zmienności opcji na indeks S&P500 (SPX). Wyraża on oczekiwaną przez inwestorów zmienność tego indeksu w ciągu najbliższych 30 dni. W celu określenia tej zmienności brane są pod uwagę dwie najlepsze oferty kupna i dwie najlepsze oferty sprzedaży wszystkich opcji na indeks S&P500 o terminie wygaśnięcia nie krótszym niż 8 dni. Poszczególnym opcjom nadawane są wagi tak, aby otrzymana zmienność odpowiadała 30-dniowej oczekiwanej zmienności indeksu. Wartość indeksu VIX w danym momencie to implikowana 30-dniowa zmienność indeksu S&P500, pomnożona przez 100. Natomiast S&P500 jest indeksem, w skład którego wchodzi 500 przedsiębiorstw o największej kapitalizacji notowanych na New York Stock Exchange i NASDAQ; są to głównie przedsiębiorstwa amerykańskie. Indeks VSTOXX jest konstruowany na podstawie cen opcji na indeks EURO STOXX 50, który jest indeksem giełdowym grupującym 50 największych przedsiębiorstw należących do państw strefy euro.

### 3.2. Analiza współzależności między rynkami finansowymi

W modelu przełącznikowym, zastosowanym do badania zależności między każdą parą rynków rozważaną niezależnie, wzięto pod uwagę rozmaite funkcje połączeń. Model z dwoma stanami był konstruowany z wykorzystaniem funkcji Euklidesowych oraz Archimedesowych Claytona-Gumbela (BB1), Joe-Claytona (BB7) i Joe-Franka (BB8). Jednakże wybór tych funkcji nie wpływał znacznie na dynamikę zależności, w związku z czym do dalszych analiz założono model przełącznikowy z dwiema kopulami Gaussa.

Wyniki estymacji modelu przedstawiono w tab. 2. Istotność parametrów beta została stwierdzona na podstawie symulacji Monte Carlo. Ponieważ oba parametry należące do funkcji połączeń zawsze były istotne, gwiazdkami oznaczono tylko istotność parametrów  $\beta_i$ . W tabeli 2 przedstawiono również wyniki testu LM, którym testujemy hipotezę, że model ze zmieniającą się w czasie macierzą przejścia jest równoważny modelowi ze stałą macierzą przejścia, przeciwko hipotezie, że model ze zmieniającą się w czasie macierzą przejścia jest lepszy niż model ze stałą macierzą przejścia. W tym celu zastosowano statystykę testową o postaci:

$$LM = 2(L(\theta) - L_F(\theta)), \quad (16)$$

gdzie  $L(\theta)$  and  $L_F(\theta)$  jest wartością funkcji log-wiarogodności odpowiednio dla modelu ze zmieniającą się w czasie macierzą przejścia oraz dla modelu ze stałą macierzą przejścia. Statystyka testowa ma asymptotycznie rozkład chi-kwadrat z  $(p - q)$  stopniami swobody, gdzie  $p$  i  $q$  są odpowiednio liczbami estymowanych parametrów [Vuong 1989].

Ponieważ nie dla każdej z rozważanych par funkcja wiarygodności utworzona dla modelu z dynamiczną macierzą przejścia osiągała swoje maksimum globalne, w tabeli przedstawiono tylko te pary, dla których model ten okazał się istotnie lepszy od modelu ze stałą macierzą przejścia. Do analizy par rynków europejskich pod uwagę wzięto indeks VSTOXX, natomiast w przypadku badania zależności rynku amerykańskiego z innymi rynkami rozważano indeks VIX. Dla pozostałych par przedstawiono wyniki tylko dla modelu ze stałą macierzą przejścia.

Dla wszystkich analizowanych przypadków otrzymaliśmy dwa stany współzależności: stan silnej współzależności oraz stan umiarkowanej współzależności. Dla europejskich rynków rozwiniętych oba stany charakteryzują się dużym współczynnikiem korelacji. Na przykład dla Francji i Niemiec współczynniki te wynoszą odpowiednio 0,974 i 0,916, dla Anglii i Niemiec 0,869 i 0,708.

**Tabela 2.** Wartości estymatorów parametrów modelu przełącznikowego sterowanego ukrytym łańcuchem Markowa oraz wartości statystyki LM

Państwa	$j$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\beta_{1,0}$	$\beta_{1,j}$	$\beta_{2,0}$	$\beta_{2,j}$	LM
Polska Niemcy	VIX	0,795	0,442	0,974	0,094***	3,308***	-0,018	8,144 **
Polska Francja	VIX	0,749	0,457	-3,122**	0,450***	2,577***	0,067	10,217***
Polska Anglia	VIX	0,783	0,400	-0,534	0,129***	2,303***	0,003	21,747***
USA Niemcy	VSTOXX	0,764	0,471	-1,301*	0,272***	2,707***	0,032	23,881***
Polska USA	VSTOXX	0,545	0,334	5,933***	-	6,904***	-	-
Polska Szwecja	VIX	0,814	0,482	2,580***	-	2,967***	-	-
Francja Niemcy	VIX	0,974	0,916	3,526***	-	3,516***	-	-
Anglia Niemcy	VIX	0,869	0,708	3,390***	-	3,159***	-	-

Symbolami \*, \*\* oraz \*\*\* oznaczono wyniki istotne statystycznie na poziomie istotności odpowiednio 0,10, 0,05 oraz 0,01.

Źródło: opracowanie własne.

Nieco inaczej zachowuje się siła współzależności warszawskiej Giełdy Papierów Wartościowych z innymi rozwiniętymi rynkami z Europy. Rynek polski jest traktowany jako rynek rozwijający się i był okres, w którym był bardzo atrakcyjny dla zagranicznych inwestorów. Należy zwrócić uwagę, że zależności rynku polskiego z Niemcami, Francją i Anglią są bardzo do siebie podobne. W stanie silnej zależno-

ści współczynnik korelacji waha się od 0,749 do 0,814, natomiast w stanie umiarkowanej zależności współczynnik ten waha się od 0,400 do 0,482.

Jeżeli dla porównania weźmiemy parę USA i Niemcy, to zauważymy podobną prawidłowość. Jednak w przypadku analiz powiązań rynku amerykańskiego z rynkami europejskimi należy wziąć pod uwagę różnice czasowe występujące między tymi krajami. Rynek amerykański rozpoczyna swą działalność w połowie aktywności rynków europejskich. Zatem w badaniach rozważyliśmy dwa przypadki: notowania rynku amerykańskiego i europejskiego są brane z tego samego dnia (wyniki są w tab. 2) oraz przypadek, gdy notowania rynku amerykańskiego były brane z dnia poprzedniego (ponieważ otrzymano dużo słabsze zależności, w pracy nie przytoczono wyników tych badań).

Natomiast związek USA i Polski jest stosunkowo słaby. W okresie silnej zależności współczynnik korelacji wyniósł tylko 0,545, a w okresie umiarkowanej zależności – 0,334. Przyczyną tak niskich wartości jest niewątpliwie różnica czasowa.

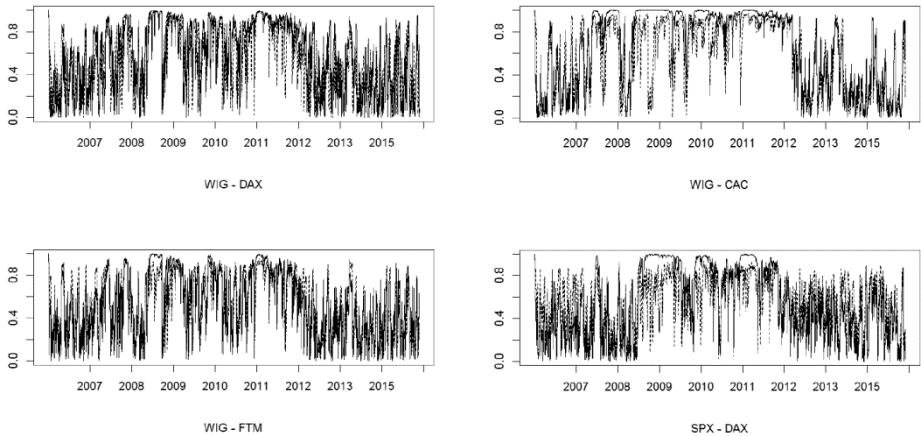
Uwzględnienie w modelu wartości VIX lub VSTOXX nie dla wszystkich par przyniosło wyraźną poprawę modelu. Naszą dyskusję rozpoczniemy więc od tych par, dla których wprowadzenie dynamicznej macierzy przejścia zdecydowanie poprawiło model. Do tych par należy związek warszawskiej giełdy z rozwiniętymi rynkami europejskimi.

W przypadku rozważenia zależności Polski z Niemcami, Francją lub Anglią statystyka LM wskazała na lepszy model ze zmieniającą się w czasie macierzą przejścia uzależnioną od indeksu VSTOXX.

Należy jednak zwrócić uwagę, że wartości indeksu mają wpływ tylko na prawdopodobieństwo pozostania w stanie silnej zależności:  $\beta_1^1 > 0$ . Natomiast na prawdopodobieństwo pozostania w stanie z umiarkowaną zależnością wartości tego indeksu nie mają wpływu. Zatem można przypuszczać, że wzrost indeksu VSTOXX wpłynie na zwiększenie prawdopodobieństwa wystąpienia silnej zależności między analizowanymi rynkami.

Rysunek 3 przedstawia prawdopodobieństwo przebywania w stanie z silniejszą zależnością. Linia ciągłą jest zaznaczone prawdopodobieństwo wyznaczone dla modelu ze zmieniającą się w czasie macierzą przejścia, natomiast linią przerywaną – prawdopodobieństwo wyznaczone dla modelu ze stałą macierzą przejścia.

Analizując zależności między parami WIG-DAX, WIG-CAC oraz WIG-FTM, zauważamy potwierdzenie poprzednich wniosków. Zauważamy wyraźną różnicę w prawdopodobieństwach, ale tylko w tych przedziałach, gdzie prawdopodobieństwo to jest bardzo duże. Można zauważyć, że przedziały te pokrywają się z okresami złej koniunktury na rynkach finansowych, czyli okresami, w których występowały duże zmienności w rozważanych stopach zwrotu. Zatem badania potwierdziły istniejące w literaturze finansowej przekonanie, że w okresie bessy następuje przejście na stan, w którym zależność jest większa. Dodatkowe uwzględnienie indeksu zmienności VSTOXX wzmacnia prawdopodobieństwo występowania tego stanu. Można zau-



Linia ciągłą zaznaczono prawdopodobieństwo wyznaczone dla modelu ze zmieniającą się w czasie macierzą przejścia, natomiast linią przerywaną – prawdopodobieństwo wyznaczone dla modelu ze stałą macierzą przejścia

**Rys. 3.** Prawdopodobieństwo przebywania w stanie z silniejszą zależnością.

Źródło: opracowanie własne.

ważyć, że prawdopodobieństwo przebywania w stanie jest większe dla modelu z dynamiczną macierzą przejścia niż dla modelu ze stałą macierzą przejścia – a to w sposób naturalny przekłada się na wyższe zależności między tymi rynkami w okresie bessy, niż wynika to z wyników na podstawie modelu ze stałą macierzą przejścia.

Ponadto w modelu ze stałą macierzą przejścia zauważamy krótkotrwałe przejście do drugiego stanu. Określenie stanów w okresie bessy nie jest tak jednoznaczne jak w przypadku modeli z dynamiczną macierzą przejścia.

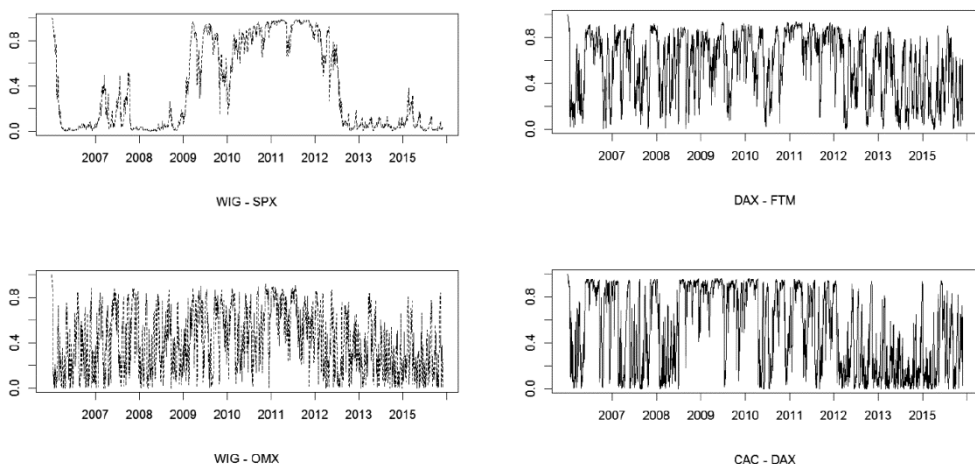
Uwzględnienie indeksu VIX w analizie zależności USA i Niemiec również zdecydowanie poprawiło model (również USA i Anglii, której wyniki nie są ujęte w tab. 2). W przypadku tej pary zauważmy bardzo wyraźną różnicę w prawdopodobieństwach pozostania w pierwszym stanie. W czasie złej koniunktury na rynku akcji widzimy, że zależność między tymi rynkami jest zdecydowanie większa, niż wynikałoby to z modelu ze stałą macierzą przejścia.

Rysunek 4 przedstawia prawdopodobieństwo przebywania w stanie z silniejszą zależnością dla par rynków, w których nie zauważono wyraźnej poprawy modelu po wprowadzeniu zmiennych egzogenicznych do macierzy przejścia.

Analizując uzyskane wyniki, można przypuszczać, że w przypadku europejskich rynków rozwiniętych większość dostępnych dla inwestora informacji jest już uwzględniona w cenie akcji i dodatkowa informacja o indeksie VIX lub VSTOXX nie poprawia skuteczności modelowania zależności między tymi rynkami. Właściwość tę zauważamy w przypadku analizy DAX i FTM oraz CAC i DAX. Mimo że zauważamy zwiększenie prawdopodobieństwa pozostania w stanie silniejszej zależności w okresie niestabilnej koniunktury na rynkach akcji, to jednak uwzględnienie

notowań indeksu strachu nie tylko nie poprawiło modelu, ale go też osłabiło, czego wynikiem jest niestabilna estymacja nieznanymi parametrów.

Rysunek 4 przedstawia prawdopodobieństwo przebywania w stanie z silniejszą zależnością również dla innych par, w których wprowadzenie zmiennej egzogenicznej nie poprawiło modelu, czyli dla pary WIG-OMX oraz dla pary WIG-SPX. W przypadku pierwszym zauważamy, że czas przebywania w stanie z silną zależnością jest raczej bardzo krótki. Wyraźny wzrost tego prawdopodobieństwa zauważamy tylko w latach 2011-2012 oraz wyraźne osłabienie po roku 2013. Informacja o VSTOXX nie poprawia modelu. Należy jednak pamiętać, że indeks zmienności VSTOXX jest konstruowany na podstawie opcji Euro Stoxx 50, czyli indeksu giełdowego grupującego 50 największych przedsiębiorstw należących do państw strefy euro. Zatem w przypadku analizy tej pary wybrany do analizy indeks strachu, VSTOXX, nie ma swojego uzasadnienia.



Linia ciągłą zaznaczono prawdopodobieństwo wyznaczone dla modelu ze stałą macierzą przejścia

**Rys. 4.** Prawdopodobieństwo przebywania w stanie z silniejszą zależnością.

Źródło: opracowanie własne.

Jeśli chodzi o zależność między rynkiem polskim oraz USA, to zauważamy dwa wyraźne stany. Stan wyższej zależności prawie nieprzerwanie utrzymuje się od 2009 do 2013 roku. Informacja o indeksie VIX w sposób nieistotny poprawiła model.

## 4. Zakończenie

W prezentowanej pracy przedstawiono badanie zależności między wybranymi rynkami europejskimi oraz rynkiem amerykańskim. Do opisu tej zależności wykorzystano model przełącznikowy, w którym przełączenie modelowane jest przez ukryty

łańcuch Markowa z dwoma stanami oraz z dynamiczną macierzą przejścia. Macierz przejścia jest uwarunkowana zachowaniem pewnych czynników, którymi są w przypadku tego badania indeksy zmienności VSTOXX lub VIX.

Celem artykułu było zweryfikowanie hipotezy, że zmienna egzogeniczna będąca wartością indeksu VIX, wyrażającego w syntetyczny sposób zmienność implikowaną z 30-dniowych opcji na indeks S&P 500 lub zmienna VSTOXX egzogeniczna będąca wartością indeksu wyrażającego zmienność implikowaną na EURO STOXX 50, który jest indeksem giełdowym grupującym 50 największych przedsiębiorstw państw strefy euro, znacząco wpływa na skuteczność modelowania zależności. Wyniki przeprowadzonych badań wskazały na statystyczną istotnie poprawę modelu dla opisu zależności warszawskiej GPW z rozwiniętymi rynkami Europy, takimi jak Niemcy, Francja czy Anglia, natomiast w przypadku analiz rynków rozwiniętych nie zauważono statystycznie istotnej różnicy między modelem ze stałą macierzą przejścia, w której nie uwzględniono zmiennych egzogenicznych, a modelem ze zmienną macierzą przejścia.

Na uwagę zasługuje fakt, że w przypadku badania zależności między USA i Niemcami (również USA i Anglią) uwzględnienie indeksu VIX zdecydowanie poprawiło model, czego skutkiem są wyższe wartości współczynników zależności w okresie złej koniunktury na rynkach akcji, niż gdyby były szacowane z modelu ze stałą macierzą przejścia.

W sytuacji całkowitej niezależności analizowanych rynków od VSTOXX uwzględnienie indeksu strachu nie poprawiało dopasowania modelu.

## Literatura

- Aloy M., De Truchis G., Dufrénot G., Keddad B., 2014, *Shift-volatility transmission in east asian equity markets: New indicators*, Market Microstructure and Nonlinear Dynamics, s. 273-291.
- Boudt K., Danielsson J., Koopman S.J., Lucas A., 2012, *Regime switches in volatility and correlation of financial institutions*, Technical Report, Working Paper Research, no. 227, National Bank of Belgium, Brussels.
- Chollette L., Heinen A., Valdesogo A., 2009, *Modeling international financial returns with a multivariate regime switching Copula*, Journal of Financial Econometrics, 7 (4), s. 437-480.
- Dufrénot G., Damette O., Frouté P., 2014, *Anticipated macroeconomic fundamentals, sovereign spreads and regime-switching: The case of the euro area*, Market Microstructure and Nonlinear Dynamics, s. 205-234.
- Engle R.F., 2002, *Dynamic conditional correlation: A Simple class of multivariate generalized autoregressive conditional heteroskedasticity models*, Journal of Business and Economic Statistics, 20 (3), s. 339-350.
- Feder-Sempach E., 2012, *Rynki giełdowe i alternatywne systemy obrotu w krajach członkowskich Unii Europejskiej*, Acta Universitatis Lodzianensis, nr 264, s. 81-94.
- Filardo A.J., 1994, *Business-cycle phases and their transitional dynamics*, Journal of Business and Economic Statistics 12 (3), s. 299-308.
- Forbes K., Rigobon R., 2002, *No contagion, only interdependence: Measuring stock market comovements*, The Journal of Finance, 10 (5), s. 2223-2261.

- Hamilton J.D., 1990, *Analysis of time series subject to changes in regime*, Journal of Econometrics, 45 (1-2), s. 39-70.
- Hamilton J.D., 1994, *Time Series Analysis*, Princeton University Press, Princeton.
- Jondeau E., Rockinger M., 2006, *The Copula-GARCH model of conditional dependencies: An international stock market application*, Journal of International Money and Finance, 25 (5), s. 827-853.
- Kenourgios D., Samitas A., Paltalidis N., 2011, *Financial crises and stock market contagion in a multivariate time-varying asymmetric framework*, Journal of International Financial Markets, Institutions and Money, 21 (1), s. 92-106.
- Kim C.J., Piger, J., Startz, R., 2008, *Estimation of Markov regime-switching regression models with endogenous switching*, Journal of Econometrics 143 (2), s. 263-273.
- Longin F., Solnik B., 1995, *Is the correlation in international equity returns constant: 1960-1990?*, Journal of International Money and Finance, 14 (1), s. 3-26.
- Markwat T., Kole E., van Dijk D., 2009, *Contagion as a domino effect in financial markets*, Journal of Banking & Finance, 33 (11), s. 1996-2012.
- Patton A.J., 2006, *Modelling asymmetric exchange rate dependence*, International Economic Review, 47 (2), s. 527-556.
- Patton A.J., 2009, *Copula-based models for financial time series*, Handbook of Financial Time Series, s. 767-785.
- Rodriguez J.C., 2007, *Measuring financial contagion: A Copula approach*, Journal of Empirical Finance, 14 (3), s. 401-23.
- Tse Y.K., Tsui A.K.C., 2002, *A multivariate generalized autoregressive conditional heteroscedasticity model with time-varying correlations*, Journal of Business and Economic Statistics, 20 (3), s. 351-362.
- Vuong Q.H., 1989, *Likelihood ratio tests for model selection and non-nested hypotheses*, Econometrica, 57 (2), s. 307-333.