▶ KNUV 2015; 4(46): 101-115

Leszek S. Zaremba
Akademia Finansów i Biznesu Vistula – Warszawa

INŻYNIERIA FINANSOWA NA RYNKACH ZUPEŁNYCH

Streszczenie

Celem rozważań jest pokazanie, że algebra liniowa, wykładana we wszystkich politechnikach oraz w większości szkół ekonomicznych, oferuje bardzo adekwatne narzędzia do prezentacji najważniejszych pojęć z inżynierii finansowej. Daje możliwość klarownego wyjaśnienia, na czym polegają podstawowe problemy badawcze w inżynierii finansowej, oraz ukazuje sposoby ich rozwiązywania. Chodzi tu przede wszystkim o zabezpieczanie się firm i, ogólnie mówiąc, inwestorów przed ryzykiem na rynkach kapitałowych przez tworzenie syntetycznych instrumentów replikujących pożądane (nieobecne na rynku kapitałowym) papiery wartościowe. Jest to niezwykle ważne dla dużych firm, takich jak np. firmy z WIG 30, w których nieumiejętne zabezpieczanie się przed ryzykiem spadków cen surowców (np. miedzi) lub, co gorsza, brak zabezpieczania, prowadzi do dużych strat (KGHM).

Słowa kluczowe: *hedging*, bazowe instrumenty finansowe, instrumenty Arrowa-Debreu, portfel replikujący, rynek finansowy zupełny.

Kody JEL: C02, C18, C54, C60

Wprowadzenie

Rozpoczynamy od prezentacji podstawowych pojęć rynku finansowego w ujęciu statycznym, to znaczy, zakładamy że cała aktywność gospodarcza (praca, konsumpcja, handel) ma miejsce „dziś" o godz. powiedzmy 9:00 rano oraz „jutro" też o 9:00 rano. Taki model gospodarki, choć uproszczony, jest w znacznym stopniu adekwatny dla funduszy inwestycyjnych, które, w przeciwieństwie do „skalperów giełdowych", nie dokonują wielokrotnych transakcji każdego dnia, lecz „od czasu do czasu", na przykład, raz w tygodniu, raz w miesiącu, raz na kwartał itp., czyli mówiąc obrazowo o godz. 9:00 rano dziś, a następnie o godz. 9:00 rano następnego dnia. Szczególnie dotyczy to OFE (otwartych funduszy inwestycyjnych), które „patrzą" na rynek kapitałowy przez pryzmat długich horyzontów inwestycyjnych istotnych z punktu widzenia przyszłych emerytów.

Przyjmujemy bardzo ogólne założenie że na rozpatrywanym rynku finansowym dostępnych jest $\boldsymbol{n}$ płynnych papierów wartościowych, zaś liczba wszystkich możliwych stanów tego rynku wynosi $\boldsymbol{m}$. Takie założenie jest zawsze spełnione. Na początku ograniczymy sztucznie rynek kapitałowy do $m = 3$ różnych jego stanów oraz do n = 4 płynnych papierów wartościowych, aby w łatwy sposób zobrazować istotę inżynierii finansowej.

Pokazujemy, jak w prosty sposób można przedstawiać rynek finansowy za pomocą macierzy, czyli podstawowego pojęcia z algebry liniowej. Prowadzi to w naturalny sposób do równań macierzowo-wektorowych, w których wektory reprezentują instrumenty finansowe, nawet te których nie ma fizycznie na badanym rynku kapitałowym, ale których wypłaty poszczególni inwestorzy chcieliby mieć, a które daje się „odtworzyć" z istniejących na rynku płynnych papierów wartościowych. Postępując w ten sposób wprowadzamy w naturalny sposób pojęcia *hedgingu*.

Następnie wprowadzamy wszystkie podstawowe pojęcia odnoszące się do rynku kapitałowego zupełnego z punktu widzenia inżyniera finansowego, w szczególności koncepcję *zbytecznego instrumentu finansowego*, *replikacji* pożądanych instrumentów finansowych, pojęcie *rynku zupełnego* oraz *niezupełnego*, *hedgingu doskonałego*, itd. W końcowej części wyjaśniamy, na czym polega inżynieria finansowa na rynkach niezupełnych.

Prezentacja podstawowych pojęć finansowych poprzez wektory i macierze

Rozważać będziemy rynek 1-okresowy (statyczny) **M**, w którym występują tylko 2 daty: „dziś" i „jutro", które mogą oznaczać równie dobrze „w tym tygodniu" i „w następnym tygodniu" lub „w tym miesiącu" i „w przyszłym miesiącu". Między tymi datami nic się nie będzie działo na rynku M. Cała aktywność gospodarcza (praca, konsumpcja, handel itp.) pojawi się „dziś" o 12:00 w południe oraz „jutro" o 12:00 w południe. Dziś o 12:01 dowiemy się, co wydarzyło się 1 minutę temu czyli „dziś". O „jutrzejszej" wycenie papierów wartoś- ciowych na rynku M wiemy tylko tyle, że pojawi się 1 (nie wiemy który) z m stanów i w związku z tym ceny towarów mogą być tylko takie, jakie charakteryzują ten konkretny stan rynku. Ponadto, znamy prawdopodobieństwa wystąpienia każdego z m stanów rynku.

Przykład 1. Opisuje typowy rynek finansowy **M**, który będziemy rozważać.

Rynek **M** może być tylko w jednym z 3 stanów: (i) hossa, (ii) stan przeciętnych cen oraz (iii) bessa, których prawdopodobieństwa zaistnienia wynoszą odp. 1/3, 1/2 i 1/6. Przyjmujemy, że na tym rynku dostępne są tylko 4 rodzaje płynnych papierów wartościowych (płynne papiery nazywać będziemy w dalszej części książki bazowymi). Są to:

(1) akcje firmy ABC, których cena jutro może wynieść (w zależności od stanu rynku) 10 zł, 7 zł lub 5 zł;

(2) bon, którego cena jutro będzie wynosić 100 zł w każdym z 3 stanów;

(3) opcja sprzedaży „jutro" akcji firmy ABC za 9 zł (opcja #1);

(4) opcja kupna „jutro" akcji firmy ABC za 6 zł (opcja #2).

Pozostałe informacje dotyczące tego rynku finansowego **M** uważamy za nieistotne i dlatego nie będziemy ich brać pod uwagę. Mamy tu na myśli informacje dotyczące podmiotów obecnych na rynku finansowym w danym kraju, a więc informacje o banku centralnym, o otwartych i zamkniętych funduszach inwestycyjnych, informacje o OFE, o bankach komercyjnych, o bankach uniwersalnych, o biurach maklerskich itd.

Zadanie 1. Dla rynku **M** z przykładu 1 formułuje się szereg problemów istotnych z punktu widzenia inżyniera finansowego, jakim niejednokrotnie bywa bank:

(a) zbuduj portfel składający się z papierów wartościowych (1)-(3), który replikuje opcję #2, tzn. odtwarza jej cenę we wszystkich 3 stanach rynku; w ten sposób badamy, czy opcja # 2 jest *zbytecznym papierem wartościowym*;

(b) wyznacz cenę niearbitrażową tego portfela, jeśli dzisiejsza cena akcji wynosi 8 zł, zaś stopa bez ryzyka= 5%;

(c) zbuduj najlepszą replikę / osłonę papieru wartościowego (3) za pomocą papierów wartościowych (1)-(2);

Przykład 1. można łatwo rozbudować dodając kilka skomplikowanych instrumentów.

Przykład 1a. Rynek finansowy **M** może być w jednym z 3 stanów, których prawdopodobieństwa zaistnienia wynoszą odpowiednio: 1/2, 1/6 i 1/3. Na rynku **M** dostępnych jest 8 rodzajów płynnych papierów bazowych). Są to:

(1) akcja, której cena jutro może wynieść 6 zł, 4 zł, 2 zł;

(2) bon, którego cena jutro będzie równa 10 zł w każdym stanie rynku;

(3) opcja sprzedaży „jutro" ww. akcji po cenie 5 zł (opcja #1);

(4) opcja kupna „jutro" ww. akcji po cenie 2 zł (opcja #2);

(5) opcja sprzedaży opcji #1 po cenie 2 zł (opcja #3);

(6) opcja kupna opcji #1 po cenie 1 zł (opcja #4);

(7) opcja sprzedaży opcji #2 po cenie 2 zł (opcja #5);

(8) opcja kupna opcji #2 po cenie 1 zł (opcja #6).

W dalszej części będziemy rozróżniać cenę papieru wartościowego X od wypłaty jaka należy się jego właścicielowi z tytułu posiadania X. Wypłata z papieru wartościowego obejmuje nie tylko cenę tego papieru, ale również wszelkie należne jego właścicielowi płatności, jak np. dywidendy, kupony, rabaty itp.

Celem rozważań jest przekonanie Czytelników, że sporą część skomplikowanej problematyki, jaką bez wątpienia jest *hedging*, czyli osłona ryzykownych pozycji w jakich znalazł się uczestnik rynku kapitałowego, można przedstawić w sposób zrozumiały i w pełni zadowalający za pomocą macierzy i wektorów, czyli aparatu algebry liniowej, bez potrzeby odwoływania się do stochastycznego rachunku różniczkowego Ito.

Papiery wartościowe jako wektory; macierz jako matematyczna reprezentacja rynku finansowego

Rozważmy 6 wektorów przedstawionych w postaci kolumn (1), odwołując się do przykładu 1a. Pierwszy z nich reprezentuje (przedstawia) wypłaty z opcji #2; drugi wypłaty z akcji; trzeci wektor z bonu; czwarty wektor przedstawia wypłaty z opcji #1; piąty wypłaty z opcji #4, szósty wektor przedstawia wypłaty z opcji #6. Ostatni siódmy wektor reprezentuje wypłaty z opcji #5, czyli z opcji sprzedaży opcji #2 po cenie 1 zł. W ten sposób (w postaci kolumn) można reprezentować dowolny (dostępny na rynku lub nie) instrument finansowy.

$$\begin{bmatrix}4\\2\\0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}6\\4\\2\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}10\\10\\10\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0\\1\\3\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}3\\1\\0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix}. \tag{1}$$

Zobaczmy, jak prosto (2) da się przedstawić rynek finansowy **M** z przykładu 1 w postaci macierzy 3x4, tzn. o 3 wierszach i 4 kolumnach, pamiętając, że każdy z wierszy reprezentuje inny stan rynku finansowego, zaś każda kolumna przedstawia wypłaty z konkretnego bazowego papieru wartościowego we wszystkich 3 stanach rynku.

$$A = \begin{bmatrix}10 & 100 & 0 & 4\\ 7 & 100 & 2 & 1\\ 5 & 100 & 4 & 0\end{bmatrix} \tag{2}$$

W przyszłości każdą kolumnę będziemy utożsamiać z takim papierem wartościowym (dostępnym w danej chwili na rynku lub nie) którego wypłaty we wszystkich stanach rynku reprezentowanych przez wiersze przedstawia ta kolumna Na przykład, kolumnę:

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 114 \\ 110 \\ 109 \end{bmatrix} \tag{3}$$

będziemy utożsamiać z papierem wartościowym, który wypłaca 114 zł w pierwszym stanie rynku, 110 zł w drugim stanie rynku oraz 109 zł w trzecim stanie rynku. Jak taki papier można uzyskać na rynku finansowym reprezentowanym przez macierz A daną wzorem (2)? Odpowiedź okazuje się bardzo prosta. Wystarczy bowiem kupić 1 akcję, 1 bon, 1 opcję #1 oraz 1 opcję #2, czyli po jednej sztuce ze wszystkich 4 papierów wartościowych z przykładu 1.

Rynek finansowy w „tablicowym" zapisie

Stan rynku	Prawdopodobieństwo	Cena akcji	Cena bonu	Cena opcji #1	Cena opcji #2
1	1/3	10	100	0	4
2	1/2	7	100	2	1
3	1/6	5	100	4	0

W ten prosty sposób da się przedstawić każdy rynek finansowy bez potrzeby wyliczania wszystkich obecnych na nim instytucji i podmiotów rynku kapitałowego i finansowego. Mając do dyspozycji jedynie dane zawarte w powyższej tabeli będziemy w stanie wyceniać dowolne portfele, w tym portfele replikujące wszelkie instrumenty finansowe w sposób nie dopuszczający arbitrażu, a więc zgodny z kanonami współczesnych finansów.

Zbyteczne papiery wartościowe; *hedging*

Niech A będzie macierzą mxn, tzn. o m wierszach, które reprezentują stany rynku oraz n kolumnach, które reprezentują bazowe papiery wartościowe:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{bmatrix} \tag{4}$$

Inżynier finansowy (bank) ma za zadanie sprzedać klientowi taki papier wartościowy (reprezentowany przez kolumnę **b** o m współrzędnych), jaki klient chciałby posiadać, przy czym papier ten nie występuje na rynku. Chodzi więc nie o pośrednictwo w sprzedaży, czym zajmują się biura maklerskie, ale o „stworzenie" nowego instrumentu, który będzie „replikował" wypłaty pożądanego przez klienta banku instrumentu b. W tym celu bank powinien rozwiązać równanie macierzowo-wektorowe **Ax** = **b,** to znaczy, równanie

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix} \tag{5}$$

szukając takiego portfela (reprezentowanego przez kolumnę **x** o n współrzędnych), aby, o ile to możliwe, spełnione było powyższe równanie **Ax** = **b**. Jeśli to się uda, powiemy, że portfel **x** replikuje **b**.

Jeśli papier wartościowy **b** nie jest bazowym (występującym na rynku finansowym papierem wartościowym), to będziemy go nazywać szczególnym papierem wartościowym. Sprzedając **b** inżynier finansowy (specjalistyczny bank) wchodzi w ryzykowną pozycję gdyż zobowiązuje się zapłacić „jutro" b_i zł w stanie rynku „i", wiedząc że na rynku możliwych jest m stanów, $1 \leq i \leq m$, z różnymi wypłatami.

Hedging pojawia się wtedy, gdy sprzedając papier wartościowy **b** wystawiamy (emitujemy) jednocześnie taki portfel **x**, aby **Ax** było „jak najbliżej" **b**, tzn. aby wektor [Ax-b] będący różnicą między **Ax** i **b** był jak „najmniejszy". Gdy Ax = b, czyli Ax-b=0, to powiemy, że inżynier finansowy osiągnął *hedging* doskonały. W tym ostatnim przypadku łatwo będzie określić cenę sprzedaży **b** jako koszt zakupu portfela **x** powiększony o pewną marżę, ale bez premii za ryzyko, gdyż takowe zostało w 100% zlikwidowane. Gdy **Ax** ≠ **b** to cena **b** musi być dodatkowo powiększona o ryzyko wynikające z niedopasowania w 100% portfela **x** do szczególnego papieru wartościowego **b.**

Bardzo istotną rolę odgrywają pojęcia liniowej zależności wektorów (wektor e jest liniowo zależny od wektorów $b_1,b_2,\dots,b_k$, jeśli istnieją takie liczby $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_k$, że zachodzi równość e = $\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_k b_k$, przy czym nie wszystkie $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_k$ są równe zero) oraz liniowej niezależności. Na przykład, wektor $\begin{bmatrix} 524 \\ 523 \\ 526 \end{bmatrix}$ jest liniowo zależny od 4 kolumn macierzy A danej wzorem (2) ponieważ istnieją nie wszystkie równe zeru liczby $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 5$, $\lambda_3 = 4$, $\lambda_4 = 1$, tak że zachodzi (8).

Jak wiemy z algebry liniowej, wektory $c_1,c_2,\dots,c_k \in R^m$ są liniowo niezależne (inaczej: układ wektorów $c_1,c_2,\dots,c_k$ jest liniowo niezależny) jeśli z tego, że

$$\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + ... + \lambda_k c_k = \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \in R^m \tag{6}$$

wynika, iż wszystkie $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ są równe zero.

Definicja 1. Papier wartościowy (instrument finansowy) nazwiemy zbytecznym, jeśli jest on liniową kombinacją bazowych papierów wartościowych.

Portfel replikujący; instrumenty finansowe Arrowa-Debreu

Definicja 2. Portfel **x**, który ma te same wartości we wszystkich stanach rynku co zbyteczny papier wartościowy **b**, nazwiemy portfelem replikującym instrument finansowy **b**.

Ponieważ $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1{,}5 & 2 \\ 2 & 1 & 0{,}5 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}$, to b = $\begin{bmatrix} 11 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}$ nazwiemy zbytecznym papierem wartościowym, zaś portfel $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, z uwagi na to, że wypłaca te same wartości we wszystkich stanach rynku co papier **b,** nazwiemy portfelem replikującym instrument finansowy **b**. Czytelnik może łatwo sprawdzić, że dla rynku opisanego w przykładzie 1 portfelem replikującym dla instrumentu $\begin{bmatrix} 61 \\ 52 \\ 45 \end{bmatrix}$ jest portfel $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1/4 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Fakt 1. Zbyteczne papiery wartościowe nie wnoszą nic nowego do rynku finansowego, ponieważ ich wartości we wszystkich stanach rynku dają się odtworzyć = zreplikować przez pewien portfel złożony z bazowych papierów wartościowych.

Fakt 2. Praktyczne znaczenie liniowo niezależnych instrumentów finansowych od wszystkich płynnych (bazowych) papierów wartościowych polega na tym że wnoszą one na rynek wypłaty dla ich posiadaczy, które do tej pory nie były do osiągnięcia na danym rynku finansowym.

Wróćmy na moment do macierzy A = $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{bmatrix}$ przedstawiającej rynek finansowy. Oznaczmy pierwszą kolumnę macierzy A (pierwszy bazowy papier wartościowy) przez $A_{\bullet 1}$, drugą kolumnę (drugi bazowy papier wartościowy) przez $A_{\bullet 2}$ itd. Wreszcie ostatnią n-tą kolumnę A (ostatni bazowy instrument finansowy) przez $A_{\bullet n}$. Mamy zatem:

$$A_{\bullet 1} = \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ \dots \\ A_{m1} \end{bmatrix},\ A_{\bullet 2} = \begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \\ \dots \\ A_{m2} \end{bmatrix}, \dots,\ A_{\bullet n} = \begin{bmatrix} A_{1n} \\ A_{2n} \\ \dots \\ A_{mn} \end{bmatrix} \tag{7}$$

Definicja 3. Przez rynkową podprzestrzeń Span ($A_{\bullet 1}, A_{\bullet 2}, \dots, A_{\bullet n}$) rozumiemy zbiór wszystkich zbytecznych papierów wartościowych, to jest takich, które są liniowymi kombinacjami płynnych instrumentów finansowych $A_{\bullet 1}, A_{\bullet 2}, \dots, A_{\bullet n}$, a więc są postaci:

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ \dots \\ A_{m1} \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \\ \dots \\ A_{m2} \end{bmatrix} + \dots + \ \lambda_n \begin{bmatrix} A_{1n} \\ A_{2n} \\ \dots \\ A_{mn} \end{bmatrix}, \tag{8}$$

gdzie $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ są dowolnymi liczbami(współczynnikami) rzeczywistymi, również ujemnymi oznaczającymi krótką sprzedaż. Ponieważ takich współczynników jest nieskończenie wiele, każda rynkowa podprzestrzeń Span($A_{\bullet 1}$, $A_{\bullet 2}, \dots, A_{\bullet n}$) zawiera nieskończenie wiele papierów wartościowych.

Definicja 4. Instrumentem finansowym *Arrowa-Debreu* dla stanu „j" rynku finansowego (oznaczanym w dalszej części przez e_j) nazywamy taki papier wartościowy który płaci 1 w stanie „j" oraz 0 w pozostałych stanach rynku. Wypisując te instrumenty w postaci kolumn otrzymamy wektory [e_1 e_2 … e_m] czyli macierz jednostkową $J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$.

Fakt 3. Niech A będzie macierzą reprezentującą rynek finansowy o m stanach. Jeżeli rz(A) = m, to każdy instrument finansowy (papier wartościowy) jest zbyteczny.

Dowód. Załóżmy nie wprost, że $\mathbf{b} \in R^m$ jest instrumentem finansowym (wektorem-kolumną), który nie jest zbyteczny, a więc nie da się zapisać jako liniowa kombinacja m liniowo niezależnych kolumn macierzy A. Dowód będzie zakończony, jeśli pokażemy, że z tego założenia wynika sprzeczność. Aby ją uzyskać, dopiszmy **b** do m liniowo niezależnych kolumn macierzy A jako (m + 1)-ą kolumnę. Powstanie wtedy nowa macierz B typu $m \times (m + 1)$, w której występuje $m + 1$ liniowo niezależnych kolumn, co oznacza, że rz(B) = $m + 1$. W tym momencie jednak otrzymaliśmy sprzeczność, która kończy dowód metodą nie wprost.

Z algebry liniowej wiadomo, że jeśli macierz kwadratowa B stopnia m ma pełny rząd, to równanie macierzowo-wektorowe:

$$\mathrm{Bx} = \mathbf{b} \in R^m, \text{ czyli } \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix} \tag{9}$$

ma zawsze (to znaczy dla dowolnego **b**) rozwiązanie, co oznacza że istnieje portfel $\mathbf{x} \in R^m$, który replikuje instrument finansowy **b**. Co więcej,

$$x = B^{-1}b. \tag{10}$$

Mówimy wtedy, że portfel **x** replikuje instrument **b** jeśli odtwarza te same płatności które wynikają z posiadania **b**. Dodajmy, że płatności, które wynikają z tytułu posiadania portfela **x** są równe $(\mathrm{Bx})_i$ w stanie „i" rynku finansowego, a więc powinniśmy mieć $(\mathrm{Bx})_i = b_i$. W takim przypadku możemy powiedzieć, że **x** replikuje **b** w 100%.

Przypominając sobie definicję 1 (dotyczącą pojęcia zbytecznego papieru wartościowego), możemy powiedzieć, że instrument finansowy **b** jest zbyteczny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje portfel **x** składający się z płynnych bazowych papierów wartościowych, który go replikuje.

Rynki finansowe zupełne

Definicja 5. Jeśli każdy instrument finansowy da się zreplikować na rynku finansowym F (przy użyciu płynnych papierów wartościowych dostępnych na F), to F nazwiemy rynkiem zupełnym.

Przykład 2. Czy możliwy jest *hedging* doskonały dla instrumentu finansowego $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ na rynku finansowym reprezentowanym przez macierz $B = \begin{bmatrix} 10 & 100 & 0 \\ 7 & 100 & 2 \\ 5 & 100 & 4 \end{bmatrix}$, gdzie obraca się tylko trzema różnymi instrumentami finansowymi (akcja, bon, opcja sprzedaży akcji po 9 zł) opisanymi w przykładzie 1? Czy ten rynek finansowy jest zupełny?

Rozwiązanie. Poszukujemy portfela replikującego $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ dla instrumentu $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$. Ponieważ $\det(B) = \det \begin{bmatrix} 10 & 100 & 0 \\ 7 & 100 & 2 \\ 5 & 100 & 4 \end{bmatrix} = 200 \neq 0$, to równanie $\begin{bmatrix} 10 & 100 & 0 \\ 7 & 100 & 2 \\ 5 & 100 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ ma 1 rozwiązanie nie tylko dla instrumentu $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$, ale i dla każdego innego instrumentu $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$, co oznacza że ten rynek jest zupełny. Skoro tak, to odpowiedź na pytanie pierwsze musi być też pozytywna. Co więcej, można podać konkretny portfel **x**, który replikuje instrument b, rozwiązując równanie $x = B^{-1}b$. Otrzymujemy:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -0{,}09 & 0{,}2 & -0{,}1 \\ 1 & -2{,}5 & 1{,}5 \end{bmatrix}, \text{ a więc } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -0{,}09 & 0{,}2 & -0{,}1 \\ 1 & -2{,}5 & 1{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -0{,}31 \\ 5 \end{bmatrix},$$

co interpretujemy (odwołując się do przykładu 1), że portfel replikujący składa się z kupna 3 akcji, krótkiej sprzedaży 0,31 bonu oraz z kupna 5 opcji sprzedaży 1 akcji po 9 zł.

Komentarz 1. Zwróćmy uwagę na to że instrument finansowy $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ jest atrakcyjny w przypadku bessy, która ma miejsce z prawdopodobieństwem 1/6 na rynku finansowym $B = \begin{bmatrix} 10 & 100 & 0 \\ 7 & 100 & 2 \\ 5 & 100 & 4 \end{bmatrix}$. Mianowicie, wtedy gdy cena akcji osiąga najmniejszą wartość (5 zł), znaleziony przez nas portfel $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ -0{,}31 \\ 5 \end{bmatrix}$ wypłaca najwięcej (5 zł) rekompensując spadek cen akcji do 5 zł. Dzięki portfelowi **x** otrzymujemy więc w czasie bessy 10 zł, czego pozostali gracze mogą nam tylko pozazdrościć**.** Natomiast kiedy na rynku finansowym panuje hossa (z prawdopodobieństwem 1/3), nasz portfel uszczupla nam dochody z akcji zaledwie o 1 zł (z 10 zł do 9 zł).

Każda firma jest (powinna być) zainteresowana kupnem takiego instrumentu finansowego, który płaci dużo pieniędzy, kiedy wartości akcji tej firmy spadają, zaś w przypadku hossy uszczupla nam nieznacznie zyski, które osiągamy ze znacznego wzrostu cen akcji.

Doszliśmy w ten sposób do miejsca, gdy należy spytać o ceny płynnych papierów wartościowych oraz wynikającą z tych cen wycenę bardzo pożądanego przez firmę instrumentu finansowego **b**. O tych ważnych sprawach powiemy precyzyjnie w kolejnym artykule.

Przykład 3. Przyjmijmy, że cena akcji wynosi 6 zł, cena bonu 95 zł, zaś opcja sprzedaży akcji po 9 zł kosztuje 1,60 zł; na powyższe ceny mają wpływ prawdopodobieństwa wszystkich 3 stanów rynku. W takiej sytuacji instrument finansowy $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ powinien kosztować tyle samo, bądź jedynie minimalnie więcej (z uwagi na marżę sprzedającego) niż portfel go replikujący, ponieważ inżynier finansowy (wystawca instrumentu **b** i jednocześnie właściciel portfela replikującego **x**) nic w takiej sytuacji (doskonałego *hedgingu*) nie ryzykuje. Jaka może być w takim razie cena portfela **x**? Otóż, wynosi ona

$$\text{cena}(\mathbf{x}) = \text{cena}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 3 \times 6 \text{ zł} + -0{,}31 \times 95 \text{ zł} + 5 \times 1{,}60 \text{ zł} = -3{,}45 \text{ zł}$$

co oznacza, iż „kupno" instrumentu **b** generuje dla nas niewielki przypływ gotówki (ze względu na krótką sprzedaż) lub nic nie kosztuje, jeśli uwzględnimy prowizję. Jest to sytuacja niebywała (nienormalna) na rynku finansowym, która (jak zobaczymy w kolejnym artykule) spowoduje możliwość arbitrażu.

Przykład 4. Czy możliwy jest *hedging* doskonały dla instrumentu finansowego

$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ na rynku finansowym reprezentowanym przez macierz $A = \begin{bmatrix} 10 & 100 & 0 & 4 \\ 7 & 100 & 2 & 1 \\ 5 & 100 & 4 & 0 \end{bmatrix}$.

Czy ten rynek finansowy jest zupełny?

Rozwiązanie. Odpowiedź na oba pytania jest pozytywna, ponieważ dla każdego instrumentu finansowego **b** *hedging* doskonały jest możliwy nawet na mniejszym rynku niż **M**, jakim jest rynek **N** reprezentowany przez $B = \begin{bmatrix} 10 & 100 & 0 \\ 7 & 100 & 2 \\ 5 & 100 & 4 \end{bmatrix}$ z 3 płynnymi papierami wartościowymi, gdzie portfelem replikującym dla $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ okazał się $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -0{,}31 \\ 5 \end{bmatrix}$.

Zwróćmy uwagę, że na rynku **M** możemy wyodrębnić jeszcze inny niż **N** mniejszy rynek **K** reprezentowany przez macierz $C = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 4 \\ 100 & 2 & 1 \\ 100 & 4 & 0 \end{bmatrix}$, a następnie rozwiązać równanie C**y** = **b**. Jest to wykonalne ponieważ det(C) = 400 ≠ 0, a zatem wzór $\mathbf{y} = C^{-1}b = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 4 \\ 100 & 2 & 1 \\ 100 & 4 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ podaje dokładnie współrzędne portfela replikującego dowolny instrument finansowy $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$. Przyjmując w szczególności że $b = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$, otrzymujemy że:

$$\mathbf{y} = C^{-1}b = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 4 \\ 100 & 2 & 1 \\ 100 & 4 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}01 & 0{,}04 & -0{,}02 \\ 0{,}25 & -1 & 0{,}75 \\ 0{,}50 & -1 & 0{,}50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}07 \\ 2{,}75 \\ 1{,}50 \end{bmatrix}.$$

Oznacza to, że na rynku **M** można znaleźć jeszcze inny portfel replikujący instrument finan- sowy $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$, a mianowicie $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0{,}07 \\ 2{,}75 \\ 1{,}50 \end{bmatrix}$ obok wcześniej znalezionego portfela $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ -0{,}31 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Podsumowanie

Wiemy już, że rynek niezupełny to taki rynek, na którym nie każdy instrument finansowy da się zreplikować, a więc istnieje co najmniej jeden instrument finansowy, który nie jest zbyteczny. Łatwo pokazać, że jeśli można wskazać przynajmniej jeden instrument, który nie jest zbyteczny na rozpatrywanym rynku finansowym, oznaczmy go przez $\mathrm{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$, to takich instrumentów musi być nieskończenie wiele (dlaczego?). Praktyczne znaczenie niezależnych instrumentów polega na tym, że wnoszą one na rynek wypłaty, które do tej pory nie były możliwe na nim do uzyskania.

Emitując instrument $\mathrm{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$ zamówiony przez klienta (KGHM, Orlen), który nie da się odtworzyć (zreplikować), inżynier finansowy stara się znaleźć najlepszy aproksymacyjny *hedging*, to znaczy taki portfel $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ składający się z bazowych papierów wartościowych, który odtwarza szczególny instrument finansowy $\mathrm{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$ w możliwie „najlepszy sposób". Pierwszy sposób rozumienia tego terminu polega na tym aby tak zwany *błąd replikacyjny* był „najmniejszy" z możliwych. Błędem replikacyjnym jest wektor różnic

$$\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m) = \text{Ax-b}$$

pomiędzy współrzędnymi nie do końca udanej repliki

$\text{Ax} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$, a współrzędnymi szczególnego instrumentu finansowego $\text{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$. Minimalizacja błędu replikacyjnego polegać będzie na minimalizowaniu sumy kwadratów błędów „po współrzędnych" (*sum of squared replication errors*), w skrócie SSRE, którego ścisłą definicję podaje wzór:

$$\text{SSRE} = \varepsilon_1{}^2 + \varepsilon_2{}^2 + \dots + \varepsilon_m{}^2 = [(Ax)_1 - b_1]^2 + [(Ax)_2 - b_2]^2 + \dots + [(Ax)_m - b_m]^2, \quad (10)$$

gdzie $(\text{Ax})_i$ oznacza "i"-tą współrzędną wektora Ax, zaś b_i jest "i"-tą współrzędną wektora b.

Oznaczając przez $A_{1\bullet}$ pierwszy wiersz macierzy A, przez $A_{2\bullet}$ drugi wiersz macierzy A itd. Wreszcie przez $A_{m\bullet}$ ostatni m-ty wiersz macierzy A, możemy SSRE zapisać również w innej następującej postaci:

$$\text{SSRE} = [A_{1\bullet}x - b_1]^2 + [A_{2\bullet}x - b_2]^2 + \dots + [A_{m\bullet}x - b_m]^2 \quad (11)$$

biorąc pod uwagę definicję mnożenia macierzy A przez wektor **x**. Drugi sposób polega na tym aby minimalizować oczekiwaną sumę kwadratów błędów replikacyjnych (*expected sum of squared replication errors*) daną wzorem:

$$\begin{aligned} \text{SSRE} &= p_1\varepsilon_1{}^2 + p_2\varepsilon_2{}^2 + \dots + p_m\varepsilon_m{}^2 = \\ &= p_1[(Ax)_1 - b_1]^2 + p_2[(Ax)_2 - b_2]^2 + \dots + p_m[(Ax)_m - b_m]^2, \end{aligned} \quad (12)$$

gdzie pod uwagę bierze się prawdopodobieństwa p_1 wystąpienia stanu „i" rynku finansowego. Innymi słowy, jest to suma ważona kwadratów błędów replikacyjnych. Gdy rynek jest zupełny, to każdy instrument finansowy jest zbyteczny, a zatem dla każdego szczególnego instrumentu finansowego SSRE = 0 = ESSRE. Tymi zagadnieniami zajmiemy się w kolejnym artykule.

Bibliografia

Bodie Z., Kane A., Marcus A. (2014), *Essentials of Investments*, McGraw-Hill, London.

Cerny A. (2009), *Mathematical Techniques In Finance*, Princeton University Press, Princeton.

Grinblatt M., Titman S. (2011), *Financial Markets and Corporate Strategy*, McGraw-Hill, London.

Luenberger D. (2004), *Teoria Inwestycji Finansowych*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Financial Engineering in the Complete Markets

Summary

An aim of considerations is to show that the linear algebra lectured at all technical universities and in the majority of economic schools, offers very adequate tools for presentation of the most important notions in the field of financial engineering. It provides the opportunity to clearly explain in what the basic research problems in financial engineering consist as well as shows the ways of resolution thereof. The matter is here, first of all, with safeguarding by companies and, generally speaking, investors against the risk in capital markets by way of formation of synthetic instruments replicating the desired (absent in the capital market) securities. It is extremely important for big firms such as e.g. companies from WIG 30, in which incompetent hedging against the risk of fall in prices of commodities (e.g. copper) or, what's worse, lack of hedge leads to great losses (KGHM).

Key words: hedging, base financial instruments, Arrow-Debreu instruments, replicating portfolio, complete financial market.

JEL codes: C02, C18, C54, C60

Artykuł nadesłany do redakcji we wrześniu 2015 roku.

Afiliacja:
dr hab. Leszek S. Zaremba, prof. AFiBV
Akademia Finansów i Biznesu Vistula
Wydział Biznesu i Stosunków Międzynarodowych
ul. Stokłosy 3
02-787 Warszawa
tel.: 22 457 23 00
e-mail: l.zaremba@vistula.edu.pl