

Arkadiusz Orzechowski

Szkoła Główna Handlowa w Warszawie

CZY MOŻNA WYCENIĆ OPCJE EUROPEJSKIE LEPIEJ NIŻ W MODELU P. CARRA I D. MADANA? PRZEGLĄD MODELI OPARTYCH NA TRANSFORMACIE FOURIERA

Wprowadzenie

Opcje są instrumentami finansowymi, których wartość teoretyczna kształtowana jest przez wielkości rynkowe, do których najczęściej zalicza się cenę waluoru, na który opiewa opcja, zmienność stóp zwrotu z aktywów bazowych, okres pozostający do wykupu oraz stopę zwrotu wolną od ryzyka. Warto zwrócić uwagę na to, że zestaw determinant wartości modelowych rozpatrywanego rodzaju instrumentów może być rozszerzony o dodatkowe zmienne w zależności od przyjętych uproszczeń. Bez względu jednak na sformułowane założenia jednym z najważniejszych narzędzi matematycznych powszechnie obecnie wykorzystywanych w procesie wyceny jest transformata Fouriera.

Celem niniejszego artykułu jest przegląd alternatywnych w stosunku do P. Carra i D. Madana koncepcji wyceny opcji bazujących na transformacie Fouriera.

1. Wstępne badania nad wyceną opcji przy wykorzystaniu transformaty Fouriera

Prekursorami badań nad wyceną opcji za pomocą transformaty Fouriera są G. Bakshi i D. Madan¹. Zaproponowane przez nich podejście (określane dalej jako BS-FTBM) ma charakter wieloetapowy. Na początku, dokonywana jest następują-

¹ G. Bakshi, D. Madan: *Spanning and Derivative – Security Valuation*. „Journal of Financial Economics” 2000, Vol. 55.

ca zamiana zmiennych: $s_T = \ln S_T$ oraz $k = \ln K$ we wzorze na cenę teoretyczną opcji kupna² w modelu F. Blacka i M. Scholesa (określanego dalej jako BS), tj.

$$C(S_t, t) = e^{-r(T-t)} \int_K^\infty (S_T - K) \tilde{q}(S_T) dS_T \quad (1)$$

gdzie:

$C(S_t, t)$ – cena teoretyczna opcji kupna w okresie t przy założeniu, że wartość rynkowa instrumentu bazowego wynosi S_t ,

$\tilde{q}(S_T)$ – funkcja gęstości prawdopodobieństwa zmiennej S_T ,

S_T – bieżąca cena instrumentu bazowego w okresie T ,

K – cena rozliczeniowa kontraktu opcyjnego,

r – stopa zwrotu wolna od ryzyka.

Następnie, wzór (1), który dla $t = 0$ przyjmuje poniższą postać

$$C(S_0, 0) = e^{-rT} \int_k^\infty (e^{s_T} - e^k) \tilde{q}(s_T) ds_T \quad (2)$$

rozbijany jest na dwie całki, tj.

$$C(S_0, 0) = e^{-rT} \int_k^\infty e^{s_T} \tilde{q}(s_T) ds_T - e^{-rT} \int_k^\infty e^k \tilde{q}(s_T) ds_T = I_1 - I_2 \quad (3)$$

W ramach zaproponowanego podejścia zarówno dla odjemnej (I_1), jak i odjemnika (I_2) wyznaczane są transformaty Fouriera, z których pierwsza przebiera następującą formę

$$\Psi_T^1(\xi) = \int_{-\infty}^\infty e^{i\xi k} \left[e^{-rT} \frac{\int_k^\infty e^{s_T} \tilde{q}(s_T) ds_T}{\int_k^\infty e^{s_T} \tilde{q}(s_T) ds_T} \int_k^\infty e^{s_T} \tilde{q}(s_T) ds_T \right] dk \quad (4)$$

Warto zauważyć, że $\int_k^\infty e^{s_T} \tilde{q}(s_T) ds_T$ może być traktowana zarówno jako funkcja charakterystyczna $\tilde{q}(s_T)$ przy $\xi = -i$, tj. $\phi(-i)$, jak i wartość oczekiwana zmiennej S_T , która wynosi $S_0 e^{rT}$. Pozwala to przekształcić wzór (4) do postaci

$$\Psi_T^1(\xi) = \frac{S_0 \phi(\xi - i)}{i \xi \phi(-i)} \quad (5)$$

² Analogiczne działania można podjąć w celu określenia wartości modelowej opcji sprzedaży.

Dowód

$$\begin{aligned}
\Psi_T^1(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi k} \left[e^{-rT} \frac{\int_k^{\infty} e^{sT} \tilde{q}(s_T) ds_T}{\phi(-i)} S_0 e^{rT} \right] dk = \\
&= S_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi k} \left[\frac{\int_k^{\infty} e^{sT} \tilde{q}(s_T) ds_T}{\phi(-i)} \right] dk = \\
&= \frac{S_0}{\phi(-i)} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{q}(s_T) \left[\int_{-\infty}^{sT} e^{i\xi k} e^{sT} dk \right] ds_T = \\
&= \frac{S_0}{\phi(-i)} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{q}(s_T) \left[\frac{e^{i\xi k + sT}}{i\xi} \right]_{-\infty}^{sT} ds_T = \\
&= \frac{S_0}{\phi(-i)} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{q}(s_T) \left[\frac{e^{sT(1+i\xi)}}{i\xi} \right] ds_T = \frac{S_0 \phi(\xi - i)}{i\xi \phi(-i)} \quad (6)
\end{aligned}$$

Analogiczne działania podejmowane w odniesieniu do odjemnika pozwalają wyznaczyć $\Psi_T^2(\xi)$, tj.

$$\Psi_T^2(\xi) = Ke^{-rT} \frac{\phi(\xi)}{i\xi} \quad (7)$$

Dowód

$$\begin{aligned}
\Psi_T^2(\xi) &= K \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi k} \left[e^{-rT} \int_k^{\infty} \tilde{q}(s_T) ds_T \right] dk = \\
&= Ke^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{q}(s_T) \left[\int_{-\infty}^{sT} e^{i\xi k} dk \right] ds_T = Ke^{-rT} \frac{\phi(\xi)}{i\xi} \\
&= Ke^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{q}(s_T) \left[\frac{e^{i\xi k}}{i\xi} \right]_{-\infty}^{sT} ds_T = Ke^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{q}(s_T) \frac{e^{i\xi sT}}{i\xi} ds_T = \\
&= Ke^{-rT} \frac{\phi(\xi)}{i\xi} \quad (8)
\end{aligned}$$

Ostatecznie, przeprowadzana jest procedura obliczania odwrotnych transformacji Fouriera w celu wyznaczenia wartości teoretycznej będących przedmiotem zainteresowania kontraktów, tj.

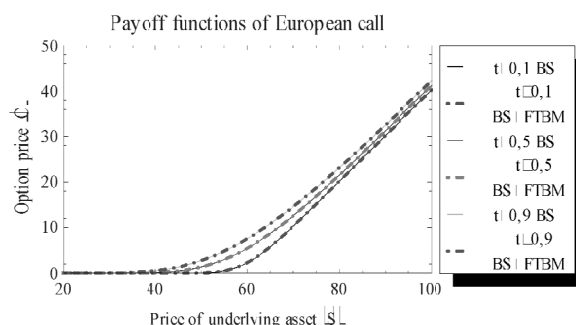
$$\begin{aligned}
C(S_0, 0) &= \frac{1}{2} (S_0 - Ke^{-rT}) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_0 \operatorname{Re} \left[\frac{e^{-i\xi k} \phi(\xi - i)}{i\xi \phi(-i)} \right] d\xi \\
&\quad - Ke^{-rT} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \left[\frac{e^{-i\xi k} \phi(\xi)}{i\xi} \right] d\xi \quad (9)
\end{aligned}$$

Dowód

$$\begin{aligned}
C(S_0, 0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi k} \left[\frac{S_0 \phi(\xi - i)}{i\xi \phi(-i)} - Ke^{-rT} \frac{\phi(\xi)}{i\xi} \right] d\xi = \\
&= \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \left[\frac{e^{-i\xi k} \phi(\xi - i)}{i\xi \phi(-i)} \right] d\xi \right] - Ke^{-rT} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \left[\frac{e^{-i\xi k} \phi(\xi)}{i\xi} \right] d\xi \right] = \\
&= \frac{1}{2} (S_0 - Ke^{-rT}) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_0 \operatorname{Re} \left[\frac{e^{-i\xi k} \phi(\xi - i)}{i\xi \phi(-i)} \right] d\xi \\
&\quad - Ke^{-rT} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \left[\frac{e^{-i\xi k} \phi(\xi)}{i\xi} \right] d\xi \quad (10)
\end{aligned}$$

Jak zauważają m.in. D. Duffie, J. Pan, K. Singleton, wzór (9) można zmodyfikować w taki sposób, aby przy obliczaniu wartości teoretycznej opcji wykorzystywać część urojonej liczby zespolonej³.

Stosunkowo łatwo zauważyć, iż formuły (1) i (10) generują niemal identyczne wyniki przy jednakowych danych wejściowych. Potwierdza to rys. 1 pokazujący zbliżony przebieg funkcji wypłat europejskich opcji kupna w modelach BS i BS-FTBM. Warto zauważyć, iż ceny opcji w obu przypadkach obliczane są przy założeniu, że cena rozliczenia wynosi 60, zmienność kursów aktywów bazowych równa się 0,29 zaś stopa zwrotu wolna od ryzyka kształtuje się na poziomie 4%.



Rys. 1. Funkcje wypłat europejskich opcji kupna w modelach BS i BS-FTBM

Niewielkie rozbieżności pojawiające się na skutek wykorzystania odmiennych metod wyceny są rezultatem numerycznego całkowania w modelu G. Bakshi'ego i D. Madana.

Odmienny sposób wyznaczania wartości teoretycznej kontraktów bazujących na prawach pochodnych proponują m.in. P. Carr i D. Madan⁴ (model określany dalej jako BS-FTCM). Pomimo że opracowana przez nich metodologia zbliżona jest częściowo z podejściem G. Bakshi'ego i D. Madana, to obu koncepcji nie można uznać za identyczne. Pogląd taki znajduje potwierdzenie m.in. w zaproponowanej przez P. Carra i D. Madana modyfikacji ceny opcji kupna do następującej postaci

$$C_k^{mod}(T) = e^{\alpha k} C_k(T) \quad (11)$$

³ D. Duffie, J. Pan, K. Singleton: *Transform Analysis and Asset Pricing for Jump-Diffusions*. „Econometrica” 2000, Vol. 68, No. 6.

⁴ P. Carr, D. Madan: *Option Valuation Using the Fast Fourier Transform*. „Journal of Computational Finance” 1999, Vol. 2, No. 4.

gdzie:

$C_k^{mod}(T)$ – zmodyfikowana cena opcji kupna w okresie T ,

$C_k(T)$ – cena opcji kupna w okresie T ,

k – logarytm naturalny ceny rozliczeniowej opcji,

α – stała większa niż lub równa 0,05.

W dalszych etapach podejmowanych działań $C_k^{mod}(T)$ przekształcana jest zgodnie ze wzorami (12)-(15)⁵

$$\Psi_t(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi k} C_k^{mod}(T) dk \quad (12)$$

$$C_k^{mod}(T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi k} \Psi_T(\xi) d\xi \quad (13)$$

$$\Rightarrow e^{\alpha k} C_k(T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi k} \Psi_T(\xi) d\xi \quad (14)$$

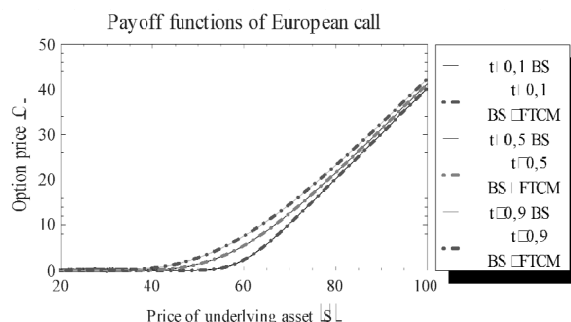
$$\begin{aligned} \Rightarrow C_k(T) &= \frac{e^{-\alpha k}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi k} \Psi_T(\xi) d\xi = \\ &= \frac{e^{-\alpha k}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi k} \frac{e^{-rT} \phi_T(\xi - (\alpha+1)i)}{\alpha^2 + \alpha - \xi^2 + i(2\alpha+1)\xi} d\xi \end{aligned} \quad (15)$$

Zgodność formuł wynikających z zastosowania transformacji Fouriera (BS-FTCM) z podejściem BS potwierdza rys. 2. Warto zauważyć, iż w rozpatrywanym przypadku analizowana jest opcja kupna typu europejskiego dla danych wejściowych identycznych jak w przypadku porównania podejść BS z BS-FTBM.

Na podstawie wygenerowanych funkcji wypłat można stwierdzić, że wycena opcji w modelach BS i BS-FTCM jest do siebie zbliżona. Podobnie jak poprzednio ewentualne rozbieżności są rezultatem procedury numerycznego całkowania wykorzystywanej do obliczenia wartości teoretycznej analizowanych kontraktów zgodnie ze wzorem (15).

⁵ U. Cherubini, G.D. Lunga, S. Mulinacci, P. Rossi: *Fourier Transform Methods in Finance*. John Wiley & Sons, Chichester 2010, s. 120-122.

⁶ Ze względu na to, że dowód potwierdzający słuszność otrzymanego wyniku został przedstawiony m.in. w artykule mającym się ukazać w grudniowym wydaniu „Journal of Management and Financial Sciences”, w niniejszym opracowaniu jest on pomijany.



Rys. 2. Funkcje wypłat europejskich opcji kupna w modelach BS i BS-FTCM

2. Model M. Attari'ego

Metodologię wyceny opcji opracowaną przez G. Bakshi'ego i D. Madana modyfikuje m.in. M. Attari⁷ (metoda określana dalej jako BS-FTAttari). Punktem wyjścia zaproponowanego podejścia jest uogólnienie procesu generującego ceny instrumentu podstawowego, tj.

$$S_T = S_t e^{r(T-t) + x(t,T)} \quad (16)$$

gdzie:

$x(t, T)$ – losowy „szok cenowy” aktywów bazowych.

S_T, S_t – ceny instrumentu podstawowego w okresach odpowiednio T i t .

Nie sposób pominąć faktu, iż wzór (16) opisuje zarówno geometryczny ruch Browna zgodny z formułą (17)

$$S_T = S_0 e^{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma W_T} \quad (17)$$

gdzie:

S_0 – cena instrumentu udziałowego w okresie $t = 0$,

r – stopa zwrotu wolna od ryzyka,

σ – odchylenie standardowe ceny instrumentu bazowego,

W_t – proces Wienera,

jak również procesy o zmienności stochastycznej oraz uwzględniające skoki notowań instrumentów podstawowych.

⁷ M. Attari: *Option Pricing Using Fourier Transform: A Numerically Efficient Simplification*. http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=520042 (20.09.2013).

Wiedząc, że: $\ln S_T \sim \mathcal{N}\left(\ln S_t + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t), \sigma\sqrt{(T-t)}\right)$ dokonując prostych przekształceń, stosunkowo łatwo jest wyznaczyć rozkład zmiennej $x(t, T)$, tj.

$$x(t, T) = \ln S_T - \ln S_t - r(T-t) \sim \mathcal{N}\left(-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t), \sigma\sqrt{(T-t)}\right) \quad (18)$$

Dostrzeżenie tej prawidłowości ma istotne znaczenie dla wyznaczenia wartości teoretycznej kontraktów opartych na prawach pochodnych.

Wykorzystanie formuły (16) do wyceny opcji poprzez obliczenie wartości oczekiwanej przyszłych wypłat zdyskontowanych według stopy zwrotu wolnej od ryzyka względem miary \tilde{q} narzuca konieczność uznania słuszności wzoru (19)

$$C(S_t, t) = S_t \pi_1 - e^{-r(T-t)} K \pi_2 \quad (19)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \int_l^\infty e^{x(t, T)} \tilde{q}(x(t, T)) dx(t, T) \\ \pi_2 &= \int_l^\infty \tilde{q}(x(t, T)) dx(t, T) \end{aligned}$$

Dowód

$$\begin{aligned} C(S_t, t) &= e^{-r(T-t)} E^{\tilde{q}}((S_T - K)^+) = \\ &= e^{-r(T-t)} E^{\tilde{q}}(S_T | S_T \geq K) - e^{-r(T-t)} E^{\tilde{q}}(K | S_T \geq K) \\ &= e^{-r(T-t)} E^{\tilde{q}}\left(S_t e^{r(T-t)+x(t, T)} \mid S_t e^{r(T-t)+x(t, T)} \geq K\right) \\ &\quad - e^{-r(T-t)} E^{\tilde{q}}\left(K \mid S_t e^{r(T-t)+x(t, T)} \geq K\right) \\ &= S_t E^{\tilde{q}}\left(e^{x(t, T)} \mid x(t, T) \geq \ln\left(\frac{K}{S_t e^{r(T-t)}}\right)\right) - e^{-r(T-t)} E^{\tilde{q}}\left(K \mid x(t, T) \geq \ln\left(\frac{K}{S_t e^{r(T-t)}}\right)\right) \\ &= S_t \int_{\ln\left(\frac{K}{S_t e^{r(T-t)}}\right)}^\infty e^{x(t, T)} \tilde{q}(x(t, T)) dx(t, T) - \\ &\quad e^{-r(T-t)} K \int_{\ln\left(\frac{K}{S_t e^{r(T-t)}}\right)}^\infty \tilde{q}(x(t, T)) dx(t, T) \\ &= S_t \int_l^\infty e^{x(t, T)} \tilde{q}(x(t, T)) dx(t, T) - e^{-r(T-t)} K \int_l^\infty \tilde{q}(x(t, T)) dx(t, T) \\ &= S_t \pi_1 - e^{-r(T-t)} K \pi_2 \quad (20) \end{aligned}$$

Ze względu na to, że: $0 \leq \int_l^\infty e^{x(t, T)} \tilde{q}(x(t, T)) dx(t, T) \leq 1$, π_1 , podobnie jak π_2 , może być traktowana jak funkcja gęstości prawdopodobieństwa. Powoduje to, że działania mające na celu wycenę opcji można ograniczyć do wyznaczenia funkcji charakterystycznych $e^{x(t, T)} \tilde{q}(x(t, T))$ oraz $\tilde{q}(x(t, T))$, tj.

$$\begin{aligned}\phi_1(\xi) &= \mathcal{F}\left(e^{x(t,T)}\tilde{q}(x(t,T))\right)(\xi) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x(t,T)} e^{x(t,T)}\tilde{q}(x(t,T))dx(t,T)\end{aligned}\quad (21)$$

$$\phi_2(\xi) = \mathcal{F}\left(\tilde{q}(x(t,T))\right)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x(t,T)}\tilde{q}(x(t,T))dx(t,T) \quad (22)$$

oraz wykorzystania wzorów (21) i (22) do obliczenia $e^{x(t,T)}\tilde{q}(x(t,T))$ i $e^{x(t,T)}\tilde{q}(x(t,T))$, tj.

$$e^{x(t,T)}\tilde{q}(x(t,T)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x(t,T)}\phi_1(\xi)d\xi \quad (23)$$

$$\tilde{q}(x(t,T)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x(t,T)}\phi_2(\xi)d\xi \quad (24)$$

Postępowanie zgodnie z tak określoną procedurą pozwala wyznaczyć π_1 , tj.

$$\pi_1 = 1 + \frac{e^l}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_2(\xi) \left(\frac{e^{-i\xi l}}{i(\xi+i)}\right) d\xi \quad (25)$$

Dowód

$$\begin{aligned}\pi_1 &= \int_l^{\infty} e^{x(t,T)} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x(t,T)}\phi_2(\xi)d\xi\right) dx(t,T) = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_2(\xi) \left(\int_l^{\infty} e^{-i(\xi+i)x(t,T)} dx(t,T)\right) d\xi = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_2(\xi) \left(\int_l^{\infty} e^{-i(\xi+i)x(t,T)} dx(t,T)\right) d\xi + \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_2(\xi) \left(\int_l^{\infty} e^{-i(\xi+i)x(t,T)} dx(t,T)\right) d\xi = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_2(\xi) \left(\int_l^{\infty} e^{-i(\xi+i)x(t,T)} dx(t,T)\right) d\xi - \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_2(\xi) \left(\int_{-\infty}^l e^{-i(\xi+i)x(t,T)} dx(t,T)\right) d\xi = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_2(\xi) \frac{e^{-i(\xi+i)R} - e^{-i(\xi+i)l}}{i(\xi+i)} d\xi + \\ &= \frac{1}{4\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_2(\xi) \frac{e^{-i(\xi+i)l} - e^{-i(\xi+i)R}}{i(\xi+i)} d\xi = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_2(\xi) \frac{e^{-i(\xi+i)R}}{i(\xi+i)} d\xi + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_2(\xi) \frac{e^{-i(\xi+i)l}}{i(\xi+i)} d\xi + \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_2(\xi) \frac{e^{-i(\xi+i)l}}{i(\xi+i)} d\xi - \frac{1}{4\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_2(\xi) \frac{e^{i(\xi+i)R}}{i(\xi+i)} d\xi = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_2(\xi) \frac{e^{-i(\xi+i)l}}{i(\xi+i)} d\xi - \frac{1}{4\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_2(\xi) \frac{e^{i(\xi+i)R}}{i(\xi+i)} d\xi \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_2(\xi) \frac{e^{-i(\xi+i)R}}{i(\xi+i)} d\xi = \frac{1}{2} + I_1 - I_2 - I_3\end{aligned}\quad (26)$$

Warto zauważyć, że punkt osobliwy funkcji podcałkowej I_2 znajduje się poza obszarem całkowania (całkowanie po półokręgu). W konsekwencji

$$\begin{aligned}
I_3 &= -\frac{1}{4\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_2(\xi) \frac{e^{-i(\xi+i)R}}{i(\xi+i)} d\xi = \left| \begin{array}{l} u = -\xi \\ \xi = -u \end{array} \right| = \\
&= \frac{1}{4\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_2(-u) \frac{e^{i(u-i)R}}{-i(u-i)} du = \\
&= -\frac{1}{4\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_2(-u) \frac{e^{i(u-i)R}}{i(u-i)} du \quad (27)
\end{aligned}$$

Wiedząc, że punkt osobliwy funkcji podcałkowej I_3 znajduje się w $u = i$, zaś $\phi_2(-i) = 1$ można obliczyć całkę (27) przy wykorzystaniu twierdzenia Cauchy'ego, tj.

$$I_3 = 2\pi i \phi_2(-i) \left(\frac{e^{i(i-i)R}}{i} \right) = \frac{\phi_2(-i)}{2} = \frac{1}{2} \quad (28)$$

W rezultacie

$$\pi_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_2(\xi) \left(\frac{e^{-i(\xi+i)l}}{i(\xi+i)} \right) d\xi + \frac{1}{2} = 1 + \frac{e^l}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_2(\xi) \left(\frac{e^{-i\xi l}}{i(\xi+i)} \right) d\xi \quad (29)$$

Jednoczesne dostrzeżenie, że

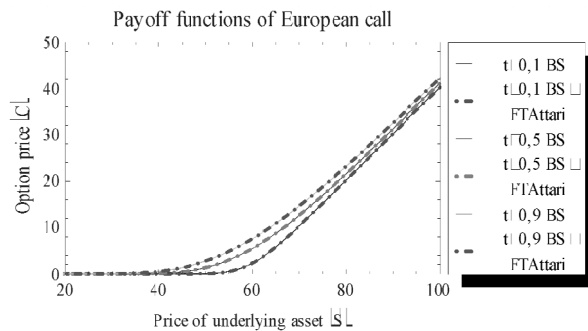
$$\pi_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_2(\xi) \left(\frac{e^{-i\xi l}}{i\xi} \right) d\xi \quad (30)$$

pozwała ostatecznie wyznaczyć wartość teoretyczną opcji kupna zgodnie z formułą (31)

$$\begin{aligned}
C(S_t, t) &= S_t \left(1 + \frac{e^l}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \phi_2(\xi) \left(\frac{e^{-i\xi l}}{i(\xi+i)} \right) d\xi \right) \\
&- e^{-r(T-t)} K \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \phi_2(\xi) \left(\frac{e^{-i\xi l}}{i\xi} \right) d\xi \right) \quad (31)
\end{aligned}$$

gdzie:

$$l = \frac{K}{S_t e^{r(T-t)}}$$



Rys. 3. Funkcje wypłat europejskich opcji kupna w modelach BS i BS-FTAttari

3. Model D.S. Batesa

Inny sposób wyceny opcji europejskich proponuje m.in. D.S. Bates⁸. Wykorzystane przez niego podejście (metoda określana dalej jako BS-FTBates) zakłada, iż wartość teoretyczna kontraktów opartych na prawach pochodnych określana jest przy pomocy zależności D. Breeden i R. Litzenbergera⁹. Dokładnie taki sam wynik możliwy jest jednak do uzyskania w alternatywny sposób. W tym celu wystarczy jedynie w niewielkim stopniu zmodyfikować koncepcję M. Attari'ego¹⁰.

Podobnie jak poprzednio działania zmierzające do wyceny kontraktów opcyjnych składają się z kilku etapów. Na początku, wzór (1) przekształcany jest do następującej postaci

$$C(S_0, 0) = S_0 - e^{-rT} K \int_{-\infty}^K \frac{S_T}{K} \tilde{q}(S_T) dS_T - e^{-rT} \int_K^{\infty} K \tilde{q}(S_T) dS_T \quad (32)$$

Dowód

$$\begin{aligned} C(S_0, 0) &= e^{-rT} \int_K^{\infty} (S_T - K) \tilde{q}(S_T) dS_T = \\ &= e^{-rT} \int_K^{\infty} S_T \tilde{q}(S_T) dS_T - e^{-rT} \int_K^{\infty} K \tilde{q}(S_T) dS_T = \\ &= e^{-rT} \left[\int_{-\infty}^{\infty} S_T \tilde{q}(S_T) dS_T - \int_{-\infty}^K S_T \tilde{q}(S_T) dS_T \right] - e^{-rT} \int_K^{\infty} K \tilde{q}(S_T) dS_T = \\ &= S_0 - e^{-rT} \int_{-\infty}^K S_T \tilde{q}(S_T) dS_T - e^{-rT} \int_K^{\infty} K \tilde{q}(S_T) dS_T = \\ &= S_0 - e^{-rT} K \int_{-\infty}^K \frac{S_T}{K} \tilde{q}(S_T) dS_T - e^{-rT} \int_K^{\infty} K \tilde{q}(S_T) dS_T \end{aligned} \quad (33)$$

Następnie, po dokonaniu zamiany zmiennych zgodnie ze schematem: $s_T = \ln S_T$ i $k = \ln K$ obliczana jest transformata Fouriera funkcji gęstości prawdopodobieństwa $\tilde{q}(s_T)$, tj. $\phi(\xi)$

$$\phi(\xi) = \mathcal{F}(\tilde{q}(s_T))(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi s_T} \tilde{q}(s_T) ds_T \quad (34)$$

Ostatecznie, wyznaczana jest odwrotna transformaty Fouriera w celu wygenerowania ceny teoretycznej opcji europejskiej, tj.

$$C(S_0, 0) = S_0 - e^{-rT} K \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \frac{e^{-i\xi k}}{i\xi(1-i\xi)} \phi(\xi) d\xi \right] \quad (35)$$

⁸ D.S. Bates: *Maximum Likelihood Estimation of Latent Affine Processes*. „Review of Financial Studies” 2006, Vol. 19.

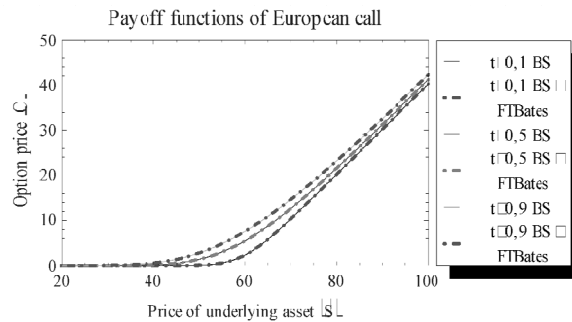
⁹ R. Breeden, R. Litzenberger: *Prices of State – Contingent Claims Implicit In Option Prices*. „Journal of Business” 1978, Vol. 51.

¹⁰ M. Attari: Op. cit.

Dowód

$$\begin{aligned}
C(S_0, 0) &= S_0 - e^{-rT} K \int_{-\infty}^k e^{s_T - k} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi s_T} \phi(\xi) d\xi ds_T - \\
&\quad e^{-rT} K \int_k^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi s_T} \phi(\xi) d\xi ds_T = \\
&= S_0 - e^{-rT} K \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k} \int_{-\infty}^k e^{s_T(1-i\xi)} \phi(\xi) ds_T d\xi - \\
&\quad e^{-rT} K \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_k^{\infty} e^{-i\xi s_T} \phi(\xi) ds_T d\xi = \\
&= S_0 - e^{-rT} K \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k} \left[\frac{e^{s_T(1-i\xi)}}{1-i\xi} \right]_{-\infty}^k \phi(\xi) d\xi - \\
&\quad e^{-rT} K \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{e^{-i\xi s_T}}{-i\xi} \right]_k^{\infty} \phi(\xi) d\xi = \\
&= S_0 - e^{-rT} K \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\xi k}}{1-i\xi} \phi(\xi) d\xi - e^{-rT} K \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\xi k}}{i\xi} \phi(\xi) d\xi = \\
&= S_0 - e^{-rT} K \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\xi k}}{i\xi(1-i\xi)} \phi(\xi) d\xi = \\
&= S_0 - e^{-rT} K \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \frac{e^{-i\xi k}}{i\xi(1-i\xi)} \phi(\xi) d\xi \right] \quad (36)
\end{aligned}$$

Warto zauważyć, iż formuły (1) i (36) pozwalają uzyskać zbliżoną wycenę analizowanych instrumentów finansowych. Wydaje się, że potwierdza to rys. 4. Podobnie jak w przypadku modeli BS-FTBM, BS-FTCM i BS-FTAttari małe różnice w przebiegu funkcji wypłat w porównaniu do modelu BS wynikają z zastosowania procedury numerycznego całkowania w podejściu opartym na transformacie Fouriera.



Rys. 4. Funkcje wypłat europejskich opcji kupna w modelach BS i BS-FTBates

4. Model A. Lewisa

Kolejnym autorem poruszającym kwestie wyceny opcji przy wykorzystaniu transformaty Fouriera jest A. Lewis¹¹ (metoda określana dalej jako BS-FTLewis). Zaproponowane przez niego podejście w początkowej fazie zgodne jest częściowo ze sposobem postępowania zaproponowanym przez dwóch poprzednich autorów. Potwierdza to dokonane podstawienie: $s_T = \ln S_T$ oraz wyznaczona transformata Fouriera zmodyfikowanej funkcji wypłaty analizowanych instrumentów finansowych, tj.

$$\begin{aligned}\widehat{w}(s_T) &= \mathcal{F}(w(s_T))(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi s_T} (e^{s_T} - K) ds_T = \\ &= \int_k^{\infty} e^{i\xi s_T} (e^{s_T} - K) ds_T = \\ &= \int_k^{\infty} (e^{s_T(1+i\xi)} - Ke^{i\xi s_T}) ds_T = \left(\frac{e^{s_T(1+i\xi)}}{1+i\xi} - K \frac{e^{i\xi s_T}}{i\xi} \right) \Big|_k^{\infty}\end{aligned}\quad (37)$$

gdy $\xi \in \mathbb{R}$ to górna granica całki znajdującej się we wzorze (37) nie może być wyznaczona. Inaczej jest jednak, gdy $\xi \in \mathbb{C}$, $Im(\xi) > 1$. Przy tak określonych warunkach formułę (37) można przetransformować do następującej postaci

$$\widehat{w}(s_T) = -\frac{K^{1+i\xi}}{\xi^2 - i\xi}\quad (38)$$

Dowód

$$\begin{aligned}\widehat{w}(s_T) &= \left(\frac{e^{s_T(1+i\xi)}}{1+i\xi} - K \frac{e^{i\xi s_T}}{i\xi} \right) \Big|_k^{\infty} = 0 - \left(\frac{e^{k(1+i\xi)}}{1+i\xi} - K \frac{e^{i\xi k}}{i\xi} \right) = \\ &= -\left(\frac{e^{k(1+i\xi)}}{1+i\xi} - \frac{e^{k(1+i\xi)}}{i\xi} \right) = \\ &= -\left(\frac{i\xi e^{k(1+i\xi)} - (1+i\xi)e^{k(1+i\xi)}}{(1+i\xi)i\xi} \right) = -\frac{K^{1+i\xi}}{\xi^2 - i\xi}\end{aligned}\quad (39)$$

Tym samym można stwierdzić, że istnieje możliwość określenia funkcji wypłaty opcji dla $\xi \in \mathcal{S}_w = \{Im(\xi) \geq 1\}$.

Odwołanie się do podejścia martyngałowego oraz wykorzystanie definicji uogólnionej transformaty Fouriera pozwala obliczyć wartość europejskiej opcji kupna w modelu F. Blacka i M. Scholesa w następujący sposób

¹¹ A. Lewis: *A Simple Option Formula for General Jump-Diffusion and other Exponential Levy Processes*. <http://optioncity.net/pubs/ExpLevy.pdf> (15.09.2013).

$$C(S_0, 0) = e^{-rT} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\xi_1}^{\infty+i\xi_1} e^{-i\xi s_T} \widehat{w}(s_T) \tilde{q}(s_T) d\xi = e^{-rT} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\xi_1}^{\infty+i\xi_1} \phi(-\xi) \widehat{w}(s_T) d\xi \quad (40)$$

Jeżeli uznać, że $\phi(\xi)$ jest dobrze zdefiniowana dla $\xi \in \mathcal{S}_x = \{\xi = u + iv: v \in (a, b), \text{ gdzie } a < -1, b > 0\}$, to $\phi(-\xi)$ jest dobrze zdefiniowana dla $\xi \in \overline{\mathcal{S}_x} = \{\xi = u + iv: v \in (\alpha, \beta)\}$, gdzie $\alpha < 0, \beta > 1$. Wynika stąd, że $C(S_0, 0)$ można otrzymać dla $\xi \in \mathcal{S}_v$, gdzie: $\mathcal{S}_v = \overline{\mathcal{S}_x} \cap \mathcal{S}_w$.

Podstawienie $\widehat{w}(s_T) = -\frac{K^{1+i\xi}}{\xi^2 - i\xi}$ do wzoru (40) pozwala określić wartość teoretyczną opcji, tj.

$$C(S_0, 0) = -e^{-rT} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\xi_1}^{\infty+i\xi_1} \phi(-\xi) \frac{K^{1+i\xi}}{\xi^2 - i\xi} d\xi = -e^{-rT} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\xi_1}^{\infty+i\xi_1} \phi(-\xi) \frac{e^{k(1+i\xi)}}{\xi^2 - i\xi} d\xi \quad (41)$$

Warto zauważyć, że funkcja podcałkowa w równaniu (41) ma dwa punkty osobliwe: $\xi = 0$ i $\xi = i$. Wyznaczając jej residuum w punkcie należącym do \mathcal{S}_v oraz dokonując podstawienia: $k = \ln \frac{S_0}{K} + rT$ można stwierdzić, że

$$Res(i) = \frac{-e^{rT} K}{2\pi} \phi(-i) \frac{e^{\ln \frac{S_0}{K} + rT}}{i} = -\frac{S_0}{2\pi i} \quad (42)$$

Przesunięcie obszaru całkowania o $\xi_2 \in (0, 1)$ oraz skorzystanie z twierdzenia o residuach pozwala przekształcić wzór (41) do poniższej postaci

$$C(S_0, 0) = S_0 - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\xi_2}^{\infty+i\xi_2} \phi(-\xi) \frac{e^{-k(1+i\xi)}}{\xi^2 - i\xi} d\xi \quad (43)$$

zakładając, że w równaniu (41) $\xi_2 = \frac{1}{2}$ można ostatecznie wyznaczyć cenę teoretyczną europejskiej opcji kupna, tj.

$$C(S_0, 0) = S_0 - \frac{\sqrt{S_0 K} e^{-\frac{rT}{2}}}{\pi} \int_0^\infty Re \left[\phi \left(u - \frac{i}{2} \right) \frac{e^{iuk}}{u^2 - \frac{1}{4}} \right] du \quad (44)$$

Dowód

$$C(S_0, 0) = -\frac{K e^{-rT}}{2\pi} \int_{-\infty+i\xi_2}^{\infty+i\xi_2} \phi(-\xi) \frac{e^{-i\xi k}}{\xi^2 - i\xi} d\xi = \begin{vmatrix} \xi = u + \frac{1}{2}i \\ u = \xi - \frac{1}{2}i \\ d\xi = du \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{Ke^{-rT}}{2\pi} \int_{-\infty+\frac{1}{2}i}^{\infty+\frac{1}{2}i} \phi\left(-u-\frac{1}{2}i\right) \frac{e^{-iuk+\frac{1}{2}k}}{\left(u+\frac{1}{2}i\right)\left(u-\frac{1}{2}i\right)} du = \\
& -\frac{Ke^{-rT}}{2\pi} e^{\frac{1}{2}k} \int_{-\infty+\frac{1}{2}i}^{\infty+\frac{1}{2}i} \phi\left(-u-\frac{1}{2}i\right) \frac{e^{-iuk}}{\left(u+\frac{1}{2}i\right)\left(u-\frac{1}{2}i\right)} du = \\
& -\frac{\sqrt{S_0K}e^{-\frac{1}{2}rT}}{2\pi} \int_{-\infty+\frac{1}{2}i}^{\infty+\frac{1}{2}i} \phi\left(-u-\frac{1}{2}i\right) \frac{e^{-iuk}}{\left(u+\frac{1}{2}i\right)\left(u-\frac{1}{2}i\right)} du \quad (45)
\end{aligned}$$

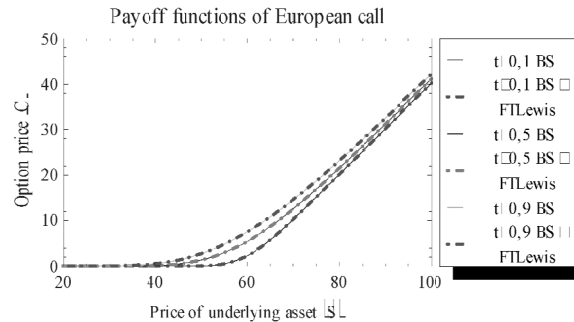
Wyznaczenie residuum w punkcie $u = \frac{1}{2}i$, tj.

$$\text{Res}\left(\frac{1}{2}i\right) = -\frac{Ke^{-rT}}{2\pi} \sqrt{\frac{S_0}{K}} e^{-\frac{1}{2}rT} \phi(-i) \frac{e^{\frac{1}{2}k}}{i} = \frac{S_0}{2\pi i} \quad (46)$$

pozwała obliczyć cenę opcji

$$\begin{aligned}
C(S_0, 0) &= S_0 - \frac{\sqrt{S_0K}e^{-\frac{rT}{2}}}{\pi} \int_0^\infty \phi\left(-u-\frac{i}{2}\right) \frac{e^{-iuk}}{u^2+\frac{1}{4}} du = \\
& S_0 - \frac{\sqrt{S_0K}e^{-\frac{rT}{2}}}{\pi} \int_0^\infty \text{Re}\left[\phi\left(u-\frac{i}{2}\right) \frac{e^{iuk}}{u^2+\frac{1}{4}}\right] du \quad (47)
\end{aligned}$$

Poprawność formuły (44) znajduje potwierdzenie w prawie identycznym przebiegu funkcji wypłat opcji wyznaczanych metodami BS oraz BS-FTLewis (rys. 5). Podobnie jak w poprzednich podejściach niewielkie rozbieżności są rezultatem przyjętego sposobu dochodzenia do wyniku końcowego.



Rys. 5. Funkcje wypłat europejskich opcji kupna w modelach BS i BS-FTLewis

5. Model A. Liptona

Zbliżony sposób wyceny opcji do wykorzystanego przez A. Lewisa¹² proponuje A. Lipton¹³ (metoda określana dalej jako BS-FTLipton). Punktem wyjścia przeprowadzonej przez niego analizy jest wzór (44). Mając dodatkowo świadomość poprawności formuły (18) oraz sposobu wyznaczania funkcji charakterystycznej przy założeniu, że $\xi = u - \frac{i}{2}$, tj.

$$\phi\left(u - \frac{i}{2}\right) = e^{-\frac{\sigma^2 T}{2}\left(u^2 + \frac{1}{4}\right)} \quad (48)$$

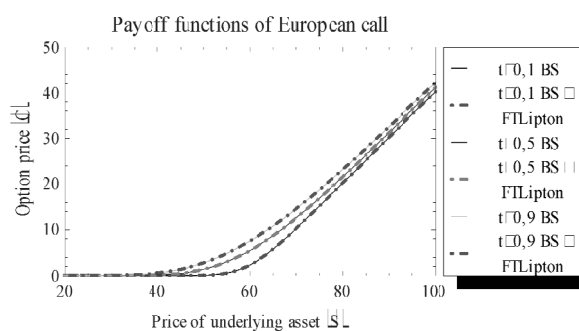
można przystąpić do wyznaczenia ceny teoretycznej europejskiej opcji kupna, tj.

$$C(S_0, 0) = S_0 - \frac{Ke^{-rT}}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[\frac{e^{(iu + \frac{1}{2})k - (u^2 + \frac{1}{4})\frac{\sigma^2 T}{2}}}{u^2 - \frac{1}{4}} \right] du \quad (49)$$

Dowód

$$\begin{aligned} C(S_0, 0) &= S_0 - \frac{Ke^{-rT}}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \phi\left(u - \frac{i}{2}\right) \frac{e^{iuk + \frac{1}{2}k}}{u^2 - \frac{1}{4}} du = \\ &= S_0 - \frac{Ke^{-rT}}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{iuk + \frac{1}{2}k - (u^2 + \frac{1}{4})\frac{\sigma^2 T}{2}}}{u^2 - \frac{1}{4}} du = \\ &= S_0 - \frac{Ke^{-rT}}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[\frac{e^{iuk + \frac{1}{2}k - (u^2 + \frac{1}{4})\frac{\sigma^2 T}{2}}}{u^2 - \frac{1}{4}} \right] du \end{aligned} \quad (50)$$

Warto zauważyć, że wzór (49) pozwala określić cenę opcji zgodną z podejściem F. Blacka i M. Scholesa bez wykorzystania odwrotnej transformaty Fouriera. W konsekwencji wyniki generowane przez modele BS i BS-FTLipton są identyczne. Potwierdza to rys. 6.



Rys. 6. Funkcje wypłat europejskich opcji kupna w modelach BS i BS-FTLipton

¹² Ibid.

¹³ A. Lipton: *The Vol Smile Problem*. „Risk” 2002, February.

6. Porównanie metod wyceny opcji bazujących na transformacie Fouriera

Porównanie modeli wyceny opcji opierających się na transformacie Fouriera może być przeprowadzone ze względu na dwa podstawowe kryteria, którymi są dokładność oraz szybkość obliczeniową. Analizując konstrukcję każdego z podejść łatwo jest jednak dojść do wniosku, iż koncepcje BS-FTBM i BS-FTCM są jednoznacznie gorsze od metodologii opracowanych przez pozostałych autorów. Pogląd taki, w przypadku modelu BS-FTBM, znajduje uzasadnienie w konieczności wyznaczenia dwóch funkcji charakterystycznych, co, przy numerycznym obliczaniu odwrotnych transformat Fouriera niezbędnych do uzyskania wyniku końcowego, powoduje wydłużenie czasu oczekiwania na wynik końcowy¹⁴.

Nieco inaczej sytuacja przedstawia się natomiast w przypadku modelu BS-FTCM, w którym, pomimo że wykorzystywana jest tylko jedna funkcja charakterystyczna, pojawia się problem oscylacji funkcji podcałkowej zmniejszającej precyzję dokonywanych obliczeń, w szczególności w przypadku opcji bliskich momentowi wykupienia, które znajdują się głęboko *out-of-the-money* lub *in-the-money*. Dostrzeżenie tak określonej prawidłowości jest przyczyną modyfikacji podejścia BS-FTCM przez P. Carra i D. Madana tak, aby dostosować je do krótkich okresów pozostających do końca obowiązywania kontraktów. Pomijając kwestię popełnionego błędu matematycznego przez autorów modelu (sic!) należy zauważyć, iż wyznaczony cel nie został w pełni osiągnięty.

Kwestią do rozstrzygnięcia pozostaje zatem wybór najlepszego podejścia spośród koncepcji BS-FTAttari, BS-FTBates, BS-FTLewis i BS-FTLipton. Pomimo opinii A. Lewisa dotyczącej przewagi opracowanego przez niego modelu nad innymi metodami wyceny¹⁵, wykonane obliczenia¹⁶ nie potwierdzają słuszności tak sformułowanego poglądu. W konsekwencji, alternatywne do G. Bakshi'ego i D. Madana oraz P. Carra i D. Madana sposoby określania wartości teoretycznych kontraktów opartych na prawach pochodnych przy wykorzystaniu transformacji Fouriera należy uznać za zbliżone do siebie zarówno pod względem szybkości obliczeniowej, jaki precyzji generowanych wyników.

¹⁴ A. Orzechowski: *Wycena opcji za pomocą transformaty Fouriera – podejście analityczne i numeryczne. Badania dla młodych naukowców*. KZiF Szkoła Główna Handlowa, Warszawa 2012.

¹⁵ A. Lewis: Op. cit., s. 15.

¹⁶ A. Orzechowski: Op. cit., II etap.

Podsumowanie

Niniejszy artykuł prezentuje najważniejsze sposoby wyceny opcji przy wykorzystaniu transformaty Fouriera. Przedstawiane koncepcje można podzielić na dwie części: pierwszą dotyczącą modeli tradycyjnych, tj. BS-FTBM i BS-FTCM, oraz drugą obejmującą podejścia alternatywne, tj. BS-FTAttari, BS-FTBates, BS-FTLewis i BS-FTLipton. Pomimo że do najczęściej stosowanych sposobów określania wartości teoretycznych instrumentów finansowych zalicza się metodologie opracowane przez G. Bakshi'ego i D. Madana oraz P. Carra i D. Madana, to o wiele korzystniejsze, zarówno ze względu na szybkość, jak i precyzję generowanych wyników, wydają się podejścia M. Attari'ego, D.S. Batesa, A. Lewisa czy A. Liptona.

Bibliografia

- Attari M.: *Option Pricing Using Fourier Transform: A Numerically Efficient Simplification*. http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=520042 (20.09.2013).
- Bakshi G., Madan D.: *Spanning and Derivative – Security Valuation*. „Journal of Financial Economics” 2000, Vol. 55.
- Bates D.S.: *Maximum Likelihood Estimation of Latent Affine Processes*. „Review of Financial Studies” 2006, Vol. 19.
- Breedon R., Litzenberger R.: *Prices of State – Contingent Claims Implicit In Option Prices*. „Journal of Business” 1978, Vol. 51.
- Carr P., Madan D.: *Option Valuation Using the Fast Fourier Transform*. „Journal of Computational Finance” 1999, Vol. 2, No. 4.
- Cherubini U., Lungu G.D., Mulinacci S., Rossi P.: *Fourier Transform Methods in Finance*. John Wiley&Sons, Chichester 2010.
- Duffie D., Pan J., Singleton K.: *Transform Analysis and Asset Pricing for Jump-Diffusions*. „Econometrica” 2000, Vol. 68, No. 6.
- Lewis A.: *A Simple Option Formula for General Jump-Diffusion and other Exponential Levy Processes*. <http://optioncity.net/pubs/ExpLevy.pdf> (15.09.2013).
- Lipton A.: *The Vol Smile Problem*. „Risk” 2002, February.
- Orzechowski A.: *Wycena opcji za pomocą transformaty Fouriera – podejście analityczne i numeryczne. Badania dla młodych naukowców*. KZiF Szkoła Główna Handlowa, Warszawa 2012.
- Orzechowski A.: *Wycena opcji za pomocą transformaty Fouriera – podejście analityczne i numeryczne (II etap). Badania dla młodych naukowców*. KZiF Szkoła Główna Handlowa, Warszawa 2012.

**CAN EUROPEAN-STYLE OPTIONS BE PRICED BETTER
THAN IN CARR-MADAN MODEL. REVIEW OF MODELS BASED
ON FOURIER TRANS FORM**

Summary

This document relates to the valuation of options using the Fourier transform. Topics covered in the document include both analysis of the traditional approaches and alternative concepts. The subject matter of particular interest is the speed and computational precision of the European-style option valuation methods.