METODY ILOŚCIOWE W BADANIACH EKONOMICZNYCH
Tom XI/2, 2010, str. 39–61

MONOTONICZNOŚĆ MIERNIKA OPARTEGO NA DWÓCH WZORCACH

ROZWAŻANIA TEORETYCZNE

Agata Binderman
Katedra Ekonometrii i Statystyki SGGW
e-mail: agata_binderman@sggw.pl
Jarosław L. Bojarski
Katedra Zastosowań Matematyki SGGW
e-mail: jaroslaw_bojarski@sggw.pl

Streszczenie: Celem pracy jest podanie kryterium monotoniczności dla funkcji użyteczności. Podajemy liczne przykłady nie monotonicznych (lokalnie malejących) funkcji użyteczności. Badamy możliwość wprowadzenia relacji preferencji przy pomocy funkcji użyteczności. Ponadto definiujemy zjawisko niedosytu w polu preferencji zadanym funkcją użyteczności. W drugiej części pracy podamy przykład nie monotonicznej (lokalnie malejącej) funkcji użyteczności uzyskanej metodą zwykłego "przeksięgowania" (które może wynikać ze zmiany prawa).

Słowa kluczowe: funkcje użyteczności, mierniki syntetyczne, pole preferencji, zjawisko niedosytu, norma, klasyfikacja

WSTĘP

Podstawowym celem analizy taksonomicznej jest dokonanie porządkowania i grupowania obiektów (jednostek) będących elementami wielowymiarowej przestrzeni cech. Do klasyfikacji i grupowania stosowanych jest wiele metod [Gatnar E, Walesiak M. 2009, Kukuła K. 2000, Malina A. 2004, Młodak A. 2006, Zeliaś A. 2000]. Mnogość tych metod wynika z faktu, że klasyfikacje wykorzystujące jeden wzorzec mają istotne wady [Binderman A. 2005]. W pracy [Binderman A. 2006a] do porządkowania i klasyfikacji obiektów podano miernik syntetyczny, który wykorzystuje dwa obiekty wzorcowe. W kolejnych pracach pierwszego z autorów podane zostały własności tego miernika i przykłady jego przydatności do badania regionalnego zróżnicowania rolnictwa w Polsce [Binderman A. 2006b, 2006c, 2007a, 2007b, 2008a, 2008b, 2009a, 2009b, 2010a, 2010b].

W pracy [Binderman Z. 2010], dla omawianego miernika zbadano problem wyboru takiego sposobu mierzenia odległości między rozważanymi obiektami, aby w polu preferencji indukowanym przez ten miernik występowało zjawisko niedosytu. Niniejsza praca jest ściśle związana z tym problemem.

Celem pracy jest podanie kryterium monotoniczności dla funkcji użyteczności. Konstruujemy całą serie przykładów niemonotonicznych (lokalnie malejacych) funkcji użyteczności, pozornie poprawnie zdefiniowanych. Definiujemy zjawisko niedosytu w polu preferencji zadanym funkcją użyteczności. Ponadto dyskutujemy zasadność wprowadzania relacji niedosytu.

W drugiej części pracy podamy przykład niemonotonicznej (lokalnie malejacej) funkcji użyteczności uzyskanej z najprostszych norm (stosowanych w analizie matematycznej) metodą zwykłego "przeksięgowania" środków. Tego typu przeksiegowanie może wynikać ze zmiany regulacji prawnych. Niniejszy artykuł ma charakter ściśle matematyczny.

Punkty w przestrzeni $\Re^n$ (iloczyn kartezjański n zbiorów liczb rzeczywistych) oznaczamy symbolami $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, $\mathbf{h}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\gamma}$, gdzie $\mathbf{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$. Norma w przestrzeni $\Re^n$, dana wzorem $\Re^n \ni \mathbf{v} \mapsto \|\mathbf{v}\| \in [0, \infty)$, spełnia warunki (patrz [Dunford i in. 1958], [Bourbaki 1966, Rozdział 1, Paragraf 1])

$$\|\mathbf{v}\| \geq 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \Re^n \text{ oraz } \|\mathbf{v}\| = 0 \text{ wtedy}$$

$$\text{i tylko wtedy gdy } \mathbf{v} = \underline{\mathbf{0}} = (0,..,0),. \tag{1}$$

$$\|a\mathbf{v}\| = |a|\|\mathbf{v}\| \quad \forall \mathbf{v} \in \Re^n \quad \forall a \in \Re, \tag{2}$$

$$\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\| \quad \forall \mathbf{v} \in \Re^n \quad \forall \mathbf{w} \in \Re^n. \tag{3}$$

Tutaj $\forall \mathbf{v}$ oznacza kwantyfikator "dla każdego" argumentu $\mathbf{v}$.

Definicja 1. Mówimy, że $\mathbf{v} \leq \mathbf{w}$ wtedy i tylko wtedy gdy $v_1 \leq w_1$ oraz $v_2 \leq w_2$ oraz .... oraz $v_n \leq w_n$.

Zauważmy, że powyżej zdefiniowana relacja nierówności (Definicja 1) nie spełnia warunków pełnego preporzadku na S_n, mianowicie nie jest spełniony warunek:

$$\text{dla dowolnych } \mathbf{v}, \mathbf{w} \in S_n \text{ mamy } \mathbf{v} \leq \mathbf{w} \text{ lub } \mathbf{w} \leq \mathbf{v}.$$

Symbolem S_n oznaczamy stożek wypukły n wymiarowy $[0,\infty)^n$, czyli S_n jest iloczynem kartezjańskim n półprostych $[0,\infty)$. Podobnie $K_n = [0,1]^n$ jest kostką n wymiarową. Symbolami $\underline{\mathbf{1}} = (1,...,1)$ oraz $\underline{\mathbf{0}} = (0,...,0) \in \Re^n$ oznaczamy wierzchołki K_n. Niech $\mathbf{x} = (x_1,...,x_n) \in \Re^n$ oraz $\mathbf{y} = (y_1,...,y_n) \in \Re^n$.

Definicja 2. Funkcję użyteczności definiujemy na K_n wzorem

$$K_n \ni \mathbf{x} \mapsto U(\mathbf{x}) = \frac{\|\mathbf{x}\| + \|\underline{\mathbf{1}}\| - \|\underline{\mathbf{1}} - \mathbf{x}\|}{2\|\underline{\mathbf{1}}\|}, \tag{4}$$

gdzie $\underline{\mathbf{1}} = (1,...,1)$. Jeśli nierówność $\mathbf{x} \le \mathbf{y}$ pociąga za sobą warunek $U(\mathbf{x}) \le U(\mathbf{y})$, to mówimy, że funkcja U jest niemalejąca. Jeśli natomiast $\mathbf{x} \le \mathbf{y}$ oraz $\mathbf{x} \ne \mathbf{y}$ pociąga za sobą warunek $U(\mathbf{x}) < U(\mathbf{y})$, to mówimy, że funkcja U jest rosnąca.

Definicja 3. W ekonometrii dowolny podzbiór $X \subset S_n = [0,\infty)^n$ z relacją $\le$, definiującą porządek pomiędzy elementami X, nazywamy polem słabej preferencji.

W naukach ekonomicznych mówimy, że na $X \subset S_n = [0,\infty)^n$ obserwujemy zjawisko niedosytu, jeśli

dla dowolnych $\mathbf{x},\mathbf{y} \in X$ z warunków $\mathbf{x} \le \mathbf{y}$ i $\mathbf{x} \ne \mathbf{y}$

wynika, iż $\mathbf{x} \le \mathbf{y}$ i nieprawda jest $\mathbf{y} \le \mathbf{x}$

(por. [Panek 2000], [Binderman 2010]). Oczywiście, autorzy definiują tą własność dla relacji $\le$ spełniającej warunki pełnego preporzadku (patrz [Panek 2000]).

Rozważymy poniżej kilka wariantów wprowadzenia relacji niedosytu (czy też relacji zbliżonej do relacji niedosytu) na podzbiorach $X \subset S_n$. Najważniejszy przypadek będzie następujący.

Bierzemy pod uwagę relację porządku (będącą rozszerzeniem relacji zadanej Definicją 1) spełniającą warunki pełnego preporzadku i związaną z różniczkowalną funkcją użyteczności. Wtedy zjawisko niedosytu będziemy mogli wprowadzić, na co najwyżej 1-wymiarowym podzbiorze X zbioru S_n (lub K_n).

Model 1. Rozważmy przypadek 2-wymiarowy. Załóżmy, że $X_2 \subset S_2 = [0,\infty)^2$ spełnia jeden z dwóch warunków

$$\forall x \in [0,\infty) \quad \exists y_x \in [0,\infty) \qquad (x, y_x) \in X_2$$

$$\text{lub} \qquad \forall y \in [0,\infty) \quad \exists x_y \in [0,\infty) \qquad (x_y, y) \in X_2.$$

Jeśli dodatkowo $X_2 \subset S_2$ ma tą własność, że z faktów $\mathbf{x},\mathbf{y} \in X_2$, $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ i $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ wynika $x_1 < y_1$ i $x_2 < y_2$ (gdzie $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ oraz $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$) to X_2 musi być:

(i) podzbiorem wykresu funkcji różnowartościowej zdefiniowanej na $\{x_1 \in \Re \mid x_1 \geq 0\}$ o wartościach w $\{x_2 \in \Re \mid x_2 \geq 0\}$,

lub

(ii) podzbiorem wykresu funkcji różnowartościowej zdefiniowanej na $\{x_2 \in \Re \mid x_2 \geq 0\}$ o wartościach w $\{x_1 \in \Re \mid x_1 \geq 0\}$.

Oczywiście taki podzbiór $X_2 \subset S_2$ jest zbyt ubogi, aby mógł służyć do opisywania rzeczywistych procesów ekonomicznych.

Model 2. Rozważamy $S_n = [0, \infty)^n$ z relacją $\leq$ podaną w Definicji 1. Zauważamy, że dla dowolnego podzbioru $X_n \subset S_n$ zachodzi implikacja:

$$\text{jeśli } \mathbf{x},\mathbf{y} \in X_n, \mathbf{x} \leq \mathbf{y} \text{ i } \mathbf{x} \neq \mathbf{y} \text{ to } \mathbf{x} \leq \mathbf{y} \text{ i nie jest prawdą, że } \mathbf{y} \leq \mathbf{x}.$$

W tym przypadku wprowadzenie relacji niedosytu nie wnosi nic nowego. Istotnie, dowolny podzbiór $X_n \subset S_n$ z nierównością $\leq$ podaną w Definicji 1, jest relacją niedosytu. Pamiętajmy, że relacja $\leq$ sformułowana w Definicji 1 nie spełnia warunków pełnego preporządku.

Jeśli funkcja użyteczności zdefiniowana na zbiorze $K_n = [0,1]^n$ wzorem (4) jest funkcją niemalejącą to relację słabej preferencji możemy określić także dla tych par punktów $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in K_n$, dla których $U(\mathbf{x}) \leq U(\mathbf{y})$. Zatem teraz będziemy mogli porównywać elementy $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in K_n$ nawet wtedy, gdy $x_1 < y_1$ oraz $x_2 > y_2$ (gdzie $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ oraz $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$).

Definicja 4. Niech funkcja użyteczności $U : K_n \to \Re$ będzie niemalejąca. Mówimy, że $\mathbf{x} \preceq_U \mathbf{y}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $U(\mathbf{x}) \leq U(\mathbf{y})$, czyli $\mathbf{x}$ jest mniejsze lub równe $\mathbf{y}$ względem relacji preferencji definiowanej funkcją użyteczności U.

Jest oczywiste, że z faktu $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ wynika, iż $\mathbf{x} \preceq_U \mathbf{y}$ gdy funkcja U jest niemalejąca. Tak wprowadzona relacja słabej preferencji spełnia warunki pełnego preporządku (por. [Panek 2000]).

Definicja 5. Niech funkcja użyteczności $U_1 : K_n \to \Re$ będzie rosnąca. Mówimy, że $\mathbf{x} \prec_{U_1} \mathbf{y}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $U_1(\mathbf{x}) < U_1(\mathbf{y})$, czyli $\mathbf{x}$ jest mniejsze od $\mathbf{y}$ względem relacji preferencji definiowanej funkcją użyteczności U_1.

Jeśli $U_2 : K_n \to \Re$ jest rosnącą funkcją użyteczności to formuła

$$\mathbf{x} \preceq_{U_2} \mathbf{y} \text{ wtedy i tylko wtedy gdy } U_2(\mathbf{x}) \leq U_2(\mathbf{y})$$

definiuje relację preferencji (dla której z faktu $\mathbf{w} \le \mathbf{z}$ wynika, że $\mathbf{w} \preceq_{U_2} \mathbf{z}$).

Wprowadzimy teraz zmodyfikowaną definicję zjawiska niedosytu (por. [Panek 2000], [Binderman 2010]).

Definicja 6. Mówimy, że w polu preferencji $(K_n,\ \preceq_U)$, gdzie relacja preferencji $\preceq_U$ zadana jest rosnącą funkcją użyteczności U na zbiorze K_n, występuje *zjawisko niedosytu*, jeżeli dla wszystkich wektorów $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in K_n$ prawdziwa jest implikacja

$$\text{jeśli } \mathbf{x} \le \mathbf{y} \text{ oraz } \mathbf{x} \ne \mathbf{y} \text{ to } \mathbf{x} \prec_U \mathbf{y} \text{ (czyli } U(\mathbf{x}) < U(\mathbf{y})). \tag{5}$$

Wniosek 1. Jeśli U_1 jest rosnącą funkcją użyteczności, definiującą na K_n relację preferencji $\preceq_{U_1}$ to w polu preferencji $(K_n,\ \preceq_{U_1}$ występuje zjawisko niedosytu.

Dowód. Istotnie, z warunków $\mathbf{x} \le \mathbf{y}$ (czyli $x_1 \le y_1;\ \ x_2 \le y_2;...;x_n \le y_n$) oraz $\mathbf{x} \ne \mathbf{y}$ wynika, że $U_1(\mathbf{x}) < U_1(\mathbf{y})$, bo U_1 jest rosnącą funkcją użyteczności.

Uwaga 1. Jeśli U jest niemalejącą funkcją użyteczności, która nie jest rosnąca (czyli istnieją $\mathbf{w}, \mathbf{z} \in K_n$, $\mathbf{w} \le \mathbf{z}$, $\mathbf{w} \ne \mathbf{z}$ oraz $U(\mathbf{w}) = U(\mathbf{z})$) to nie ma sensu rozpatrywać zjawiska niedosytu, bo wówczas nie definiujemy poprawnie relacji $\preceq_U$ (poprawnie z punktu widzenia przyjętych definicji).

Musimy zauważyć, że zjawisko niedosytu wprowadzone Definicją 6 nie wyróżnia żadnego podzbioru K_n (podzbioru, na którym by zachodziło to zjawisko). Inaczej mówiac, w tym przypadku zjawisko niedosytu zachodzi na dowolnym podzbiorze K_n. Zatem przyjęta definicja nie wnosi nic nowego (mamy własność, która jest spełniona na całym K_n).

Model 3. Rozważmy przypadek, gdy zjawisko niedosytu jest zdefiniowane inaczej niż poprzednio. Możemy się domyślać, że jest to powszechnie obowiązująca definicja (por. [Panek 2000]). Rozpatrujemy podzbiór $X \subset K_n$ taki, że dla dowolnych $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ spełniony jest warunek

$$\text{jeśli } \mathbf{x} \preceq_U \mathbf{y} \text{ oraz } \mathbf{x} \ne \mathbf{y} \text{ to } \mathbf{x} \prec_U \mathbf{y} \tag{6}$$

gdzie $U : K_n \to \Re$ jest rosnącą funkcją użyteczności. Ponadto, niech U będzie funkcją różniczkowalną (z ciagłą pochodną, różną od zera) na zbiorze $K_n \setminus \{\underline{\mathbf{0}}\}$, co zapisujemy $U \in C^1(K_n \setminus \{\underline{\mathbf{0}}\})$, gdzie $\underline{\mathbf{0}} = (0,...,0) \in \Re^n$. Jak pamiętamy różniczkowalność na zbiorze $K_n \setminus \{\underline{\mathbf{0}}\}$ oznacza, że istnieje różniczkowalne przedłużenie funkcji U na otoczenie zbioru $K_n \setminus \{\underline{\mathbf{0}}\}$. Na mocy twierdzenia Sarda [Giaquinta i in. 1998, str. 89, Corollary 1] dla każdego $z \in \Re$ zbiór

$$\{\mathbf{x} \in K_n \setminus \{\underline{\mathbf{0}}\} \mid U(\mathbf{x}) = z\} \tag{7}$$

jest $(n-1)$ wymiarową podrozmaitością $K_n \setminus \{\underline{\mathbf{0}}\}$, punktem lub zbiorem pustym. Oznacza to, że zbiór X może mieć, co najwyżej jeden punkt wspólny z każdym ze zbiorów (7), aby był spełniony warunek (6). Zatem podzbiór X był by zbyt ubogi aby mógł służyć do badań ekonometrycznych. Inaczej mówiac, jeśli państwo A wyznaczy jakąś ścieżkę rozwoju w sytuacji niedosytu, to państwo B będzie musiało poruszać się dokładnie po tej samej ścieżce, abyśmy mogli powiedzieć, że rozwija się w sytuacji niedosytu.

Uwaga 2. Jeśli będziemy rozpatrywać rosnącą funkcję użyteczności U_1 zdefiniowaną na $S_n = [0,\infty)^n$, różniczkowalną z ciagłą pochodną, to zbiór X_1 (na którym bedzie zachodziło zjawisko niedosytu) bedzie miał co najwyżej po jednym punkcie wspólnym z każdym ze zbiorów $\{\mathbf{x} \in S_n \setminus \{\underline{\mathbf{0}}\} \mid U_1(\mathbf{x}) = z\}$ gdzie $z \in \Re$. Podobnie jak poprzednio, $\{\mathbf{x} \in S_n \setminus \{\underline{\mathbf{0}}\} \mid U_1(\mathbf{x}) = z\}$ jest $(n-1)$ wymiarową podrozmaitością lub zbiorem pustym.

Normę, która jest różniczkowalna na zbiorze $int \quad S_n = (0,\infty)^n$ oraz jednostronnie różniczkowalna na brzegu tego zbioru (czyli na $S_n \setminus int \quad S_n$), z wyjątkiem punktu $\underline{\mathbf{0}} = (0,...,0) \in \Re^n$, oznaczamy symbolem $\|\cdot\|_R$. Ponadto zakładamy, że pochodna normy $\|\cdot\|_R$ jest ciągła na $S_n \setminus \{\underline{\mathbf{0}}\}$, natomiast sama norma $\|\cdot\|_R$ jest określona na $\Re^n$.

MONOTONICZNOŚĆ FUNKCJI UŻYTECZNOŚCI

Poniżej podajemy kryteria monotoniczności funkcji użyteczności U. Rozpatrywać będziemy zarówno przypadek, gdy funkcja U jest zdefiniowana przy pomocy normy różniczkowalnej na $intS_n$ jak i normy nie różniczkowalnej.

Twierdzenie 1. Niech dla wszystkich $\mathbf{v} \in K_n$ i dla dowolnego $\mathbf{h} \in S_n$ takich, że $\mathbf{h} \neq \underline{\mathbf{0}} = (0,0,...,0)$, $\mathbf{v} \neq \underline{\mathbf{0}}$, $\mathbf{v} \neq \underline{\mathbf{1}}$ zachodzi nierówność

$$\nabla_{\mathbf{h}} \|\mathbf{v}\|_R - \nabla_{\mathbf{h}} \|\underline{\mathbf{1}} - \mathbf{v}\|_R > 0, \tag{8}$$

czyli różnica pochodnych kierunkowych norm $\mathbf{v}$ oraz $\underline{\mathbf{1}} - \mathbf{v}$, w kierunku $\mathbf{h}$, jest dodatnia. Wtedy, dla wszystkich $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in K_n$ takich, że $\underline{\mathbf{0}} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{y} \leq \underline{\mathbf{1}}$ oraz $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ (czyli $\mathbf{x} < \mathbf{y}$) zachodzi warunek

$$U_R(\mathbf{x}) < U_R(\mathbf{y}), \tag{9}$$

gdzie

$$K_n \ni \mathbf{x} \mapsto U_R(\mathbf{x}) = \frac{\|\mathbf{x}\|_R + \|\underline{\mathbf{1}}\|_R - \|\underline{\mathbf{1}} - \mathbf{x}\|_R}{2\|\underline{\mathbf{1}}\|_R}. \tag{10}$$

Na odwrót, jeśli

$$U_R(\mathbf{x}) < U_R(\mathbf{y}) \tag{11}$$

dla wszystkich $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in K_n$ takich, że $\underline{\mathbf{0}} \le \mathbf{x} < \mathbf{y} \le \underline{\mathbf{1}}$ to

$$\nabla_{\mathbf{h}} \|\mathbf{v}\|_R - \nabla_{\mathbf{h}} \|\underline{\mathbf{1}} - \mathbf{v}\|_R > 0, \tag{12}$$

dla dowolnych $\mathbf{v} \in K_n$ oraz $\mathbf{h} \in S_n$ spełniających warunki $\mathbf{h} \ne \underline{\mathbf{0}},\ \mathbf{v} \ne \underline{\mathbf{0}},\ \mathbf{v} \ne \underline{\mathbf{1}}$.

W Twierdzeniu 1 pochodne kierunkowe na brzegu zbioru S_n oznaczają pochodne jednostronne wewnętrzne. Poniżej podajemy wersje Twierdzenia 1 gdy rozpatrujemy niemalejacy funkcjonał użyteczności U. Oczywiście, w rozważanej poniżej wersji Twierdzenia 1, pochodne kierunkowe na brzegu zbioru S_n są pochodnymi jednostronnymi wewnetrznymi.

Twierdzenie 1'. Niech dla wszystkich $\mathbf{v} \in K_n$ i dla dowolnego $\mathbf{h} \in S_n$ takich, że $\mathbf{h} \ne \underline{\mathbf{0}} = (0,0,...,0),\ \mathbf{v} \ne \underline{\mathbf{0}},\ \mathbf{v} \ne \underline{\mathbf{1}}$ zachodzi nierówność

$$\nabla_{\mathbf{h}} \|\mathbf{v}\|_R - \nabla_{\mathbf{h}} \|\underline{\mathbf{1}} - \mathbf{v}\|_R \ge 0,$$

czyli różnica pochodnych kierunkowych norm $\mathbf{v}$ oraz $\underline{\mathbf{1}} - \mathbf{v}$, w kierunku $\mathbf{h}$, jest nieujemna. Wtedy, dla wszystkich $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in K_n$ takich, że $\underline{\mathbf{0}} \le \mathbf{x} \le \mathbf{y} \le \underline{\mathbf{1}}$ zachodzi warunek $U_R(\mathbf{x}) \le U_R(\mathbf{y})$. Na odwrót, jeśli $U_R(\mathbf{x}) \le U_R(\mathbf{y})$ dla wszystkich $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in K_n$ takich, że $\underline{\mathbf{0}} \le \mathbf{x} \le \mathbf{y} \le \underline{\mathbf{1}}$ to

$$\nabla_{\mathbf{h}} \|\mathbf{v}\|_R - \nabla_{\mathbf{h}} \|\underline{\mathbf{1}} - \mathbf{v}\|_R \ge 0,$$

dla wszystkich $\mathbf{v} \in K_n$ oraz $\mathbf{h} \in S_n$ spełniających warunki $\mathbf{h} \ne \underline{\mathbf{0}},\ \mathbf{v} \ne \underline{\mathbf{0}},\ \mathbf{v} \ne \underline{\mathbf{1}}$.

Dowód Twierdzenia 1. *Krok 1.* Niech $\underline{\mathbf{0}} < \mathbf{x} < \mathbf{y} \le \underline{\mathbf{1}}$. Skoro $\mathbf{x} < \mathbf{y}$ to $\mathbf{y} - \mathbf{x} \in S_n$. Zatem wystarczy policzyć pochodną U_R w kierunku $\mathbf{h} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$ (gdyż $\mathbf{x} \ne \mathbf{y}$)

$$\nabla_{\mathbf{h}} U_R(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\|\underline{\mathbf{1}}\|_R}\left(\nabla_{\mathbf{h}} \|\mathbf{x}\|_R - \nabla_{\mathbf{h}} \|\underline{\mathbf{1}} - \mathbf{x}\|_R\right)$$

$$= \frac{1}{2\|\underline{\mathbf{1}}\|_R}\left(\nabla_{\mathbf{h}} \|\mathbf{x}\|_R - \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left(\|\underline{\mathbf{1}} - \mathbf{x} - t\ \ \mathbf{h}\|_R - \|\underline{\mathbf{1}} - \mathbf{x}\|_R\right)\right). \tag{13}$$

Jeśli $\mathbf{h} \in intS_n = (0, \infty)^n$ to całkując $\nabla_{\mathbf{h}} U_R(\mathbf{x})$ na odcinku $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ wartość pochodnej w jednym punkcie można pominąć. Ponadto, w skończenie wymiarowej przestrzeni wszystkie normy są równoważne (patrz [Dunford i in. 1958]). Zatem norma $\|\cdot\|_R$ jest ciągła względem normy Euklidesowej.

Krok 2. Jeśli $\mathbf{x} = \underline{\mathbf{0}}$ to oczywiście $U_R(\mathbf{x}) = 0$. Ponadto $U_R(\mathbf{x}) < U_R(\mathbf{y})$. Istotnie, wystarczy rozważać przyrosty argumentu od $\mathbf{y}/2^k$ do punktu $\mathbf{y}/2^{k-1}$ dla $k \in \mathrm{N}$. Na mocy pierwszej części dowodu $U_R(\mathbf{y}/2^k) < U_R(\mathbf{y}/2^{k-1})$ dla $1 \le k \in \mathbb{N}$. W skończenie wymiarowej przestrzeni wszystkie normy są równoważne, zatem $\mathbf{y}/2^k \quad \to \quad \mathbf{x} = \underline{\mathbf{0}}$, czyli $\left\|\mathbf{y}/2^k\right\|_R \to \|\mathbf{x}\|_R = \|\underline{\mathbf{0}}\|_R$ oraz $\left\|\underline{\mathbf{1}} - \mathbf{y}/2^k\right\|_R \to \|\underline{\mathbf{1}} - \mathbf{x}\|_R = \|\underline{\mathbf{1}}\|_R$ gdy $k \to \infty$.

Oczywisty dowód twierdzenia odwrotnego pozostawiamy czytelnikowi.

Twierdzenie 1' dowodzimy tak samo jak twierdzenie 1.

Wniosek 2. W Twierdzeniu 1 warunek (8) możemy zastapić przez

$$\frac{\partial}{\partial v_k}\|\mathbf{v}\|_R - \frac{\partial}{\partial v_k}\|\underline{\mathbf{1}} - \mathbf{v}\|_R > 0 \tag{14}$$

dla każdego $k \in \{1,2,...,n\}$, gdzie $\mathbf{v} = (v_1,..,v_k,..,v_n)$, $\mathbf{v} \ne \underline{\mathbf{0}}$, $\mathbf{v} \ne \underline{\mathbf{1}}$, $\mathbf{v} \in K_n$. Na brzegu S_n pochodne cząstkowe oznaczają pochodne jednostronne.

Istotnie, dowolny wektor $\mathbf{h} \in S_n$ $(\mathbf{h} \ne \underline{\mathbf{0}})$ jest kombinacją wypukłą wektorów $(1,0,...,0)$, $(0,1,...,0)$, ..., $(0,0,...,0,1)$. Czyli $\mathbf{h} = (1,0,...,0)a_1 + (0,1,...,0)a_2 + (0,0,...,0,1)a_n$, gdzie $a_i \ge 0$ dla $i \in \{1,2,...,n\}$.

Poniżej rozpatrujemy ogólny przypadek gdy norma $\|\cdot\|$ może być nie różniczkowalna.

Twierdzenie 2. Niech dla wszystkich $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in K_n$ i dla dowolnego $\mathbf{h} \in S_n$ takich, że $\mathbf{h} \ne \underline{\mathbf{0}}$

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \underline{\mathbf{1}} = (1,1,...,1) \in \Re^n, \tag{15}$$

$$\begin{cases} \mathbf{v} + \mathbf{h} \in K_n \quad \text{oraz} \quad \mathbf{w} - \mathbf{h} \in K_n \\ \qquad\qquad \text{lub} \\ \mathbf{v} - \mathbf{h} \in K_n \quad \text{oraz} \quad \mathbf{w} + \mathbf{h} \in K_n, \end{cases} \tag{16}$$

będzie spełniony warunek

$$(\|\mathbf{v} + \mathbf{h}\| - \|\mathbf{v}\|) - (\|\mathbf{w} - \mathbf{h}\| - \|\mathbf{w}\|) > 0 \tag{17}$$

o ile $\mathbf{v} + \mathbf{h} \in K_n$ i $\mathbf{w} - \mathbf{h} \in K_n$, oraz warunek

$$-\left(\|\mathbf{v}-\mathbf{h}\|-\|\mathbf{v}\|\right)+\left(\|\mathbf{w}+\mathbf{h}\|-\|\mathbf{w}\|\right)>0 \tag{18}$$

o ile $\mathbf{v}-\mathbf{h}\in K_n$ i $\mathbf{w}+\mathbf{h}\in K_n$. Wtedy dla dowolnych $\mathbf{x},\mathbf{y}\in K_n$ takich, że $\underline{\mathbf{0}}\leq\mathbf{x}<\mathbf{y}\leq\underline{\mathbf{1}}$ zachodzi nierówność

$$U(\mathbf{x})<U(\mathbf{y}) \tag{19}$$

gdzie U jest zdefiniowane wzorem (4).

Na odwrót, jeśli dla wszystkich $\mathbf{x},\mathbf{y}\in K_n$ takich, że $\underline{\mathbf{0}}\leq\mathbf{x}<\mathbf{y}\leq\underline{\mathbf{1}}$, zachodzi warunek (19), to dla wszystkich $\mathbf{v},\mathbf{w}\in K_n$ i dla dowolnego $\mathbf{h}\in S_n$ spełniajacych (15), (16) oraz $\mathbf{h}\neq\underline{\mathbf{0}}$ uzyskujemy nierówność (17) o ile $\mathbf{v}+\mathbf{h}\in K_n$ i $\mathbf{w}-\mathbf{h}\in K_n$, oraz nierówność (18) o ile $\mathbf{v}-\mathbf{h}\in K_n$ i $\mathbf{w}+\mathbf{h}\in K_n$.

Poniżej podajemy wersję Twierdzenia 2, gdy rozpatrywany jest niemalejący funkcjonał użyteczności U.

Twierdzenie 2'. Niech dla wszystkich $\mathbf{v},\mathbf{w}\in K_n$ i dla dowolnego $\mathbf{h}\in S_n$ spełniających warunki (15), (16) i $\mathbf{h}\neq\underline{\mathbf{0}}$ zachodzi nierówność

$$\left(\|\mathbf{v}+\mathbf{h}\|-\|\mathbf{v}\|\right)-\left(\|\mathbf{w}-\mathbf{h}\|-\|\mathbf{w}\|\right)\geq 0 \tag{20}$$

o ile $\mathbf{v}+\mathbf{h}\in K_n$ i $\mathbf{w}-\mathbf{h}\in K_n$, oraz warunek

$$-\left(\|\mathbf{v}-\mathbf{h}\|-\|\mathbf{v}\|\right)+\left(\|\mathbf{w}+\mathbf{h}\|-\|\mathbf{w}\|\right)\geq 0 \tag{21}$$

o ile $\mathbf{v}-\mathbf{h}\in K_n$ i $\mathbf{w}+\mathbf{h}\in K_n$. Wtedy dla dowolnych $\mathbf{x},\mathbf{y}\in K_n$ takich, że $\underline{\mathbf{0}}\leq\mathbf{x}<\mathbf{y}\leq\underline{\mathbf{1}}$ zachodzi nierówność $U(\mathbf{x})\leq U(\mathbf{y})$.

Na odwrót, jeśli dla wszystkich $\mathbf{x},\mathbf{y}\in K_n$ takich, że $\underline{\mathbf{0}}\leq\mathbf{x}<\mathbf{y}\leq\underline{\mathbf{1}}$, mamy $U(\mathbf{x})\leq U(\mathbf{y})$, to dla wszystkich $\mathbf{v},\mathbf{w}\in K_n$ i dla dowolnego $\mathbf{h}\in S_n$ spełniających (15), (16) oraz $\mathbf{h}\neq\underline{\mathbf{0}}$ uzyskujemy warunek (20) o ile $\mathbf{v}+\mathbf{h}\in K_n$ i $\mathbf{w}-\mathbf{h}\in K_n$, oraz nierówność (21) o ile $\mathbf{v}-\mathbf{h}\in K_n$ i $\mathbf{w}+\mathbf{h}\in K_n$.

Dowody twierdzeń 2 i 2' sa analogiczne do dowodu Twierdzenia 1. Wystarczy rozważać przyrosty skończone. Dowód Twierdzenia 2 podajemy w 2 cześci pracy.

Definicja 7. Na kostce K_n definiujemy metrykę

$$K_n\times K_n \ni (\mathbf{v},\mathbf{w})\mapsto d(\mathbf{v},\mathbf{w})\in[0,\infty) \tag{22}$$

spełniającą aksjomaty (patrz [Sieklucki 1979, Rozdział 2, Paragraf 1], [Kuratowski 1977, Rozdział 9, Paragraf 1])

(α) $d(\mathbf{v},\mathbf{w})=0$ wtedy i tylko wtedy gdy $\mathbf{v}=\mathbf{w}$, (23)

(β) $d(\mathbf{v},\mathbf{w})=d(\mathbf{w},\mathbf{v})$ dla wszystkich $\mathbf{v},\mathbf{w}\in K_n$, (24)

(γ) $d(\mathbf{v},\mathbf{z})\leq d(\mathbf{v},\mathbf{w})+d(\mathbf{w},\mathbf{z})$ dla wszystkich $\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{z}\in K_n$. (25)

Podamy teraz sformułowanie Twierdzenia 2 w wersji dla przestrzeni metrycznych.

Twierdzenie 3. Niech dla wszystkich $\mathbf{v},\mathbf{w}\in K_n$ i dla dowolnego $\mathbf{h}\in S_n$ takich, że $\mathbf{h}\neq \underline{\mathbf{0}}$

$$\mathbf{v}+\mathbf{w}=\underline{\mathbf{1}}=(1,1,...,1)\in\Re^n, \tag{26}$$

$$\begin{cases} \mathbf{v}+\mathbf{h}\in K_n \quad \text{oraz} \quad \mathbf{w}-\mathbf{h}\in K_n \\ \qquad\qquad \text{lub} \\ \mathbf{v}-\mathbf{h}\in K_n \quad \text{oraz} \quad \mathbf{w}+\mathbf{h}\in K_n, \end{cases} \tag{27}$$

będzie spełniony warunek

$$\big(d(\mathbf{v}+\mathbf{h},\underline{\mathbf{0}})-d(\mathbf{v},\underline{\mathbf{0}})\big)-\big(d(\mathbf{w}-\mathbf{h},\underline{\mathbf{0}})-d(\mathbf{w},\underline{\mathbf{0}})\big)>0 \tag{28}$$

o ile $\mathbf{v}+\mathbf{h}\in K_n$ i $\mathbf{w}-\mathbf{h}\in K_n$, oraz warunek

$$-\big(d(\mathbf{v}-\mathbf{h},\underline{\mathbf{0}})-d(\mathbf{v},\underline{\mathbf{0}})\big)+\big(d(\mathbf{w}+\mathbf{h},\underline{\mathbf{0}})-d(\mathbf{w},\underline{\mathbf{0}})\big)>0 \tag{29}$$

o ile $\mathbf{v}-\mathbf{h}\in K_n$ i $\mathbf{w}+\mathbf{h}\in K_n$. Wtedy dla dowolnych $\mathbf{x},\mathbf{y}\in K_n$ takich, że $\underline{\mathbf{0}}\leq\mathbf{x}<\mathbf{y}\leq\underline{\mathbf{1}}$ zachodzi nierówność

$$U_M(\mathbf{x})<U_M(\mathbf{y}) \tag{30}$$

gdzie

$$K_n\ni\mathbf{x}\mapsto U_M(\mathbf{x})=\frac{d(\mathbf{x},\underline{\mathbf{0}})+d(\underline{\mathbf{1}},\underline{\mathbf{0}})-d(\underline{\mathbf{1}},\mathbf{x})}{2d(\underline{\mathbf{1}},\underline{\mathbf{0}})}. \tag{31}$$

Zachodzi też twierdzenie odwrotne. ■

Poniżej podajemy wersję Twierdzenia 3 gdy rozpatrywany jest niemalejący funkcjonał użyteczności U_M.

Twierdzenie 3'. Niech dla wszystkich $\mathbf{v},\mathbf{w}\in K_n$ i dla dowolnego $\mathbf{h}\in S_n$ spełniajacych warunki (26), (27) i $\mathbf{h}\neq\underline{\mathbf{0}}$ zachodzi nierówność

$$\big(d(\mathbf{v}+\mathbf{h},\underline{\mathbf{0}})-d(\mathbf{v},\underline{\mathbf{0}})\big)-\big(d(\mathbf{w}-\mathbf{h},\underline{\mathbf{0}})-d(\mathbf{w},\underline{\mathbf{0}})\big)\geq 0$$

o ile $\mathbf{v}+\mathbf{h}\in K_n$ i $\mathbf{w}-\mathbf{h}\in K_n$, oraz warunek

$$-\big(d(\mathbf{v}-\mathbf{h},\underline{\mathbf{0}})-d(\mathbf{v},\underline{\mathbf{0}})\big)+\big(d(\mathbf{w}+\mathbf{h},\underline{\mathbf{0}})-d(\mathbf{w},\underline{\mathbf{0}})\big)\geq 0$$

o ile $\mathbf{v}-\mathbf{h}\in K_n$ i $\mathbf{w}+\mathbf{h}\in K_n$. Wtedy dla dowolnych $\mathbf{x},\mathbf{y}\in K_n$ takich, że $\underline{\mathbf{0}}\leq\mathbf{x}<\mathbf{y}\leq\underline{\mathbf{1}}$ zachodzi nierówność

$$U_M(\mathbf{x})\leq U_M(\mathbf{y}).$$

Zachodzi też twierdzenie odwrotne. ■

Proste dowody twierdzeń 3 i 3' są modyfikacjami dowodu Twierdzenia 2.

PRZYKŁADY LOKALNIE MALEJĄCYCH FUNKCJI UŻYTECZNOŚCI

W rozdziale tym podajemy przykłady norm definiujących niemonotoniczne funkcje użyteczności, a ściślej lokalnie malejące funkcje użyteczności. Mianowicie pokażemy przykłady funkcji użyteczności U takich, że istnieją $\underline{\mathbf{0}} < \mathbf{x} < \mathbf{y} < \underline{\mathbf{1}}$ oraz $U(\mathbf{x}) > U(\mathbf{y})$.

Definicja 8. Określamy nastepujące normy

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| = |x_1| + |x_2| + ... + |x_n| \tag{32}$$

oraz

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|) \tag{33}$$

dla dowolnego $\mathbf{x} \in \Re^n$. Nie będziemy udowadniać, że zdefiniowane pojęcia są normami, gdyż $\|\cdot\|_1$ jest odpowiednikiem normy $\|\cdot\|_{L^1}$ (w przestrzeni L^1 lub l^1) w przypadku gdy miarę Lebesgue'a zastapimy przez n delt Diraca δ (gdzie miara jest skoncentrowana w n różnych punktach). Podobnie $\|\cdot\|_\infty$ jest odpowiednikiem normy $\|\cdot\|_{L^\infty}$ (w przestrzeni L^∞) w przypadku gdy miarę Lebesgue'a zastąpimy przez n delt Diraca δ.

Przykład 1. Pokazujemy, że dla dowolnego $\mathbf{v} \in (0,1)^n$

$$\frac{\partial}{\partial v_i}\|\mathbf{v}\|_1 - \frac{\partial}{\partial v_i}\|\underline{\mathbf{1}} - \mathbf{v}\|_1 = \frac{\partial}{\partial v_i}|v_i| - \frac{\partial}{\partial v_i}|1 - v_i| = 2 > 0 \tag{34}$$

dla wszystkich $i \in \{1,...,n\}$. Ponadto pochodne jednostronne na brzegu obszaru $K_n = [0,1]^n$ są dodatnie oraz $\frac{\partial}{\partial v_i}\|\mathbf{v}\|_1 - \frac{\partial}{\partial v_i}\|\underline{\mathbf{1}} - \mathbf{v}\|_1 = 2$ dla wszystkich $i \in \{1,...,n\}$, $\mathbf{v} \in K_n$. Na mocy Wniosku 3, jeśli $\underline{\mathbf{0}} \le \mathbf{x} < \mathbf{y} \le \underline{\mathbf{1}}$ to

$$U_1(\mathbf{x}) < U_1(\mathbf{y}), \tag{35}$$

gdzie

$$K_n \ni \mathbf{x} \mapsto U_1(\mathbf{x}) = \frac{\|\mathbf{x}\|_1 + \|\underline{\mathbf{1}}\|_1 - \|\underline{\mathbf{1}} - \mathbf{x}\|_1}{2\|\underline{\mathbf{1}}\|_1}. \tag{36}$$

Lemat 1. Pokażemy, że dla dowolnych $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in (0,\infty)^2$ i dla dowolnego $\mathbf{h} \in S_2 = [0,\infty)^2$ takich, że $\mathbf{h} \ne \underline{\mathbf{0}}$

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \underline{\mathbf{1}} = (1,1) \in \Re^2, \tag{37}$$

$$\begin{cases} \mathbf{v}+\mathbf{h}\in K_2 \quad \text{oraz} \quad \mathbf{w}-\mathbf{h}\in K_2=[0,1]^2 \\ \qquad\qquad \text{lub} \\ \mathbf{v}-\mathbf{h}\in K_2 \quad \text{oraz} \quad \mathbf{w}+\mathbf{h}\in K_2, \end{cases} \tag{38}$$

jest spełniony warunek

$$\left(\|\mathbf{v}+\mathbf{h}\|_\infty-\|\mathbf{v}\|_\infty\right)-\left(\|\mathbf{w}-\mathbf{h}\|_\infty-\|\mathbf{w}\|_\infty\right)>0 \tag{39}$$

o ile $\mathbf{v}+\mathbf{h}\in K_2$ i $\mathbf{w}-\mathbf{h}\in K_2$, oraz warunek

$$-\left(\|\mathbf{v}-\mathbf{h}\|_\infty-\|\mathbf{v}\|_\infty\right)+\left(\|\mathbf{w}+\mathbf{h}\|_\infty-\|\mathbf{w}\|_\infty\right)>0 \tag{40}$$

o ile $\mathbf{v}-\mathbf{h}\in K_2$ i $\mathbf{w}+\mathbf{h}\in K_2$.

Przypominamy, że $\|\mathbf{v}\|_\infty=\|(v_1,v_2)\|_\infty=\max\left(|v_1|,|v_2|\right)$.

Dowód. Jeśli $\mathbf{h}=(h_1,h_2)$, gdzie $h_1>0$ oraz $h_2>0$ to oczywiście teza lematu jest spełniona.

Niech $\mathbf{h}=(h_1,0)$; $h_1>0$; $\mathbf{v}=(v_1,v_2)$ gdzie $v_1\ge v_2$, zatem $\mathbf{w}=(w_1,w_2)=(1-v_1,\ 1-v_2)$ i $w_1\le w_2$.

Wtedy

$$\|\mathbf{v}+\mathbf{h}\|_\infty-\|\mathbf{v}\|_\infty=|v_1+h_1|-|v_1|=h_1>0, \tag{41}$$

$$\|\mathbf{w}\|_\infty-\|\mathbf{w}-\mathbf{h}\|_\infty=|w_2|-|w_2|=0 \tag{42}$$

czyli warunek (39) jest spełniony o ile $\mathbf{v}+\mathbf{h}\in K_2$ oraz $\mathbf{w}-\mathbf{h}\in K_2$.

Niech $\mathbf{h}=(h_1,0)$; $h_1>0$; $\mathbf{v}=(v_1,v_2)$ gdzie $v_1<v_2$, zatem $(w_1,w_2)=(1-v_1,\ 1-v_2)$ i $w_1>w_2$. Wtedy uzyskujemy

$$\|\mathbf{v}+\mathbf{h}\|_\infty-\|\mathbf{v}\|_\infty=\sup\left(|v_1+h_1|,|v_2|\right)-|v_2|\ge 0, \tag{43}$$

$$\|\mathbf{w}\|_\infty-\|\mathbf{w}-\mathbf{h}\|_\infty=|w_1|-\sup\left(|w_1+h_1|,|w_2|\right)>0 \tag{44}$$

czyli warunek (39) jest spełniony o ile $\mathbf{v}+\mathbf{h}\in K_2$ oraz $\mathbf{w}-\mathbf{h}\in K_2$. Dowód faktu, że warunek (39) jest spełniony dla przyrostu $\mathbf{h}=(0,h_2)$ jest analogiczny. Warunek (40) dowodzimy w sposób podobny. ■

Uwaga 3. Teza Lematu 1 nie jest spełniona dla $n\ge 3$, czyli dla norm $\|(v_1,v_2,\dots,v_n)\|_\infty=\sup\left(|v_1|,|v_2|,\dots,|v_n|\right)$ gdy $n\ge 3$. W tym przypadku dla $\underline{\mathbf{0}}\le\mathbf{x}<\mathbf{y}\le\underline{\mathbf{1}}$ zachodzi nierówność $U(\mathbf{x})\le U(\mathbf{y})$ gdzie

$$K_n\ni\mathbf{x}\mapsto U(\mathbf{x})=\frac{\|\mathbf{x}\|_\infty+\|\underline{\mathbf{1}}\|_\infty-\|\underline{\mathbf{1}}-\mathbf{x}\|_\infty}{2\|\underline{\mathbf{1}}\|_\infty} \tag{45}$$

oraz $\mathbf{x}\in\Re^n$, $\mathbf{y}\in\Re^n$, $n\ge 3$, czyli funkcja użyteczności jest niemalejąca.

Przykład 2. Rozważamy przestrzeń $\mathbb{R}^2$ z dwoma układami odniesienia v_1, v_2 oraz x_1, x_2. Układy te są obrócone o kąt α. Zatem współrzędne transformują się zgodnie ze wzorem

$$\begin{cases} v_1 = \cos(\alpha)x_1 + \sin(\alpha)x_2 \\ v_2 = -\sin(\alpha)x_1 + \cos(\alpha)x_2, \end{cases} \tag{46}$$

porównaj [Jefimow i in. 1974, Rozdział 9, Paragraf 7].

Niech $\mathbf{A}$ będzie funkcjonałem liniowym różnowartościowym $\mathbf{A}: \Re^2 \to \Re^2$. Wtedy dla dowolnej normy $\|\cdot\|$ funkcjonał

$$\Re^2 \ni (v_1, v_2) \mapsto \|\mathbf{A}(v_1, v_2)\| \tag{47}$$

też jest normą. Istotnie

a) $\|\mathbf{A}(v_1, v_2)\| \geq 0 \ \ \forall (v_1, v_2) \in \Re^2$ bo $\|(w_1, w_2)\| \geq 0 \ \ \forall (w_1, w_2) \in \Re^2$,

$\mathbf{A}(0,0) = (0,0)$ oraz $\mathbf{A}$ jest operatorem różnowartościowym,

b) $\|\mathbf{A}(c \cdot v_1, c \cdot v_2)\| = \|c \cdot \mathbf{A}(v_1, v_2)\| = |c| \cdot \|\mathbf{A}(v_1, v_2)\| \ \ \forall (v_1, v_2) \in \Re^2, \ \forall c \in \Re$,

c) $\|\mathbf{A}[(v_1, v_2) + (w_1, w_2)]\| = \|\mathbf{A}(v_1, v_2) + \mathbf{A}(w_1, w_2)\| \leq \|\mathbf{A}(v_1, v_2)\| + \|\mathbf{A}(w_1, w_2)\|$

$\forall (v_1, v_2), \ (w_1, w_2) \in \Re^2$.

Norma $\|\mathbf{v}\|_1 = \|(v_1, v_2)\|_1 = |v_1| + |v_2|$ po zmianie układu współrzędnych ma postać

$$\begin{aligned} \|(v_1, v_2)\|_1 &= |v_1| + |v_2| = |\cos(\alpha)x_1 + \sin(\alpha)x_2| + \\ &+ |-\sin(\alpha)x_1 + \cos(\alpha)x_2| = \|(x_1, x_2)\|_{1,\alpha}, \end{aligned} \tag{48}$$

porównaj wzór (46). Jeśli $\alpha = \pi/4$ to uzyskujemy

$$\begin{aligned} \|(v_1, v_2)\|_1 &= \sqrt{2}\left(\left| \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \right| + \left| -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \right| \right) = \\ &= \sqrt{2}\max(|x_1|, |x_2|) = \sqrt{2}\|(x_1, x_2)\|_\infty. \end{aligned} \tag{49}$$

Zatem norma $\|\cdot\|_1$ jest obróconą normą $\|\cdot\|_\infty$ i pomnożoną przez stałą.

Na mocy punktów (a)-(c), funkcjonał

$$\Re^2 \ni (x_1, x_2) \mapsto \sqrt{2}\|(x_1, x_2)\|_{\infty,20} = \sqrt{2}\|(20x_1, x_2)\|_\infty \tag{50}$$

jest normą. Rozważamy obrót

$$\begin{cases} x_1 = \cos(\beta)y_1 + \sin(\beta)y_2 \\ x_2 = -\sin(\beta)y_1 + \cos(\beta)y_2. \end{cases} \tag{51}$$

Norma $(x_1, x_2) \mapsto \sqrt{2}\|(x_1, x_2)\|_{\infty,20}$ po dokonaniu obrotu przyjmuje postać

$$\|(x_1,x_2)\|_{\infty,20} = \|(20x_1,x_2)\|_{\infty} = \max\{|20(\cos(\beta)y_1+\sin(\beta)y_2)|,$$
$$|-\sin(\beta)y_1+\cos(\beta)y_2|\} = \|(y_1,y_2)\|_{\infty,20,\beta}. \tag{52}$$

Rozpatrujemy obrót o kąt $\beta = -\pi/6$. Czyli

$$\sqrt{2}\|(y_1,y_2)\|_{\infty,20,\beta} = \sqrt{2}\max\left(\left|10\sqrt{3}y_1 - 10y_2\right|, \left|\frac{1}{2}y_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}y_2\right|\right). \tag{53}$$

Obliczamy $\left(\|\mathbf{v}+\mathbf{h}\|_{\infty,20,\beta} - \|\mathbf{v}\|_{\infty,20,\beta}\right) - \left(\|\mathbf{w}-\mathbf{h}\|_{\infty,20,\beta} - \|\mathbf{w}\|_{\infty,20,\beta}\right)$ dla $\mathbf{v} = \mathbf{w} = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ oraz $\mathbf{h} = \left(0,\frac{1}{100}\right)$. Uzyskujemy

$$\left(\left\|\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)+\left(0,\frac{1}{100}\right)\right\|_{\infty,20,\beta} - \left\|\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right\|_{\infty,20,\beta}\right)$$
$$-\left(\left\|\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)-\left(0,\frac{1}{100}\right)\right\|_{\infty,20,\beta} - \left\|\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right\|_{\infty,20,\beta}\right)$$
$$= \left|10\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{50}{100} - 10\cdot\frac{51}{100}\right| - \left|10\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{50}{100} - 10\cdot\frac{49}{100}\right| = -0{,}2 \tag{54}$$

Na mocy Twierdzenia 2', funkcjonał użyteczności U zdefiniowany dla normy $\|\cdot\|_{\infty,20,\beta}$, jest funkcjonałem malejącym w otoczeniu punktu $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ dla przyrostu $\left(0,\frac{1}{100}\right)$.

Przykład 3. Na przestrzeni $\Re^n$ definiujemy normę

$$\Re^n \ni (x_1,\dots,x_n) \mapsto \|(x_1,x_2,\dots,x_n)\|_{\infty,20} = \|(20x_1,x_2,\dots,x_n)\|_{\infty}. \tag{55}$$

Ponadto, w $\Re^n$ rozważamy dwa układy odniesienia $x_1,\dots,x_n$ oraz $y_1,\dots,y_n$. Zakładamy, że współrzędne transformują się zgodnie ze wzorami

$$\begin{cases} x_1 = \cos(\beta)y_1 + \sin(\beta)y_2 \\ x_2 = -\sin(\beta)y_1 + \cos(\beta)y_2 \\ x_3 = y_3 \\ \quad\cdot \\ x_n = y_n \quad . \end{cases} \tag{56}$$

Norma $(x_1, x_2,..., x_n) \mapsto \|(x_1, x_2,..., x_n)\|_{\infty,20}$ po dokonaniu obrotu (56) przyjmuje postać

$$\|(x_1, x_2,..., x_n)\|_{\infty,20} = \|(20x_1, x_2,..., x_n)\|_{\infty} =$$
$$= \max\left(\left|20(\cos(\beta)y_1 + \sin(\beta)y_2)\right|, \left|-\sin(\beta)y_1 + \cos(\beta)y_2\right|, |y_3|,..., |y_n|\right)$$
$$= \|(y_1, y_2, y_3,..., y_n)\|_{\infty,20,\beta}. \tag{57}$$

Rozpatrujemy obrót o kąt $\beta = -\pi/6$. Czyli

$$\|(y_1,..., y_n)\|_{\infty,20,\beta} = \max\left(\left|10\sqrt{3}y_1 - 10y_2\right|, \left|\frac{1}{2}y_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}y_2\right|,..., |y_n|\right).$$

Obliczamy $\left(\|\mathbf{v}+\mathbf{h}\|_{\infty,20,\beta} - \|\mathbf{v}\|_{\infty,20,\beta}\right) - \left(\|\mathbf{w}-\mathbf{h}\|_{\infty,20,\beta} - \|\mathbf{w}\|_{\infty,20,\beta}\right)$ dla $\mathbf{v} = \mathbf{w} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2},..., \frac{1}{2}\right) \in \Re^n$ oraz $\mathbf{h} = \left(0, \frac{1}{100}, 0,..., 0\right) \in \Re^n$. Uzyskujemy

$$\left(\left\|\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2},..., \frac{1}{2}\right) + \left(0, \frac{1}{100}, 0,..., 0\right)\right\|_{\infty,20,\beta} - \left\|\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2},..., \frac{1}{2}\right)\right\|_{\infty,20,\beta}\right)$$
$$-\left(\left\|\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2},..., \frac{1}{2}\right) - \left(0, \frac{1}{100}, 0,..., 0\right)\right\|_{\infty,20,\beta} - \left\|\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2},..., \frac{1}{2}\right)\right\|_{\infty,20,\beta}\right) =$$
$$= \left|10\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{50}{100} - 10\cdot\frac{51}{100}\right| - \left|10\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{50}{100} - 10\cdot\frac{49}{100}\right| = -0{,}2. \tag{58}$$

Na mocy Twierdzenia 2', funkcja użyteczności $U_{\infty,20,\beta}$ zdefiniowana dla normy $\|\cdot\|_{\infty,20,\beta}$ w przestrzeni $\Re^n$, jest funkcją malejącą w otoczeniu punktu $(0{,}5; 0{,}5; 0{,}5;...; 0{,}5)$ dla przyrostu $(0; 0{,}01; 0;...; 0)$. Mianowicie uzyskaliśmy: $U_{\infty,20,\beta}(0{,}5; 0{,}5; 0{,}5;...; 0{,}5) > U_{\infty,20,\beta}(0{,}5; 0{,}51; 0{,}5;...; 0{,}5)$.

Przykład 4. Niech współrzędne (x_1, x_2) oraz (y_1, y_2) układów odniesienia $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ oraz $(\hat{y}_1, \hat{y}_2)$, spełniają równości

$$\begin{cases} x_1 = \cos(\alpha)y_1 + \sin(\alpha)y_2 \\ x_2 = -\sin(\alpha)y_1 + \cos(\alpha)y_2, \end{cases} \tag{59}$$

czyli są to układy odniesienia obrócone o kąt α. Ponadto, niech na $\Re^n$ będzie dana norma $\|\cdot\|_{1,\,\pi/4,20,\;\alpha}$ wzorem

$$\|\mathbf{y}\|_{1,\pi/4,20,\alpha}=\left|20\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x_1+\frac{\sqrt{2}}{2}x_2\right)\right|+\left|-\frac{\sqrt{2}}{2}x_1+\frac{\sqrt{2}}{2}x_2\right|+\ldots+|y_n|$$

$$=\left|20\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos(\alpha)y_1+\sin(\alpha)y_2)+\frac{\sqrt{2}}{2}(-\sin(\alpha)y_1+\cos(\alpha)y_2)\right)\right|+$$

$$+\left|-\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos(\alpha)y_1+\sin(\alpha)y_2)+\frac{\sqrt{2}}{2}(-\sin(\alpha)y_1+\cos(\alpha)y_2)\right|+\ldots+|y_n|. \quad (60)$$

Rozpatrujemy przypadek $\alpha=-\pi/6$. Obliczamy $\|\mathbf{v}+\mathbf{h}\|_{1,\pi/4,20,\alpha}-\|\mathbf{v}\|_{1,\pi/4,20,\alpha}-\left(\|\mathbf{w}-\mathbf{h}\|_{1,\pi/4,20,\alpha}-\|\mathbf{w}\|_{1,\pi/4,20,\alpha}\right)$ dla $\mathbf{v}=\mathbf{w}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{2}\right)\in\Re^n$ oraz $\mathbf{h}=\left(0,\frac{1}{100},0,\ldots,0\right)\in\Re^n$. Uzyskujemy

$$\left\|\left(\frac{1}{2},\frac{51}{100},\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{2}\right)\right\|_{1,\pi/4,20,\alpha}-\left\|\left(\frac{1}{2},\frac{49}{100},\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{2}\right)\right\|_{1,\pi/4,20,\alpha}=$$

$$=\left|20\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{51}{100}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{51}{100}\right)\right)\right|$$

$$+\left|-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{51}{100}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{51}{100}\right)\right|$$

$$-\left|20\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{49}{100}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{49}{100}\right)\right)\right|$$

$$-\left|-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{49}{100}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{49}{100}\right)\right|$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{10}+\frac{2\sqrt{6}}{200}+\frac{\sqrt{2}}{200}<-0{,}1+0{,}025+0{,}0075=-0{,}0675. \quad (61)$$

Na mocy Twierdzenia 2', funkcja użyteczności $U_{1,\pi/4,20,\alpha}$ zdefiniowana dla normy $\|\cdot\|_{1,\pi/4,20,\alpha}$ w przestrzeni $\Re^n$, jest funkcją malejącą w otoczeniu punktu $(0{,}5;\ 0{,}5;\ 0{,}5;\ldots;\ 0{,}5)$ dla przyrostu $(0;\ 0{,}01;\ 0;\ldots;\ 0)$. Rozważana tutaj funkcja dana jest wzorem (45) gdzie $\|\cdot\|_\infty$ jest zastąpione przez $\|\cdot\|_{1,\pi/4,20,\alpha}$ a U przez symbol $U_{1,\pi/4,20,\alpha}$. Ponadto uzyskaliśmy $U_{1,\pi/4,20,\alpha}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{2}\right)>$ $>U_{1,\pi/4,20,\alpha}\left(\frac{1}{2},\frac{51}{100},\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{2}\right)$. ■

Definiujemy normę $\|\cdot\|_p$ w przestrzeni $\Re^n$ wzorem

$$\Re^n \ni \mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + |x_2|^p + \ldots + |x_n|^p} \tag{62}$$

dla $p \in (1,\infty)$. Zdefiniowane pojęcie jest szczególną postacią normy przestrzeni L^p (znanej z analizy funkcjonalnej) gdy miarę Lebesgue'a zastapimy przez *n* delt Diraca δ (czyli miara jest skoncentrowana w *n* różnych punktach).

Lemat 2. Jeżeli *p* dąży do ∞, to dla każdego $x \in \Re^n$ (por. (33)).

$$\|\mathbf{x}\|_p \to \|\mathbf{x}\|_\infty \quad \text{jeśli} \quad p \to \infty. \tag{63}$$

Dowód. Niech $|x_k| = \max(|x_1|,|x_2|,\ldots,|x_n|)$ dla ustalonego $k \in \{1,\ldots,n\}$. Wtedy

$$\begin{aligned} |x_k| &\le \sqrt[p]{|x_k|^p} \le \sqrt[p]{|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p} \le \sqrt[p]{n|x_k|^p} = \\ &= \sqrt[p]{n}\cdot|x_k| \to |x_k| \quad \text{o ile} \quad p \to \infty, \end{aligned} \tag{64}$$

ponieważ $\sqrt[p]{n} \to 1$ gdy $p \to \infty$. ■

Lemat 3. Jeśli ciąg malejący $\{p_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ dąży do 1 (co oznaczamy $p \downarrow 1$) to dla każdego $\mathbf{x} \in \Re^n$, $\|\mathbf{x}\|_p \to \|\mathbf{x}\|_1$ gdzie $\|\mathbf{x}\|_1 = \|(x_1,\ldots,x_n)\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$.

Dowód. Niech $\mathbf{x} \ne \underline{\mathbf{0}}$. Wtedy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $p_\varepsilon > 1$ takie, że dla dowolnego $p_\alpha \le p_\varepsilon$ spełniającego warunek $p_\alpha > 1$ mamy

$$\left| |x_i|^{p_\alpha} - |x_i| \right| < \varepsilon \quad \forall i \in \{1,\ldots,n\}. \tag{65}$$

Zatem

$$\left| \sum_{i=1}^n |x_i|^{p_\alpha} - \sum_{i=1}^n |x_i| \right| < n\varepsilon. \tag{66}$$

Ponadto istnieje $p_\delta > 1$ takie, że dla każdego $p_\beta \le p_\delta$ oraz $p_\beta > 1$ uzyskujemy

$$\left| \sqrt[p_\beta]{\sum_{i=1}^n |x_i|^{p_\alpha}} - \sum_{i=1}^n |x_i| \right| < 2n\varepsilon. \tag{67}$$

Biorac $p_\omega \le \min(p_\varepsilon, p_\delta)$ oraz $p_\omega > 1$ mamy

$$\left| \sqrt[p_\omega]{\sum_{i=1}^n |x_i|^{p_\omega}} - \sum_{i=1}^n |x_i| \right| < 2n\varepsilon. \tag{68}$$

Lemat 4. Niech norma $\|\cdot\|_{p,20,\alpha}$ będzie dana wzorem

$$\|\mathbf{y}\|_{p,20,\alpha} = \Big[\left|20(\cos(\alpha)y_1 + \sin(\alpha)y_2)\right|^p + $$

$$+ \left|-\sin(\alpha)y_1 + \cos(\alpha)y_2\right|^p + |y_3|^p + \ldots + |y_n|^p \Big]^{1/p} \tag{69}$$

gdzie $1 < p < \infty$. Wtedy, dla $\mathbf{v} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}) \in \Re^n$, $\mathbf{w} = (\frac{1}{2}, \frac{51}{100}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}) \in \Re^n$ oraz $\alpha = -\pi/6$ istnieje $p < \infty$ $(p > 1)$ takie, że

$$U_{p,20,\alpha}(\mathbf{v}) > U_{p,20,\alpha}(\mathbf{w}) \tag{70}$$

gdzie

$$K_n \ni \mathbf{y} \mapsto U_{p,20,\alpha}(\mathbf{y}) = \frac{\|\mathbf{y}\|_{p,20,\alpha} + \|\underline{\mathbf{1}}\|_{p,20,\alpha} - \|\underline{\mathbf{1}} - \mathbf{y}\|_{p,20,\alpha}}{2\|\underline{\mathbf{1}}\|_{p,20,\alpha}}. \tag{71}$$

Dowód. Z Przykładu 2 wynika, że $\Re^n \ni \mathbf{v} \mapsto \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{A},p} = \|\mathbf{A}\mathbf{v}\|_p$ jest normą dla dowolnego funkcjonału liniowego, różnowartościowego A, gdzie $\|\mathbf{z}\|_p = \sqrt[p]{|z_1|^p + \ldots + |z_n|^p}$. Zatem $\Re^n \ni \mathbf{y} \mapsto \|\mathbf{y}\|_{p,20,\alpha}$ jest normą.

Na mocy Przykładów 2 i 3 nierówność (70) zachodzi dla funkcji użyteczności $U_{p,20,\alpha}$, gdy $\alpha = -\pi/6$. Z Lematu 2 wynika, że dla każdego $\mathbf{y} \in \Re^n$

$$\|\mathbf{y}\|_{p,20,\alpha} \to \|\mathbf{y}\|_{\infty,20,\alpha} \quad \text{jeśli} \quad p \to \infty. \tag{72}$$

Lemat 5. Niech współrzędne (x_1, x_2) oraz (y_1, y_2), układów odniesienia $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ oraz $(\hat{y}_1, \hat{y}_2)$, spełniają równości

$$\begin{cases} x_1 = \cos(\alpha)y_1 + \sin(\alpha)y_2 \\ x_2 = -\sin(\alpha)y_1 + \cos(\alpha)y_2. \end{cases} \tag{73}$$

Czyli są to układy odniesienia obrócone o kąt α. Ponadto, niech na $\Re^n$ będzie zadana norma $\|\cdot\|_{p,\pi/4,20,\alpha}$ następującym wzorem

$$\Re^n \ni \mathbf{y} \mapsto \|\mathbf{y}\|_{p,\pi/4,20,\alpha} = \Bigg[\left|20\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_2\right)\right|^p +$$

$$+ \left|-\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_2\right|^p + |y_3|^p + \ldots + |y_n|^p \Bigg]^{1/p}$$

$$=\left[\left|20\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos(\alpha)y_1+\sin(\alpha)y_2\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\sin(\alpha)y_1+\cos(\alpha)y_2\right)\right)\right|^p+\right.$$

$$\left.+\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos(\alpha)y_2-\sin(\alpha)y_1\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos(\alpha)y_1+\sin(\alpha)y_2\right)\right|^p+..+\left|y_n\right|^p\right]^{1/p} \quad (74)$$

gdzie $1<p<\infty$. Wtedy, dla $\mathbf{v}=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},...,\frac{1}{2})$, $\mathbf{w}=(\frac{1}{2},\frac{51}{100},\frac{1}{2},...,\frac{1}{2})\in\Re^n$ i $\alpha=-\pi/6$ istnieje $p>1$ $(p<\infty)$ takie, że $U_{p,\pi/4,20,\alpha}(\mathbf{v})>U_{p,\pi/4,20,\alpha}(\mathbf{w})$ gdzie

$$\mathbf{y}\mapsto U_{p,\pi/4,20,\alpha}(\mathbf{y})=\frac{\|\mathbf{y}\|_{p,\pi/4,20,\alpha}+\|\underline{\mathbf{1}}\|_{p,\pi/4,20,\alpha}-\|\underline{\mathbf{1}}-\mathbf{y}\|_{p,\pi/4,20,\alpha}}{2\|\underline{\mathbf{1}}\|_{p,\pi/4,20,\alpha}}. \quad (75)$$

Dowód. Na mocy pierwszej części dowodu Lematu 4 oraz na mocy Przykładu 2, $\|\cdot\|_{p,\pi/4,20,\alpha}$ jest normą, bo transformacja (73) jest obrotem o kąt $\alpha=-\pi/6$ (a złożenie przekształceń liniowych, różnowartościowych jest przekształceniem liniowym i różnowartościowym). Z Przykładów 2 i 4 uzyskujemy, że teza Lematu 5 zachodzi dla funkcji użyteczności $U_{1,\pi/4,20,\alpha}(\cdot)$ (zdefiniowanej wzorami (60) i (75) dla $\alpha=-\pi/6$). Z Lematu 3 wynika, że dla każdego $\mathbf{y}\in\Re^n$

$$\|\mathbf{y}\|_{p,\pi/4,20,\alpha}\to\|\mathbf{y}\|_{1,\pi/4,20,\alpha} \quad \text{jeśli} \quad p\downarrow 1. \quad + \quad (76)$$

Poniżej pokazujemy, że dla dowolnego *p* (czyli dowolnej normy $\|\cdot\|_p$, gdzie $1<p<\infty$) można tak dobrać współczynnik *t* przez który mnożymy wybraną oś liczbową oraz można tak dobrać kąt obrotu współrzędnych aby funkcja użyteczności była malejąca w otoczeniu pewnego punktu z K_n.

Przykład 5. Pokażemy, że warunek (20) z Twierdzenia 2' nie jest spełniony.

Rozważamy przestrzeń $\Re^2$ z dwoma układami odniesienia $\hat{v}_1,\hat{v}_2$ oraz $(\hat{x}_1,\hat{x}_2)$ obróconymi o kąt α. Zatem współrzędne transformują się zgodnie ze wzorem (46). Definiujemy normę

$$\Re^2\ni(v_1,v_2)\mapsto\|(v_1,v_2)\|_{p,t}=\sqrt[p]{|tv_1|^p+|v_2|^p}, \quad (77)$$

dla $1<p<\infty$ oraz $t>1$. Na mocy (46) norma $\|\cdot\|_{p,t}$, po zmianie układu współrzędnych, ma postać

$$\left\|(v_1,v_2)\right\|_{p,t}=\sqrt[p]{|tv_1|^p+|v_2|^p}=$$

$$=\sqrt[p]{\left|t\left(\cos(\alpha)x_1+\sin(\alpha)x_2\right)\right|^p+\left|\cos(\alpha)x_2-\sin(\alpha)x_1\right|^p}=\left\|(x_1,x_2)\right\|_{p,t,\alpha}. \quad (78)$$

Rozpatrujemy obrót o kąt $\alpha=-\pi/6$. Obliczamy $\|\mathbf{v}+\mathbf{h}\|_{p,t,-\pi/6}-\|\mathbf{v}\|_{p,t,-\pi/6}-\left(\|\mathbf{w}-\mathbf{h}\|_{p,t,-\pi/6}-\|\mathbf{w}\|_{p,t,-\pi/6}\right)$ dla $\mathbf{v}=\mathbf{w}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ oraz $\mathbf{h}=\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)$. Uzyskujemy

$$\left\|\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)+\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)\right\|_{p,t,-\pi/6}-\left\|\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)-\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)\right\|_{p,t,-\pi/6}=$$

$$=\sqrt[p]{\left|\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right|^p}-\sqrt[p]{\left|t\left(\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\right|^p+\left|\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right|^p}$$

$$=1-\sqrt[p]{t^p\left|\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right|^p+\left|\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right|^p}=1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)\sqrt[p]{\left(t^p+1\right)}<0 \quad (79)$$

gdy $\left[\left(2/(\sqrt{3}-1)\right)^p-1\right]^{1/p}<t$. Zatem, na mocy Twierdzenia 2', dla $\mathbf{v}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ oraz $\mathbf{y}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ uzyskujemy $U_{p,t,-\pi/6}(\mathbf{v})>U_{p,t,-\pi/6}(\mathbf{y})$ dla $t>\left[\left(2/(\sqrt{3}-1)\right)^p-1\right]^{1/p}$ gdzie

$$K_2\ni\mathbf{x}\mapsto U_{p,t,-\pi/6}(\mathbf{x})=\frac{\|\mathbf{x}\|_{p,t,-\pi/6}+\|\underline{\mathbf{1}}\|_{p,t,-\pi/6}-\|\underline{\mathbf{1}}-\mathbf{x}\|_{p,t,-\pi/6}}{2\|\underline{\mathbf{1}}\|_{p,t,-\pi/6}}. \quad (80)$$

W skończenie wymiarowej przestrzeni wszystkie normy są równoważne, zatem funkcja $\mathbf{x}\mapsto U_{p,t,-\pi/6}(\mathbf{x})$ jest ciągła. Czyli dla ustalonego $t>\left[\left(2/(\sqrt{3}-1)\right)^p-1\right]^{1/p}$ istnieją kule o środkach $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ i $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ oraz o promieniach $r_1>0$ i $r_2>0$ (oznaczane symbolami $B_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}(r_1)$ i $B_{\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}(r_2)$)

takie, że dla wszystkich $\boldsymbol{\omega} \in B_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}(r_1)$, $\boldsymbol{\gamma} \in B_{\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}(r_2)$ mamy $U_{p,t,-\pi/6}(\boldsymbol{\omega}) > U_{p,t,-\pi/6}(\boldsymbol{\gamma})$.

Twierdzenie 4. Niech norma $\|\cdot\|_{p,t,-\pi/6}$ będzie zdefiniowana na przestrzeni $\Re^n$ wzorem

$$\Re^n \ni \mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|_{p,t,-\pi/6} = \left[\left|t\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2\right)\right|^p + \left|\frac{\sqrt{3}}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_1\right|^p \right.$$
$$\left. + |x_3|^p + |x_4|^p + \ldots + |x_n|^p\right]^{1/p} \tag{81}$$

dla $t > 1$ oraz $n \geq 2$. Jeśli $t > \left[\left(2/(\sqrt{3}-1)\right)^p - 1\right]^{1/p}$ to istnieją kule o środkach $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{2}\right)$ i $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{2}\right)$ oraz o promieniach $r_1 > 0$ i $r_2 > 0$ (oznaczane symbolami $B_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{2}\right)}(r_1)$ i $B_{\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},\ldots,\frac{1}{2}\right)}(r_2)$) takie, że dla wszystkich $\boldsymbol{\omega} \in B_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{2}\right)}(r_1)$, $\boldsymbol{\gamma} \in B_{\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{2}\right)}(r_2)$ mamy $U_{p,t,-\pi/6}(\boldsymbol{\omega}) > U_{p,t,-\pi/6}(\boldsymbol{\gamma})$, gdzie

$$K_n \ni \mathbf{x} \mapsto U_{p,t,-\pi/6}(\mathbf{x}) = \frac{\|\mathbf{x}\|_{p,t,-\pi/6} + \|\underline{\mathbf{1}}\|_{p,t,-\pi/6} - \|\underline{\mathbf{1}} - \mathbf{x}\|_{p,t,-\pi/6}}{2\|\underline{\mathbf{1}}\|_{p,t,-\pi/6}}. \tag{82}$$

Dowód: Na mocy Przykładu 5 wystarczy policzyć $\|\mathbf{v}+\mathbf{h}\|_{p,t,-\pi/6} - \|\mathbf{v}\|_{p,t,-\pi/6} - \left(\|\mathbf{w}-\mathbf{h}\|_{p,t,-\pi/6} - \|\mathbf{w}\|_{p,t,-\pi/6}\right)$ dla $\mathbf{v} = \mathbf{w} = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{2}\right)$ oraz $\mathbf{h} = \left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2},0,0,\ldots,0\right)$. Uzyskujemy

$$\left\|\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{2}\right) + \left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2},0,0,\ldots,0\right)\right\|_{p,t,-\pi/6}$$
$$-\left\|\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{2}\right) - \left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2},0,0,\ldots,0\right)\right\|_{p,t,-\pi/6} =$$

$$=\left[\left|\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right|^p+\left|\frac{1}{2}\right|^p+..+\left|\frac{1}{2}\right|^p\right]^{1/p}$$

$$-\left[t^p\left|\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right|^p+\left|\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right|^p+\left|\frac{1}{2}\right|^p+..+\left|\frac{1}{2}\right|^p\right]^{1/p}=$$

$$=\left[1+(n-2)\left|\frac{1}{2}\right|^p\right]^{1/p}-\left[\left(t^p+1\right)\left|\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right|^p+(n-2)\left|\frac{1}{2}\right|^p\right]^{1/p}. \tag{83}$$

Sprawdzamy kiedy zachodzi nierówność

$$\left[1+(n-2)\left|\frac{1}{2}\right|^p\right]^{1/p}<\left[\left(t^p+1\right)\left|\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right|^p+(n-2)\left|\frac{1}{2}\right|^p\right]^{1/p}, \tag{84}$$

czyli

$$1<\left(t^p+1\right)\left|\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right|^p \text{ zatem} \left[\left(2/(\sqrt{3}-1)\right)^p-1\right]^{1/p}<t. \tag{85}$$

Tym samym udowodniliśmy tezę Twierdzenia 4. ■

LITERATURA

Binderman A. (2005): O problemie wyboru wzorca przy badaniu przestrzennego zróżnicowania potencjału rolnictwa w Polsce, Metody ilościowe w badaniach ekonomicznych – V, Warszawa, str. 46.

Binderman A. (2006a): Klasyfikacja obiektów oparta na dwóch wzorcach, EiOGŻ, Zeszyty Naukowe SGGW, nr 60, Warszawa, str. 25-34.

Binderman A. (2006b): Wykorzystanie funkcji użyteczności do badania przestrzennego zróżnicowania rolnictwa, R. N. SERiA, Tom VIII, Zeszyt 5, Warszawa-Poznań, str. 5.

Binderman A., Krawiec M. (2006c): Regionalne zróżnicowanie poziomu rozwoju rolnictwa w Polsce w latach 2002-2005, Potencjał rozwojowy obszarów wiejskich w aspekcie wstąpienia Polski do Unii Europejskiej, Szczecin, s. 39.

Binderman A. (2007a): Wielowymiarowa analiza regionalnego zróżnicowania rolnictwa w Polsce, praca doktorska, SGGW, Warszawa.

Binderman A. (2007b): Zmiany regionalnego poziomu rolnictwa Polski w latach 1998-2005, Roczniki Naukowe SERiA, Tom IX, Warszawa-Kraków.

Binderman A. (2008a): Analiza regionalnego zróżnicowania rolnictwa Polski w 2006 roku, Roczniki Naukowe SERiA, Tom X, Zeszyt 2, Warszawa-Lublin.

Binderman A. (2008b): Zastosowanie liniowej i nieliniowej funkcji użyteczności do badania poziomu rolnictwa w Polsce, Metody ilościowe w badaniach ekonomicznych – IX, wyd. SGGW, Warszawa, str. 29-38.

Binderman A. (2009a): Dynamika rozwoju rolnictwa w Polsce po akcesji do Unii Europejskiej, Roczniki Nauk Rolniczych, SERiA, Tom XI, Zeszyt 3.

Binderman A. (2009b): Zależność oceny zróżnicowania rolnictwa w Polsce od wybranych mierników syntetycznych, Metody ilościowe w badaniach ekonomicznych – X, wyd. SGGW, Warszawa, str. 30-41.
Binderman A. (2010a): Porównanie poziomu rozwoju rolnictwa województw w Polsce, Roczniki Nauk Rolniczych, SERiA, Tom XII, Zeszyt 2.
Binderman A. (2010b): Zależność oceny regionalnego zróżnicowania rolnictwa od sposobu normalizacji zmiennych, Metody ilościowe w badaniach ekonomicznych – XI, wyd. SGGW, Warszawa.
Binderman Z. (2010): Zjawisko niedosytu w polu preferencji indukowanej przez miernik wykorzystujący dwa wzorce , Metody ilościowe w badaniach ekonomicznych – XI, wyd. SGGW, Warszawa.
Bourbaki N. (1966): Espaces Vectoriels Topologiques, Éléments de mathématique, Livre V, Hermann, Paris.
Dunford N., Schwartz J. T. (1958): Linear Operators, Part I. Interscience Publishers, New York.
Gatnar E. Walesiak M. **(**2009**)**: Statystyczna analiza danych z wykorzystaniem programu R, PWN, Warszawa.
Giaquinta M., Modica G., Soućek J. (1998): Cartesian Currents in the Calculus of Variations, Vol. I: Cartesian Currents. Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete 37, Springer, Berlin.
Jefimow N.W., Rozerdorn E.R. (1974): Algebra liniowa wraz z geometrią wielowymiarową. PWN, Warszawa.
Kukuła K., (2000): Metoda unitaryzacji zerowanej, PWN, Warszawa.
Kuratowski K. (1977): Wstęp do teorii mnogości i topologii. PWN, Warszawa.
Malina A. (2004): Wielowymiarowa analiza przestrzennego zróżnicowania struktury gospodarki Polski według województw, AE, Seria Monografie nr 162, Kraków.
Młodak A.(2006): Analiza taksonomiczna w statystyce regionalnej, Warszawa.
Panek E. (2000): Ekonometria matematyczna, Akademia Ekonomiczna, Poznań.
Sieklucki K., (1979): Geometria i topologia. Część I, Geometria. PWN, Warszawa.
Zeliaś A. (2000): Taksonomiczna analiza przestrzennego zróżnicowania poziomu życia w Polsce w ujęciu dynamicznym, Kraków.

Monotonicity of the gauge leaned on two patterns. Theoretical considerations

Abstract: The aim of this paper is to present the monotonicity criterion for the utility functions defined in the preference field. We provide numerous examples of nonmonotonic (locally decreasing) utility functions. We investigate the possibility of introducing preference relation by employing utility functions. Moreover, we define the phenomenon of insufficiency in the field of the preference defined by the utility function.

Key words: the utility functions, synthetic measures, field of preference, phenomenon of insufficiency, norm, classification