Michał Stachura
Barbara Wodecka
Uniwersytet Jana Kochanowskiego w Kielcach

ALTERNATYWNE WZGLĘDEM UJĘCIA MARKOWITZA PODEJŚCIE DO SZACOWANIA STOPY ZWROTU Z PORTFELA

Wprowadzenie

W analizach portfelowych jednym z najważniejszych rozważanych parametrów jest oczekiwana stopa zwrotu. Szacować ją można – w sensie użytego wzoru – przy użyciu wielu różnych metod. Warto zwrócić uwagę, że po przyjęciu określonej metody możliwe do zastosowania są dwa zgoła odmienne ujęcia. Pierwsze (ujęcie niejednolite – UN) polega na osobnym szacowaniu oczekiwanych stóp zwrotu z pojedynczych walorów (zgodnie z przyjętą metodą), a następnie na swego rodzaju interpolacji – wymagającej użycia kolejnej metody – uzyskanych oszacowań na portfele o dowolnych udziałach procentowych walorów (tak jest np. w klasycznym modelu Markowitza). Drugie (ujęcie jednolite – UJ) – którego prezentacja oraz pokazanie pewnych jego przewag jest zasadniczym celem opracowania – polega na jednolitym traktowaniu wszystkich bez wyjątku portfeli (o różnych udziałach procentowych walorów, w tym także pojedynczych). Skutkiem tego uzyskuje się spójność merytoryczną metodologii szacowania oczekiwanych stóp zwrotu.

Wśród metod szacowania oczekiwanej stopy zwrotu, które są powszechnie akceptowane i stosowane w praktyce należy wymienić tzw. metody historyczne, bazujące na założeniu niezmienności stóp zwrotu w czasie i odwołujące się do ich przeszłych realizacji.

Niech zatem rozważony będzie pewien indeks **Y** (np. wartość pojedynczego waloru lub wartość portfela), który w chwili t ($t \in \{1, \dots , T\}$) przyjął wartość Y_t, zaś jego stopa zwrotu była równa R_t. Wówczas jako oszacowanie oczekiwanej stopy zwrotu r_E na chwilę $T + 1$ można przyjąć: a) średnią arytmetyczną realizacji stopy zwrotu, b) średnią ważoną realizacji stopy zwrotu, c) zrealizowaną stopę zwrotu za cały okres inwestycji w przeliczeniu na okres jednostkowy, które dane są odpowiednio wzorami:

$$r_E = \frac{1}{T} \cdot \sum_{t=1}^{T} R_t \tag{1}$$

$$r_E = \sum_{t=1}^{T} c_t R_t \tag{2}$$

$$r_E = (Y_T / Y_1)^{1/T} - 1 \tag{3}$$

gdzie wagi c_t spełniają warunki: $c_t \geq 0$, $\sum_{t=1}^{T} c_t = 1$.

Aby uszczegółowić rozumienie obu ujęć (UN, UJ) szacowania stopy zwrotu w przypadku portfela, przyjmijmy kolejne oznaczenia. Niech $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n$ oznaczają n walorów składających się na portfel $\mathbf{Z}(\boldsymbol{w})$, gdzie $\boldsymbol{w} = (w_1, \ldots, w_n)$ określa udziały (pod względem wartości) poszczególnych walorów.

Wówczas w sensie UJ, po uprzednim wyborze metody (wzoru) szacowania oczekiwanej stopy zwrotu, stosuje się tę metodę dla każdego wyboru $\boldsymbol{w}$ udziałów walorów w portfelu. W szczególności więc również w odniesieniu do każdej ze składowych portfela użyta jest dokładnie ta sama metoda – dla $\mathbf{X}_i$ mamy bowiem $\boldsymbol{w} = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$.

W sensie UN, po uprzednim wyborze metody (wzoru) szacowania oczekiwanej stopy zwrotu, stosuje się tę metodę tylko względem walorów $\mathbf{X}_i$, a następnie z wykorzystaniem jakiejś metodologii szacuje się (interpoluje) oczekiwaną stopę zwrotu z portfela w oparciu o oszacowania wyznaczone dla walorów. W tym kontekście, w praktyce powszechnie stosowane jest podejście zaczerpnięte z klasycznej markowitzowskiej teorii optymalizacji portfela, tzn. za oczekiwaną stopę zwrotu z portfela przyjmuje się średnią ważoną stóp zwrotu ze wszystkich walorów (wagami są udziały $\boldsymbol{w}$). Właśnie ze względu na tę powszechność porównanie istoty UJ i UN zostanie poczynione w dalszym ciągu opracowania przez stałe odniesienie się w przypadku UN do liniowej, markowitzowskiej interpolacji oszacowań oczekiwanej stopy zwrotu z portfela.

Abstrahując od faktu, czy model Markowitza jest właściwym narzędziem do optymalizacji portfela* należy podkreślić, że bezrefleksyjne przeniesie jedy-

* Wśród wielu prac krytykujących metodę Markowitza można wymienić opracowanie [1], w którym pada nawet stwierdzenie, że „jest ona w praktyce nieużyteczna”.

nie jednego elementu tego modelu – czyli metody szacowania oczekiwanej stopy zwrotu z portfela – w inne realia może prowadzić do pewnych przekłamań.

1. Rozbieżność między ujęciami szacowania oczekiwanej stopy zwrotu*

Aby uzmysłowić sobie wagę nakreślonego problemu dokonamy analizy prostego przykładu. Niech dane będą dwa walory $\mathbf{X}_1$ i $\mathbf{X}_2$, które rozważamy w dwóch następujących po sobie momentach $t = 0$ i $t = 1$. Przyjmujemy, że wartości walorów kształtują się następująco: $X_{1,0} = 80$, $X_{1,1} = 90$ oraz $X_{2,0} = 60$, $X_{2,1} = 55$. Stąd zrealizowane stopy zwrotu tych walorów wynoszą odpowiednio $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{12}$ i są one przyjęte za oczekiwane stopy zwrotu z walorów. Następnie budujemy portfel złożony z $n_1 = 4$ jednostek waloru $\mathbf{X}_1$ i $n_2 = 6$ jednostek waloru $\mathbf{X}_2$ (tym samym udziały pod względem ilości wynoszą odpowiednio $v_1 = 0{,}4$, a $v_2 = 0{,}6$). Wartość portfela w momentach $t = 0$ i $t = 1$ jest więc odpowiednio równa $Z_0 = 680$ i $Z_1 = 690$. Oznacza to, że zrealizowana (i przyjęta w sensie UJ za oczekiwaną) stopa zwrotu z tego portfela wynosi $\frac{1}{68}$. Z drugiej strony stopa zwrotu w sensie UN z portfela wynosi $\frac{7}{276}$ $\left(= \frac{12}{23} \cdot \frac{1}{8} - \frac{11}{23} \cdot \frac{1}{12}\right)$ i jest około 1,725 razy większa od poprzedniego oszacowania. Widoczne staje się zatem, że ujęcia prowadzą do rozbieżnych oszacowań.

Zastawienie omówionych wartości znajduje się w tab. 1, w której warto zwrócić uwagę na udziały walorów w portfelu pod względem wartości (2 ostatnie kolumny), ponieważ udziały te są różne w momentach $t = 0$ i $t = 1$ (w przeciwieństwie do stałych udziałów ilościowych v_i).

Tabela 1

Zestawienie parametrów portfela

	$t = 0$	$t = 1$	r_E	n_i	v_i	$w_i\ (t = 0)$	$w_i\ (t = 1)$
$\mathbf{X}_1$	80	90	1/8	4	0,4	8/17	12/23
$\mathbf{X}_2$	60	55	–1/12	6	0,6	9/17	11/23
Z	680	690	1/68				

Analogiczne rozważania można przeprowadzić dla dowolnych udziałów (zarówno względem wartości $\boldsymbol{w} = (w, 1 - w)$ na moment $t = 1$, jak i ilości $\boldsymbol{v} = (v, 1 - v)$ walorów w portfelu. W efekcie uzyskuje się funkcyjną zależność wartości oczekiwanej stopy zwrotu z portfela od udziału w – lub odpowiednio udziału v – waloru $\mathbf{X}_1$. Zależności te prezentuje rys. 1, a jak łatwo policzyć są one dane wzorami:

* Wszystkie obliczenia i wykresy prezentowane w opracowaniu zostały wykonane w środowisku obliczeniowym R.

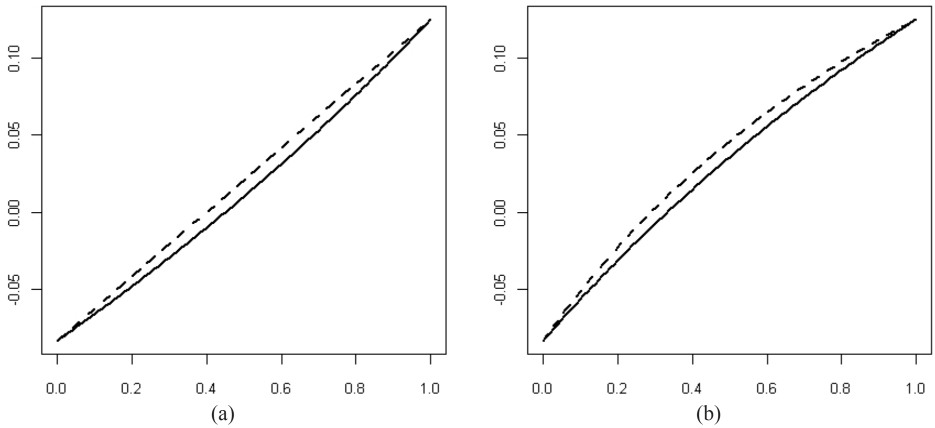
$$r_E^{UN}(w) = \frac{5w-2}{24} \tag{4}$$

$$r_E^{UN}(v) = \frac{38v-11}{12(7v+11)} \tag{5}$$

$$r_E^{UJ}(w) = \frac{20w-9}{4(27-5w)} \tag{6}$$

$$r_E^{UJ}(v) = \frac{3v-1}{4(v+3)} \tag{7}$$

gdzie r_E^{UN}, r_E^{UJ} oznaczają oczekiwane stopy zwrotu odpowiednio w rozumieniu UN i UJ.



Rys. 1. Oszacowania oczekiwanej stopy zwrotu w zależności od udziału waloru pierwszego w portfelu (wykres (a) prezentuje udział w sensie wartości, wykres (b) – udział w sensie ilości; linie ciągłe odpowiadają UJ, a przerywane – UN)

Widać więc, że oba ujęcia są zgodne jedynie dla portfeli złożonych z pojedynczych walorów, a poza tym UN daje zawsze większe oszacowania niż UJ. Warto więc odnotować, że może być też i tak, że oszacowania oczekiwanych stóp zwrotu – w sensie obu ujęć – są różnych znaków.

Wykresy (a) i (b) na rys. 1 nie przedstawiają różnych jakościowo przypadków, lecz stanowią spojrzenia z dwóch różnych perspektyw na to samo zagadnienie. Wynika to z faktu, że przy znanych wartościach walorów w portfelu mamy wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość między udziałami pod względem wartości i udziałami pod względem ilości tych walorów w portfelu. Wobec tego wybór typu udziałów jest zależny od potrzeb konkretnych analiz lub przyzwyczajeń badacza*.

W przypadku prezentowanego przykładu zależności między udziałami prezentują funkcje:

$$w = \frac{18v}{7v + 11} \tag{8}$$

$$v = \frac{11w}{18 - 7w} \tag{9}$$

2. Ilustracja empiryczna

Nakreślone na podstawie danych umownych problematyczne kwestie warto zobrazować również na podstawie przykładowych danych empirycznych. W tym celu analizom poddano portfele tworzone z akcji KGHM i PKN Orlen na 30.09.2011 r. z horyzontem czasowym wynoszącym 1 dzień roboczy. Za metodę szacowania oczekiwanej stopy zwrotu przyjęto średnią arytmetyczną z 500 ostatnich realizacji stopy zwrotu zgodnie ze wzorem (1)**. Tak rozumiane oszacowania oczekiwanych stóp zwrotu z walorów są w dalszym ciągu oznaczone jako $r_E^{(1)}$, $r_E^{(2)}$. Z kolei niech n_1 i n_2 oznaczają odpowiednio liczbę akcji KGHM i PKN Orlen w portfelu. Wówczas:

$$v_1 = \frac{n_1}{n_1 + n_2}, \quad v_2 = \frac{n_2}{n_1 + n_2} \quad (v_1 + v_2 = 1) \tag{10}$$

są udziałami akcji w portfelu pod względem ilości, natomiast:

$$w_1 = \frac{n_1 \cdot X_{1,T}}{Z_T}, \quad w_2 = \frac{n_2 \cdot X_{2,T}}{Z_T} \quad (w_1 + w_2 = 1) \tag{11}$$

udziałami pod względem wartości, gdzie $X_{1,T}$, $X_{2,T}$ są notowaniami akcji, a $Z_T = n_1 \cdot X_{1,T} + n_2 \cdot X_{2,T}$ – wartością portfela na dzień $T = 500$.

* Z praktycznego punktu widzenia bardziej użyteczne zdają się być udziały w sensie ilości, ponieważ częściej zdarzają się sytuacje, że inwestor w pewnym horyzoncie czasowym utrzymuje stałe udziały w portfelu w sensie ilości niż w sensie wartości. Wówczas, jeśli w pewnym horyzoncie czasowym udziały w sensie ilości są stałe, to udziały w sensie wartości zmieniają się przy każdorazowej zmianie wartości walorów.

** Wobec tego podstawą wszelkich obliczeń są dzienne notowania na zamknięcie kursów akcji obu spółek z okresu 8.10.2010-30.09.2011 (po 500 obserwacji) z GPW w Warszawie.

Przy przyjętych oznaczeniach i założeniach można wyprowadzić następujące wzory na oczekiwaną stopę zwrotu z portfela w rozumieniu UN i UJ w zależności od udziałów walorów:

$$r_E^{UN}(w) = w \cdot r_E^{(1)} + (1-w) \cdot r_E^{(2)} \tag{12}$$

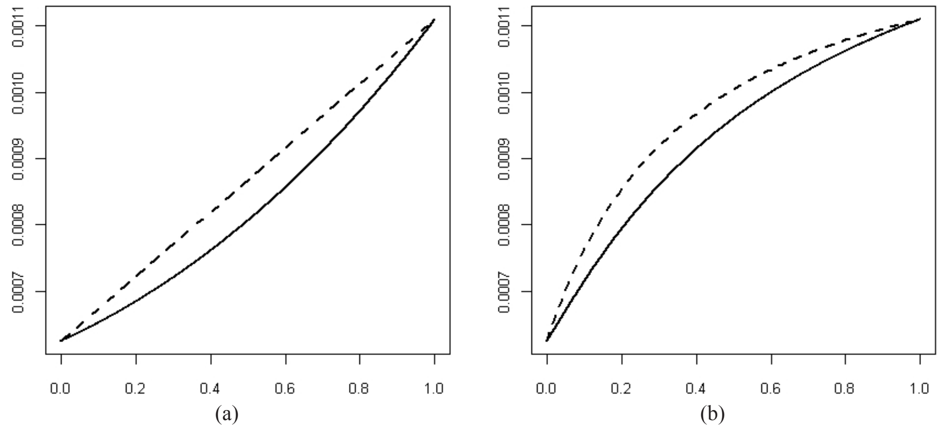
$$r_E^{UJ}(w) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \frac{wX_{2,T}(X_{1,t} - X_{1,t-1}) + (1-w)X_{1,T}(X_{2,t} - X_{2,t-1})}{wX_{2,T}X_{1,t-1} + (1-w)X_{1,T}X_{2,t-1}} \tag{13}$$

$$r_E^{UN}(v) = \frac{v \cdot r_E^{(1)} \cdot X_{1,T} + (1-v) \cdot r_E^{(2)} \cdot X_{2,T}}{v \cdot X_{1,T} + (1-v) \cdot X_{2,T}} \tag{14}$$

$$r_E^{UJ}(v) = \frac{1}{T} \cdot \sum_{t=1}^{T} \frac{v \cdot (X_{1,t} - X_{1,t-1}) + (1-v) \cdot (X_{2,t} - X_{2,t-1})}{v \cdot X_{1,t-1} + (1-v) \cdot X_{2,t-1}} \tag{15}$$

gdzie:
$w = w_1$, $v = v_1$ – stosownego typu udziały KGHM w portfelu,
$X_{1,T}$, $X_{2,\,T}$ – notowania akcji w dniu nr t.

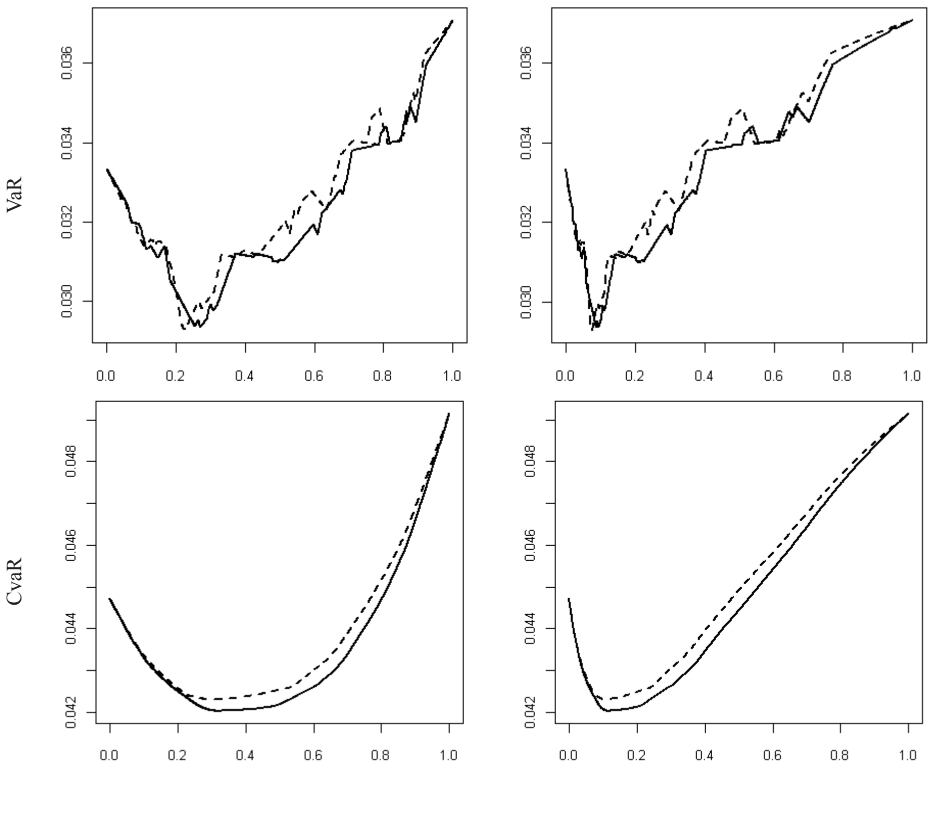
Przedstawione wzory dobitnie pokazują, że oszacowania oczekiwanej stopy zwrotu z portfela są ewidentnie zależne od przyjętego ujęcia, co dobrze uwidacznia rys. 2. Tym razem także okazuje się, że oba ujęcia są zgodne jedynie dla pojedynczych walorów i że poza tym UN daje zawsze większe oszacowania niż UJ.



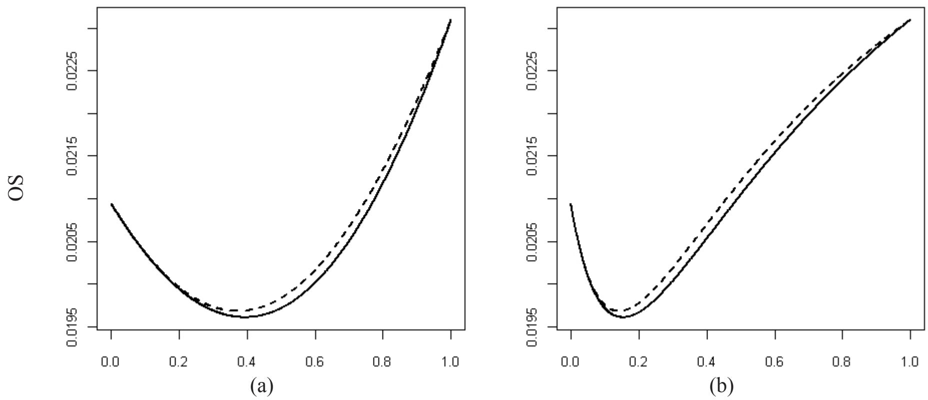
Rys. 2. Oszacowania oczekiwanej stopy zwrotu w zależności od udziału akcji KGHM w portfelu (wykres (a) prezentuje udział w sensie wartości, wykres (b) – udział w sensie ilości; linie ciągłe odpowiadają UJ, a przerywane – UN)

Stwierdzone rozbieżności w oszacowaniach oczekiwanej stopy zwrotu mogą mieć dalsze konsekwencje. Wyobraźmy sobie, że inwestor dysponując takimi oszacowaniami dokonuje optymalizacji portfela posługując się jedną z trzech miar ryzyka: wartością zagrożoną (VaR), warunkową wartością zagrożoną (CVaR) i odchyleniem standardowym (OS)*. Załóżmy ponadto, że wymienione miary dla ustalonego składu portfela szacowane są na podstawie zrealizowanych stóp zwrotu tego portfela, które z kolei odtwarzane są za pomocą takich samych metod i ujęcia, jak szacowana była odpowiadająca im oczekiwana stopa zwrotu.

Wyznaczone w ten sposób empiryczne wartości miar ryzyka, w zależności od udziału pierwszego waloru, zilustrowane są na rys. 3.



* Miary te dla prostoty rozważane są jako stosowne parametry rozkładu stóp zwrotu z portfela, w szczególności VaR jest więc rozumiane jako kwantyl tego rozkładu, a nie odpowiadająca temu kwantylowi strata na wartości portfela. Ponadto VaR i CVaR są wyznaczane z perspektywy krótkiej pozycji – odnoszą się zatem do prawych ogonów rozkładu stóp zwrotu.



Rys. 3. Wartości empirycznych miar ryzyka portfela w z zależności od udziału akcji KGHM (wykresy w kolumnie (a) prezentują udział w sensie wartości, wykresy w kolumnie (b) – udział w sensie ilości; linie ciągłe odpowiadają UJ, a przerywane – UN)

Wzrokowa analiza wykresów z rys. 3 wskazuje na ewidentną zależność oszacowań miar ryzyka od przyjętej metody szacowania oczekiwanej stopy zwrotu. Mimo że z pozoru wartości oszacowań miar ryzyka różnią się (w sensie konfrontacji UN z UJ) między sobą w nieznacznym stopniu, to jednak po przełożeniu tych rozbieżności na straty na wartości portfela można uzyskać rozbieżności, których nie da się bagatelizować.

Podsumowanie

Nakreślone w opracowaniu problemy, dobitnie widoczne w świetle zaprezentowanych prostych przykładów, pozwalają na wyszczególnienie kilku ogólniejszych kwestii:

– Wartość oszacowania oczekiwanej stopy zwrotu z portfela jest istotnie zależna nie tylko od przyjętej metody szacowania (fakt ten jest powszechnie znany), ale (co ważne, a niestety nie zawsze uświadomione przez praktyków) także od rodzaju przyjmowanego ujęcia (UN, UJ).
– Zaniedbywanie istnienia zależności oszacowania oczekiwanej stopy zwrotu od rodzaju stosowanego ujęcia, przejawiające się w bezrefleksyjnym „przeszczepianiu” ujęcia Markowitza bez sprawdzenia założeń czy model Markowitza można stosować, może prowadzić do przekłamań.
– Stosowanie ujęcia jednolitego (UJ) wydaje się o wiele zasadniejsze, ponieważ wśród zalet tego ujęcia należy wymienić przynajmniej dwie: UJ cechuje spójność merytoryczna, gdyż zawsze stosuje się tę samą metodę szacowania

oczekiwanej stopy zwrotu – tak dla pojedynczych walorów jak i dla portfela o dowolnych proporcjach udziałów tych walorów; UJ odwołuje się tylko do jednego – notabene niebudzącego żadnych kontrowersji – założenia, które dotyczy wyboru metody (w sensie wzoru) szacowania oczekiwanej stopy zwrotu. Nie ma więc potrzeby czynić kolejnego, dyskusyjnego założenia związanego z interpolacją oczekiwanych stóp zwrotu z walorów na portfel.
– Pewną niedogodnością UJ jest zdecydowanie większa złożoność obliczeniowa. Szczęśliwie jednak w dobie komputerów niedogodność ta jest wręcz zaniedbywana i z pewnością nie może być uważana za wadę ujęcia.

Wobec nakreślonych powyższej kwestii zasadne jest postawienie postulatu, aby w praktyce szacować oczekiwaną stopę zwrotu z portfela w sensie ujęcia jednolitego, zaś ujęcie niejednolite – w szczególności zaczerpnięte z modelu Markowitza – ograniczyć tylko przypadków, w których istnieją zasadne przesłanki, że spełnione są założenia co do stosowalności całego modelu.

Literatura

1. Galus S., Sokołowska K., Optymalizacja portfela na polskim rynku papierów wartościowych, Prace Naukowe WSB w Gdańsku, t. 1, Gdańsk 2008.
2. Jajuga K., Jajuga T., Inwestycje. Instrumenty finansowe, aktywa finansowe, ryzyko finansowe, inżynieria finansowa, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2006.
3. Markowitz H., Portfolio selection, „The Journal of Finance” 1952, Vol. 7, No. 1.
4. Markowitz H., Portfolio selection. Efficient diversification of investments, John Wiley & Sons, New York 1959.
5. Tarczyński W., Rynki kapitałowe. Metody ilościowe, t. 2, Placet, Warszawa 1997.
6. R Development Core Team (2011). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0, URL http://www.R-project.org/

ALTERNATIVE FORMULATION OF RATE-OF-RETURN ESTIMATION IN COMPARISON WITH MARKOWITZ APPROACH

Summary

In the study, two approaches of rate-of-return estimation are compared. One of them, that predominates in practice and that is called by the authors heterogeneous, refers to a separate rate-of-return estimation for every individual asset, and then to an interpolation of obtained values in order to asses rate of return for any portfolio with priorly given proportions of assets. The heterogeneous approach is based on premises concerning a proper method of rate-of-return estimation for individual assets, and a specific method of interpolating estimates for any portfolio as well. In contrast, the other approach, called homogeneous, refers to uniform treatment of all portfolios without exceptions, which leads to a direct rate-of-return estimation for any portfolio with priorly given proportions of assets. The essence of both approaches and discrepancies between them are illustrated with use of properly chosen examples (arbitrary and empirical). Examples' analysis indicates some advantage of the homogeneous approach over the heterogeneous one.