



Grzegorz Kończak

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach
Wydział Zarządzania
Katedra Statystyki
grzegorz.konczak@ue.katowice.pl

SYMULACYJNA ANALIZA WYKORZYSTANIA TESTÓW PERMUTACYJNYCH W PROCESACH STEROWANIA JAKOŚCIĄ

Streszczenie: Klasyczne karty kontrolne wykorzystują sekwencje parametrycznych testów statystycznych. Zwykle wymagają spełnienia założeń dotyczących postaci rozkładu. W przypadku, gdy założenia takie nie są spełnione, nie jest uzasadnione ich stosowanie. W artykule przedstawiono propozycję wykorzystania karty kontrolnej opartej na sekwencji testów permutacyjnych. Testy permutacyjne nie wymagają spełnienia założenia o postaci rozkładu porównywanych zmiennych. Własności proponowanej karty zostały porównane z własnościami klasycznych kart kontrolnych z wykorzystaniem symulacji komputerowych. W symulacjach wykorzystano wartości losowe generowane z uogólnionego rozkładu lambda.

Słowa kluczowe: sterowanie jakością, karty kontrolne, testy permutacyjne, symulacje komputerowe.

Wprowadzenie

Do najczęściej wykorzystywanych narzędzi statystycznego monitorowania procesów produkcyjnych należy zaliczyć karty kontrolne. Zostały one zaproponowane przez W.A. Shewharta w 1924 roku. Karta kontrolna jest graficzną reprezentacją przebiegu procesu. Pozwala na wykrycie ewentualnych nieprawidłowości, co umożliwia przeprowadzenie działań korygujących. Karta kontrolna jest oparta na wykorzystaniu sekwencji testów parametrycznych. W przypadku karty kontrolnej \bar{X} są to testy dla wartości oczekiwanej. Testy parametryczne odwołują się do założeń dotyczących postaci rozkładu monitorowanej charakterystyki. W przypadku, gdy brak informacji o takim rozkładzie, nie jest uzasad-

nione stosowanie klasycznych kart kontrolnych. W literaturze rozważane są modyfikacje klasycznych kart kontrolnych pozwalające na osłabienie założeń. Do takich kart można zaliczyć np. karty nieparametryczne.

W artykule przedstawiono symulacyjne porównania własności klasycznych kart kontrolnych i kart zbudowanych na sekwencji testów permutacyjnych. W analizach symulacyjnych uwzględniono charakterystyki o różnych rozkładach.

1. Klasyczna karta kontrolna

Celem stosowania karty kontrolnej jest wykrycie pojawiających się rozregulowań procesu. Na karcie kontrolnej wyróżnione są linie kontrolne i linie ostrzegawcze. Typowymi sygnałami wskazującymi na możliwość wystąpienia rozregulowania są:

- punkt powyżej górnej linii kontrolnej (GLO),
- dwa z kolejnych trzech punktów leżące powyżej górnej (lub poniżej dolnej) linii ostrzegawczej (GLO) umieszczonej na poziomie średnia plus dwa odchylenia standardowe (minus dwa odchylenia standardowe),
- cztery z pięciu kolejnych punktów leżące powyżej górnej (lub poniżej dolnej) linii umieszczonej na poziomie średnia plus odchylenie standardowe (minus odchylenie standardowe),
- osiem kolejnych punktów leżących po jednej stronie linii centralnej,
- osiem punktów w trendzie rosnącym (malejącym).

Podane reguły są tylko nielicznymi wyjątkami spośród zamieszczonych w [Western Electric, 1956]. Szereg tego typu sekwencji przedstawiono np. w [Montgomery, 2009], [Grant, 1972], [Kończak, 2000].

Podstawową charakterystyką informującą o skuteczności karty kontrolnej jest *ARL* (*Average Run Length*). Charakterystyka ta informuje o przeciętnej liczbie pomiarów koniecznych do wystąpienia sygnału na karcie kontrolnej. Charakterystyka ta powinna przyjmować możliwie największe wartości dla procesów uregulowanych statystycznie (ARL_0) oraz możliwie małe wartości dla procesów rozregulowanych (ARL_1).

2. Wykrywanie rozregulowania procesu z wykorzystaniem testów permutacyjnych

Testy permutacyjne zostały zaproponowane w latach 30. XX wieku przez R.A. Fishera oraz E.J.G. Pitmana (por. [Welch, 1990]). Jednak ze względu na brak możliwości wykorzystania komputerów w ówczesnym czasie dopiero w ostatnich

latach testy te spotkały się z większym zainteresowaniem statystyków, zwłaszcza w zastosowaniach praktycznych [Sheskin, 2004]. W dalszej części wykorzystany zostanie test permutacyjny dla porównania dwóch prób [Kończak, 2012].

Niech S_1 i S_2 będą próbami pobranymi z dwóch populacji o ciągłych dystrybuantach F i G o liczebnościach odpowiednio n_1 i n_2 . Próby te mogą zostać zapisane następująco:

$$S_1 = \{x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n_1}\}$$

oraz

$$S_2 = \{x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n_2}\}.$$

Weryfikacji zostanie poddana hipoteza, że próby pochodzą z populacji o jednakowych rozkładach. Tak postawioną hipotezę można zapisać następująco:

$$H_0 : F = G \quad (1)$$

wobec hipotezy alternatywnej:

$$H_1 : F \neq G.$$

Niech \bar{X}_1 oraz \bar{X}_2 oznaczają odpowiednio średnie arytmetyczne obliczone na podstawie tych dwóch prób. W testach permutacyjnych postać statystyki jest określana przez prowadzącego badanie. Istotnym wymaganie jest jedynie przyjmowanie określonych wartości (np. dużych) w przypadkach, gdy nie jest prawdziwa hipoteza H_0 . Niech dana będzie statystyka postaci:

$$T = \bar{X}_1 - \bar{X}_2. \quad (2)$$

Obliczona wartość statystyki T dla wylosowanych prób niech będzie oznaczona przez T_0 . Bardzo duże lub bardzo małe wartości statystyki T (duże różnice pomiędzy średnimi) będą świadczyły przeciw hipotezie H_0 . Ponieważ rozkład statystyki T w ogólnym przypadku nie jest znany, wyznacza się empiryczny rozkład statystyki T przy założeniu hipotezy H_0 .

Dla połączonego zbioru prób $S = S_1 \cup S_2$ należy rozważyć wszystkie możliwe podziały na dwa rozłączne zbiory S_1^* i S_2^* o liczebnościach n_1 i n_2 . Niech N_0 oznacza liczbę możliwych takich podziałów zbioru S . Jak łatwo zauważyć, N_0 wyznaczone jest na podstawie wzoru $N_0 = \binom{n_1 + n_2}{n_1}$.

Dla każdego z dokonanych podziałów obliczana jest wartość statystyki T . Tak otrzymane wartości statystyki T tworzą zbiór $\{T_1, T_2, \dots, T_{N_0}\}$. Dla podjęcia decyzji odnośnie do hipotezy H_0 należy wyznaczyć wartość *ASL* (*Achieving Significance Level*) i porównać ją z przyjętym poziomem istotności. Wartość *ASL* (stosuje się również określenie empiryczna p-wartość) zadana jest następująco (por. [Efron, Tibshirani, 1993]):

$$ASL = P(|T| \geq |T_0|). \quad (3)$$

Zazwyczaj liczba możliwych podziałów zbioru S jest tak duża, że nawet obecnie nie ma możliwości obliczenia wartości statystyki T dla każdego z możliwych podziałów. W takich przypadkach rozważane są nie wszystkie możliwe podziały, ale dostatecznie duża liczba podziałów N_1 , gdzie N_1 powinno wynosić przynajmniej 1000. Wówczas przybliżoną wartość *ASL* możemy oszacować na podstawie wzoru:

$$ASL \approx \frac{\text{card}\{T_i : |T_i| \geq |T_0|\}}{N_1}. \quad (4)$$

Jeżeli wartość *ASL* jest mniejsza od przyjętego poziomu istotności α lub mu równa, to należy odrzucić hipotezę H_0 . W przeciwnym przypadku należy stwierdzić brak podstaw do odrzucenia hipotezy H_0 .

Karta kontrolna Shewharta jest faktycznie graficzną prezentacją sekwencji testów parametrycznych. Linie kontrole są wyznaczane na poziomie wartości krytycznej testu. W przypadku wystąpienia zmiany typu rozkładu nie jest uzasadnione stosowanie klasycznej karty kontrolnej. Montgomery [2009] w przypadku wystąpienia asymetrii monitorowanej charakterystyki zaleca wykreślanie linii centralnej na poziomie mediany, a nie wartości oczekiwanej. Karta kontrolna mediany jest stosunkowo prosta w zastosowaniach, charakteryzuje się jednak znacznie mniejszą zdolnością wykrywania rozregulowania procesu. Testy permutacyjne charakteryzują się mocą porównywalną do testów parametrycznych (por. [Kończak, 2014]). W dalszej części klasyczne karty kontrolne zostaną porównane z kartami, w których w miejsce testów parametrycznych wprowadzono testy permutacyjne.

3. Analizy symulacyjne

Celem przeprowadzonych analiz symulacyjnych było porównanie własności klasycznych kart kontrolnych i karty kontrolnej opartej na testach permutacyjnych. Rozważany będzie przypadek zmiany poziomu przeciętnego monitorowanej charakterystyki z jednoczesną zmianą typu rozkładu zmiennej diagnostycznej.

W przypadku karty kontrolnej \bar{X} po pobraniu próbki weryfikowana jest hipoteza, że wartość oczekiwana jest zgodna z założeniami. W przypadku testu permutacyjnego będzie sprawdzana zgodność rozkładów pobranej próbki z próbą pobraną z rozkładu ustabilizowanego.

3.1. Rozważane rozkłady

W analizach symulacyjnych badano częstość występowania sygnału rozregulowania procesu (w) oraz przeciętną liczbę obserwacji potrzebną do wykrycia różnego typu rozregulowań (ARL). Dla zapewnienia porównywalności metod dla karty opartej na testach permutacyjnych przyjmowano poziomy istotności $\alpha = 0,0013$ oraz $\alpha = 0,02275$. Podane poziomy istotności odpowiadają prawdopodobieństwom przekroczenia odpowiednio linii GLK oraz GLO przy prawidłowym przebiegu procesu (H_0 prawdziwa).

W symulacjach generowano wartości losowe z uogólnionego rozkładu lambda (GLD) [Ramberg i in., 1979]. Rodzina tych zmiennych jest zapisywana z wykorzystaniem czterech parametrów $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ i λ_4 . Gęstość zmiennej losowej o uogólnionym rozkładzie lambda przyjmuje postać:

$$f(x) = f(Q(y)) = \frac{\lambda_2}{\lambda_3 y^{\lambda_3-1} + \lambda_4 (1-y)^{\lambda_4-1}},$$

gdzie

$$Q(y) = \lambda_1 + \frac{y^{\lambda_3} - (1-y)^{\lambda_4}}{\lambda_2}, \quad 0 \leq y \leq 1$$

jest funkcją percentyli uogólnionego rozkładu lambda, a

λ_1 – parametrem położenia,

λ_2 – parametrem skali,

λ_3 i λ_4 – parametrami kształtu.

W literaturze rozważane są różne sposoby parametryzacji dla uogólnionego rozkładu lambda. Najczęściej wykorzystywane metody parametryzacji to RS [Ramberg i Schmeiser, 1974] oraz FMKL [Freimer i in., 1988]. W dalszej części zostanie wykorzystana parametryzacja RS.

Rozkład GLD jest bardzo pomocny w przeprowadzaniu symulacji, ponieważ pozwala uzyskać wartości losowe z zadanymi charakterystykami: położenia (α_1), skali (α_2), asymetrii (α_3) i spłaszczenia (α_4). Parametry α_1 i α_2 to odpo-

wiednio wartość oczekiwana i odchylenie standardowe zmiennej, a α_3 i α_4 można zapisać następująco [Ramberg i in., 1979]:

$$\alpha_i = \frac{E(X - \mu)^i}{\sigma^i} \text{ dla } i = 3, 4.$$

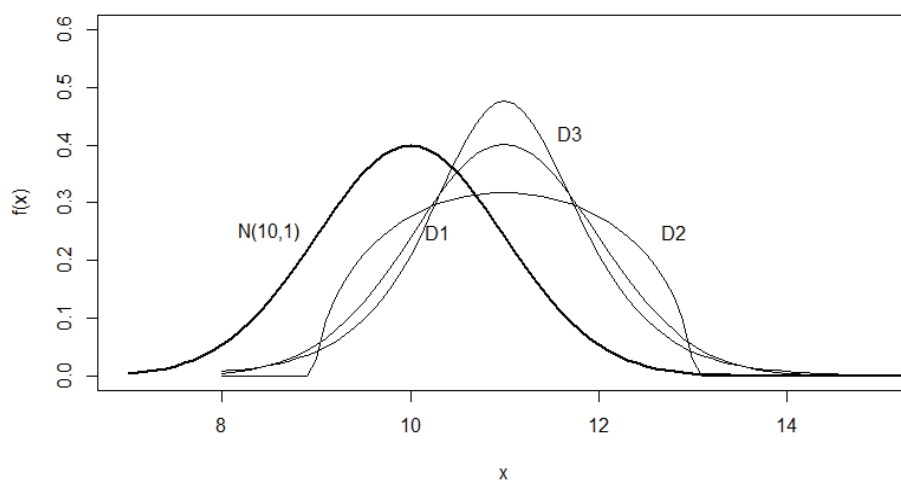
Przy wyznaczaniu parametrów $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ rozkładu GLD wykorzystano tablice zamieszczone w [Ramberg i Schmeiser, 1979]. Tablice podają wartości parametrów dla zadanych α_3 i α_4 . Przyjmując odpowiednie wartości tych parametrów, otrzymuje się wartości losowe x z rozkładu o wartości oczekiwanej $EX = 0$ oraz wariancji $D^2X = 1$ i zadanych parametrach asymetrii i spłaszczenia. Dla otrzymania wartości losowych x' z rozkładu o wartości oczekiwanej μ i odchyleniu standardowym σ należy wykonać następujące przekształcenie: $x' = \mu + \sigma x$.

Przyjęte w symulacjach rozkłady charakteryzują się różną asymetrią i spłaszczeniem. W symulacjach uwzględniono rozkłady symetryczne, prawostronnie asymetryczne oraz lewostronnie asymetryczne. Wartości parametrów w rozkładach przyjętych w symulacjach przedstawia tabela 1.

W przeprowadzonych symulacjach przyjęto, że rozkład odniesienia jest rozkładem normalnym z wartością oczekiwaną $\mu_0 = 10$ oraz odchyleniem standardowym $\sigma = 1$. Jako rozkłady rozregulowane rozważano 9 rozkładów o wartości oczekiwanej $\mu_1 = \mu + 1 = 11$.

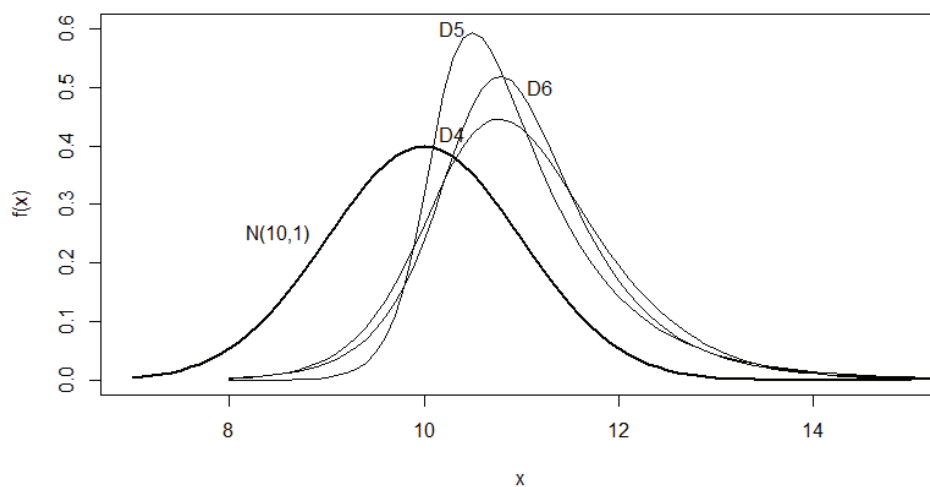
Tabela 1. Charakterystyka rozkładów analizowanych w symulacjach

Rozkład	Charakterystyki rozkładu				Parametry GLD			
	EX	D^2X	α_3	α_4	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
D ₁	11	1	0	3	0,000	0,1974	0,1349	0,1349
D ₂	11	1	0	2	0,000	0,4952	0,5843	0,5843
D ₃	11	1	0	5	0,000	-0,0870	-0,0443	-0,0443
D ₄	11	1	0,5	4	-0,290	0,0604	0,0259	0,0447
D ₅	11	1	1	4	-0,579	-0,1423	-0,0273	-0,0995
D ₆	11	1	1	8	-0,248	-0,1878	-0,067	-0,1058
D ₇	11	1	-0,5	4	-0,290	0,0604	0,0259	0,0447
D ₈	11	1	-1	4	-0,579	-0,1423	-0,0273	-0,0995
D ₉	11	1	-1	8	-0,248	-0,1878	-0,067	-0,1058

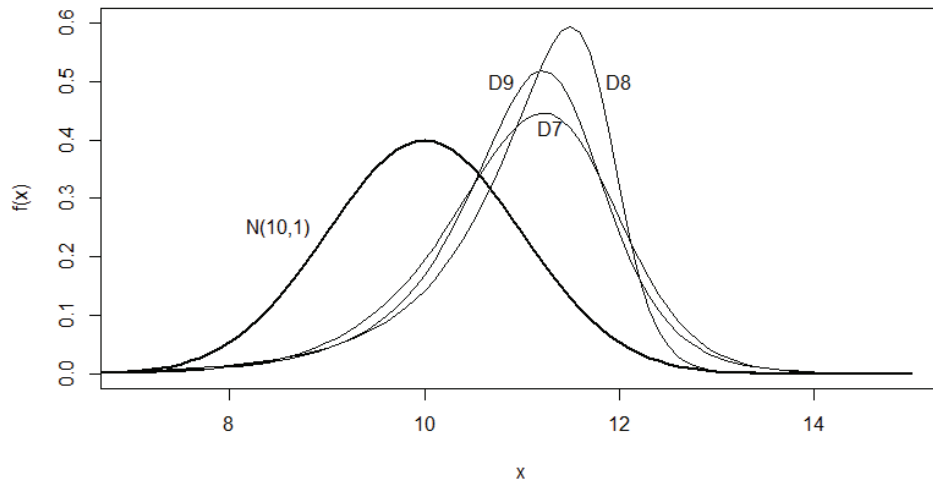


Rys. 1. Gęstości rozkładu normalnego oraz symetrycznych rozkładów GLD (D_1 , D_2 i D_3) wykorzystywanych w symulacjach komputerowych

Dla zmiennych o rozkładzie symetrycznym D_1 , D_2 , D_3 (rys. 1) po wygenerowaniu wartości losowych x z parametrami rozkładu GLD podanymi w tabeli 1 dokonano transformacji $x' = \mu_1 + x$.



Rys. 2. Gęstości rozkładu normalnego oraz rozkładów GLD (D_4 , D_5 i D_6) o prawostronnej asymetrii wykorzystywanych w symulacjach komputerowych



Rys. 3. Gęstości rozkładu normalnego oraz rozkładów GLD (D_7 , D_8 i D_9) o lewostronnej asymetrii wykorzystywanych w symulacjach komputerowych

Dla zmiennych losowych o asymetrii prawostronnej D_4 , D_5 i D_6 (rys. 2) wykonano transformację $x' = \mu_1 + x$, a dla zmiennych o asymetrii lewostronnej D_7 , D_8 i D_9 (rys. 3) transformację $x' = \mu_1 - x$.

Rozważane w symulacjach rozkłady zmiennych charakteryzują się różnym stopniem asymetrii i spłaszczenia. Są to wszystkie rozkłady jednomodalne i w praktyce możliwe jest, że przez dłuższy czas zmiana postaci rozkładu podczas monitorowania procesu nie zostanie zauważona. W takim przypadku w sposób nieuzasadniony będzie konsekwentnie wykorzystywana karta kontrolna \bar{X} .

3.2. Procedura symulacyjna

Kolejne etapy symulacji dla wszystkich analizowanych postaci modelu były następujące:

1. Na podstawie próbki wstępnej S_1 o liczebności $n = 30$ pobranej z rozkładu $N(10, 1)$ oszacowano linie GLK i GLO dla klasycznej karty kontrolnej.
2. Losowano próbkę S_2 o liczebności n (w symulacjach przyjęto $n = 5$ oraz $n = 10$) elementów z rozkładu D_i ($i = 1, 2, \dots, 9$).
3. Sprawdzano, czy na karcie kontrolnej \bar{X} wystąpiło przekroczenie GLK lub GLO oraz przeprowadzano test permutacyjny dla prób S_1 i S_2 . W teście permutacyjnym wykonywano $N_1 = 1000$ powtórzeń.
4. Kroki 1–3 wykonano $N = 10\,000$ razy.

Na podstawie przeprowadzonych symulacji wyznaczono liczbę przekroczeń GLK i GLO na karcie kontrolnej oraz liczbę odrzuceń H_0 dla testu permutacyjnego dla obu rozważanych poziomów istotności.

3.3. Wyniki symulacji

Na podstawie przeprowadzonych symulacji oszacowano prawdopodobieństwa wystąpienia sygnału dla procesów rozregulowanych oraz wartości ARL . Wyniki dla próbek o liczebności $n = 5$ zamieszczono w tabeli 2. Wyniki dla próbek o liczebności $n = 10$ zamieszczono w tabeli 3.

Tabela 2. Oceny prawdopodobieństwa wystąpienia sygnału (w) i ARL dla rozważanych rozkładów dla karty kontrolnej \bar{X} i karty opartej na testach permutacyjnych ($n = 5$)

Rozkład	$\alpha = 0,0013$				$\alpha = 0,02275$			
	przekroczenie GLK		test permutacyjny		przekroczenie GLO		test permutacyjny	
	w	ARL	w	ARL	w	ARL	w	ARL
D ₁	0,202	4,94	0,155	6,46	0,595	1,68	0,655	1,53
D ₂	0,228	4,38	0,158	6,33	0,596	1,68	0,494	2,03
D ₃	0,219	4,56	0,159	6,27	0,609	1,64	0,512	1,95
D ₄	0,189	5,30	0,140	7,12	0,583	1,72	0,487	2,06
D ₅	0,175	5,71	0,108	9,27	0,552	1,81	0,474	2,11
D ₆	0,181	5,54	0,133	7,51	0,571	1,75	0,486	2,06
D ₇	0,221	4,52	0,180	5,55	0,626	1,60	0,540	1,85
D ₈	0,220	4,55	0,202	4,95	0,638	1,57	0,547	1,83
D ₉	0,220	4,55	0,178	5,58	0,626	1,60	0,541	1,85

Tabela 3. Oceny prawdopodobieństwa wystąpienia sygnału (w) i ARL dla rozważanych rozkładów dla karty kontrolnej \bar{X} i karty opartej na testach permutacyjnych ($n = 10$)

Rozkład	$\alpha = 0,0013$				$\alpha = 0,02275$			
	przekroczenie GLK		test permutacyjny		przekroczenie GLO		przekroczenie GLK	
	w	ARL	w	ARL	w	ARL	w	ARL
D ₁	0,506	1,78	0,351	2,85	0,874	1,14	0,744	1,34
D ₂	0,572	1,75	0,359	2,79	0,882	1,13	0,745	1,34
D ₃	0,571	1,75	0,372	2,69	0,884	1,13	0,751	1,33
D ₄	0,553	1,81	0,345	2,90	0,873	1,15	0,744	1,35
D ₅	0,527	1,90	0,337	2,97	0,888	1,13	0,766	1,31
D ₆	0,550	1,82	0,359	2,79	0,892	1,12	0,762	1,31
D ₇	0,569	1,76	0,372	2,69	0,875	1,14	0,741	1,35
D ₈	0,603	1,66	0,416	2,41	0,876	1,14	0,757	1,32
D ₉	0,583	1,72	0,393	2,54	0,881	1,14	0,756	1,32

Symulacje pokazały, że prawdopodobieństwo wystąpienia sygnału o rozregulowaniu procesu w przypadku zastosowania karty opartej na testach permutacyjnych jest mniejsze niż dla klasycznej karty kontrolnej. W związku z tym

również przeciętny czas oczekiwania na wystąpienie sygnału o rozregulowaniu procesu jest dłuższy niż w przypadku karty klasycznej. Uzyskane wyniki potwierdzają odporność karty kontrolnej \bar{X} na pojawienie się asymetrii rozkładu. Wyniki uzyskane dla proponowanej karty opartej na testach permutacyjnych nie są jednak znacznie gorsze niż w przypadku karty Shewharta, co wskazuje na możliwości praktycznego wykorzystania proponowanego rozwiązania.

Podsumowanie

W opracowaniu przedstawiono wyniki symulacji komputerowych dla klasycznych kart kontrolnych oraz kart kontrolnych zbudowanych w oparciu o testy permutacyjne. W testach uwzględniono rozkłady charakteryzujące się różnymi rozkładami. W przypadku, gdy nie jest spełnione założenie normalności rozkładu zmiennej diagnostycznej, nie powinno się stosować testów parametrycznych. Jednak często odchylenia od normalności są niewielkie i mogą zostać niezauważone. Stosowanie w takim przypadku testu parametrycznego może prowadzić do błędnych wniosków. Testy permutacyjne nie wymagają spełnienia wspomnianego założenia.

Przeprowadzone symulacje wykazały, że przy stosunkowo niewielkich odchyleniach od rozkładu normalnego możliwe jest stosowanie klasycznej karty kontrolnej. Karta ta jest odporna na niewielkie odchylenia rozkładu monitorowanej charakterystyki od rozkładu normalnego. Jednocześnie wyniki uzyskane dla karty wykorzystującej testy permutacyjne nie były znacznie gorsze. Przeprowadzone symulacje wskazują, że możliwe jest również wykorzystanie takiej karty kontrolnej do monitorowania procesów. Zastosowanie takie będzie szczególnie wskazane, gdy rozkład monitorowanej charakterystyki odbiega od rozkładu normalnego.

Projekt został sfinansowany ze środków Narodowego Centrum Nauki przyznanych na podstawie decyzji numer DEC-2011/03/B/HS4/05630.

Literatura

- Efron B., Tibshirani R. (1993), *An Introduction to the Bootstrap*, Chapman & Hall, New York.
- Freimer M., Kollia G., Mudholkar G.S., Lin C.T. (1988), *A study of the generalized Tukey lambda family*, *Communications in Statistics*, „Theory and Methods”, Vol. 17.

- Kończak G. (2000), *Wykorzystanie kart kontrolnych w sterowaniu jakością w toku produkcji*, Akademia Ekonomiczna w Katowicach, Katowice.
- Kończak G. (2012), *Wprowadzenie do symulacji komputerowych*, Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach, Katowice.
- Kończak G. (2014), *On the modification of the non-parametric test for comparing locations of two populations* [w:] M. Gilli, G. Gonzalez-Rodriguez, A. Nieto-Reyes (eds.), *Proceedings of COMPSTAT*.
- Montgomery D.C. (2009), *Introduction to statistical quality control*, John Wiley & Sons, Inc.
- Ramberg J.S., Schmeiser B.W. (1974), *An approximate method for generating asymmetric random variables*, „Communications of the ACM”, Vol. 17.
- Ramberg J.S., Dudewicz E.J., Tadikamalla P.R., Mykytka E.F. (1979), *A Probability Distribution and Its Uses in Fitting Data*, „Technometrics”, Vol. 21, No. 2.
- Welch W.J. (1990), *Construction of Permutation Tests*, „Journal of the American Statistical Association”, Vol. 85, No. 411, *Theory and Methods*.
- Western Electric Company (1956), *Statistical Quality Control handbook*, Indianapolis, Indiana.

SIMULATION ANALYSIS OF THE PERMUTATION TESTS USE IN THE PROCESSES MONITORING

Summary: The control charts are used for monitoring technological processes. These tools are a graphical view of the sequence of parametric tests. The main assumption is that the process data are normally and independently distributed with mean μ and standard deviation σ . The control chart can't be used when the random variables are not normally distributed. There are some methods for monitoring non-normal processes. The proposal of the permutation tests use instead of the parametric tests in monitoring processes is presented in the paper. The results of Monte Carlo study for classical control charts and control charts based on the permutation tests are presented in the paper.

Keywords: process monitoring, control charts, permutation tests, Monte Carlo study.