METODY ILOŚCIOWE W BADANIACH EKONOMICZNYCH
Tom XV/3, 2014, str. 86 – 98

PROPOZYCJA MODYFIKACJI SKŁADKI NETTO W UBEZPIECZENIACH NA ŻYCIE Z FUNDUSZEM KAPITAŁOWYM UWZGLĘDNIAJĄCA DODATKOWE RYZYKO FINANSOWE

Magdalena Homa
Uniwersytet Wrocławski
e-mail: homam@prawo.uni.wroc.pl

Streszczenie: Wycena klasycznych ubezpieczeń na życie oparta jest na zasadzie równoważności i uwzględnia ryzyko śmierci oraz zmianę wartości pieniądza w czasie czyli tzw. ryzyko aktuarialne. Taka wycena aktuarialna zakłada strategię zabezpieczającą, którą trudno jest realizować firmom ubezpieczeniowym oferującym złożone produkty ubezpieczeniowe jakimi są m.in. ubezpieczenia z funduszem kapitałowym (UFK). W ubezpieczeniach tego typu świadczenia połączone są z ryzykiem finansowym, które nie podlega dywersyfikacji i w związku z tym wycena powinna uwzględniać ten dodatkowy aspekt. Dlatego też w pracy zaproponowano modyfikację sposobu kalkulacji składki netto dla ubezpieczeń UFK będącą kombinacją ujęcia aktuarialnego i finansowego. Zaproponowano aby przy kalkulacji składki uwzględnić zarówno ryzyko aktuarialne jak i finansowe związane z kontraktem ubezpieczeniowym łączącym aspekt ubezpieczeniowy z inwestycjami.

Słowa kluczowe: ubezpieczenie z funduszem kapitałowym (UFK), wycena przepływów pieniężnych, zasada równoważności, metoda Monte Carlo

UBEZPIECZENIE Z FUNDUSZEM KAPITAŁOWYM

Koncepcja ubezpieczenia UFK

Ubezpieczenie z funduszem kapitałowym UFK to umowa na życie lub dożycie pomiędzy ubezpieczonym a ubezpieczycielem, zgodnie z którą ubezpieczony opłaca składki, a w zamian firma ubezpieczeniowa zapewnia świadczenie w wysokości równej większej z wartości:

- kwoty gwarantowanej (oznaczonej G_π),

- sumy wynikającej z wartości portfela referencyjnego zależnej od kształtowania się ceny funduszu (oznaczonej $b(S_t)$).

Tym samym ubezpieczenie UFK różni się zasadniczo od klasycznych ubezpieczeń na życie i dożycie tym, że jest powiązane z inwestowaniem środków pochodzących ze składek w wydzielone fundusze. W Polsce kontrakty typu UFK umożliwiają ubezpieczonemu gromadzenie oszczędności w indywidualnie utworzonym przez niego portfelu inwestycyjnym, składającym się z funduszy prowadzonych przez niezależne od ubezpieczyciela zewnętrzne towarzystwa FI. Fundusze inwestycyjne różnią się pod względem ryzyka i polityki inwestycyjnej, a ponieważ ubezpieczenia UFK mają otwartą strukturę i są transparentne dają ubezpieczonym możliwość decydowania o składzie portfela w okresie trwania ubezpieczenia. W przeciwieństwie do klasycznego ubezpieczenia na życie, w którym koszt ubezpieczenia (wyrażony w opłacanej składce) jest jednakowy przez cały okres ubezpieczenia i nie wynika z wielkości ryzyka w danym roku, ale z uśrednionego ryzyka całego okresu ubezpieczenia, w ubezpieczeniach UFK koszt ten zmienia się w zależności od wpłat i obciążenia związanego nie tylko z ryzykiem śmierci, ale również z dodatkowym ryzykiem finansowym zależnym od ceny jednostek funduszu.

Wartość portfela referencyjnego a wypłata z tytułu ubezpieczenia

W ubezpieczeniu UFK, analogicznie jak w tradycyjnym ubezpieczeniu, zakład ubezpieczeń zgodnie z umową zobowiązuje się do wypłaty świadczenia w zależności od typu kontraktu:

- z tytułu dożycia końca okresu ubezpieczenia (UD),
- w przypadku śmierci w okresie jego trwania (UZ).

W przeciwieństwie do tradycyjnych ubezpieczeń na życie i dożycie losowy jest tutaj nie tylko moment wypłaty ale również jej wysokość zależna od wartości portfela (ceny jednostki funduszu) w momencie wypłaty. Przyjmując, że ubezpieczony w chwili t inwestuje część składki ubezpieczeniowej w wysokości π_t w wybrane aktywa (fundusze oferowane wraz z ubezpieczeniem UFK) z ceną określoną jako S_t zakupuje odpowiednio $\pi_t \cdot S_t^{-1}$ jednostek aktywów. Buduje w ten sposób wartość portfela referencyjnego wyrażoną wzorem [Schrager i in. 2004]:

$$X_t = \sum_{u=0}^{\min\{u|u>t\}-1} \pi_u \cdot S_t \cdot S_u^{-1} . \tag{1}$$

W ubezpieczeniu UFK ubezpieczyciel łącząc charakter ochronny i inwestycyjny wypłaca ubezpieczonemu w momencie zajścia zdarzenia objętego umową wyższą z wartości: kwoty gwarantowanej i wartości rynkowej portfela. Zatem wypłata z tytułu ubezpieczenia w chwili t jest odpowiednią funkcją zakumulowanej inwestycji zależną od ceny jednostek funduszu i jest ona równa [Schrager i in. 2004, Ballotta i in. 2006]:

$$b(X_t) = \max\{G_\pi, X_t\} = G_\pi + \max\{0, X_t - G_\pi\} = G_\pi + (X_t - G_\pi)^+ . \qquad (2)$$

Następnie uwzględniając zmianę wartości pieniądza w czasie wyznaczono zaktualizowaną na moment t wartość wypłaty dokonanej w chwili T z tytułu zdarzenia objętego umową jest równa [Bacinello 2003]:

$$\begin{aligned} V_t(b,T) &= e^{-\delta(T-t)} \cdot b(X_T) = \\ &= e^{-\delta(T-t)} \cdot G_\pi + \widetilde{V}_t(X,T) \end{aligned}, \qquad (3)$$

gdzie $\widetilde{V}_t(X,T) = e^{-\delta(T-t)} \cdot (X_T - G_\pi)^+$.

Z powyższego wzoru wynika, że kontrakt typu UFK może być wyceniany jako klasyczne ubezpieczenie odpowiednio na życie lub dożycie z sumą ubezpieczenia G_π (pierwszy człon wyrażenia) plus ewentualna nadwyżka wynikająca z wartości portfela zależna od średniej ważonej ceny aktywów (człon drugi wyrażenia). Przy wycenie przepływów wynikających z klasycznego ubezpieczeń na życie uwzględnia się ryzyko stopy procentowej, natomiast ryzyko w ubezpieczeniu UFK jest rozszerzone i obejmuje dodatkowo ryzyko inwestycji.

Wartość aktuarialna wypłaty

Wartość aktuarialna świadczenia lub składki w klasycznych ubezpieczeniach na życie jest wartością oczekiwaną zaktualizowanej wielkości świadczenia lub składki. W ubezpieczeniu UFK przy obliczaniu wartości oczekiwanej strumieni płatności należy uwzględnić historię dotyczącą procesu śmiertelności i ceny. Stąd wartość aktuarialna strumienia płatności w ubezpieczeniu UFK obliczana jest jako warunkowa wartość oczekiwana zdyskontowanych płatności, pod warunkiem całej historii procesu i określana ogólnym wzorem [Bowers i in. 1997]:

$$E\left[B_t \cdot \int_{\mathcal{T}} B_\tau^{-1} b(S_\tau) \mid \mathcal{F}_t \right], \qquad (4)$$

gdzie $\{\mathcal{F}_t\}_{0\le t\le T}$ – filtracja określająca historię procesu w chwili *t*.

W przypadku klasycznych ubezpieczeń filtracja oparta jest na procesie umieralności tzn.:

$$\mathcal{F}_t = \sigma\{\mathrm{I}(T_i \le t), 0 \le t \le T, i = 1, \ldots, l_x\}$$

gdzie T_i – przyszły czas życia i-tego ubezpieczonego, l_x – liczba osób w portfelu ubezpieczeniowym

Natomiast w przypadku ubezpieczeń z funduszem kapitałowym należy uwzględnić dodatkowo rynek finansowy i związane z nim ryzyko, w związku z tym w kalkulacjach należy uwzględnić następującą filtrację:

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{G}_t \wedge \mathcal{H}_t = \mathcal{G}_t \wedge \sigma\{\mathrm{I}(T_i \leq t), 0 \leq t \leq T, i = 1, \ldots, l_x\} \tag{5}$$

gdzie $\mathcal{G}_t$ – to filtracja zależna od modelu rynku.

Zakłada się, że rynek finansowy jest idealny i wszyscy mają taką samą wiedzę o nim, a informacje otrzymywane są wyłącznie z obserwacji procesu cen S_t. Wówczas o σ - ciele $\mathcal{G}_t = \mathcal{G}_t^S$ zakładamy, że jest filtracją opartą na procesie ceny. Zatem filtracja $\mathcal{F}_t$ określa pełną informację dostępną w chwili t dotyczącą zarówno procesu śmiertelności i kształtowania się cen. Uwzględniając tę filtrację, a tym samym rozszerzone ryzyko aktuarialne wyznaczono wartość aktuarialną wypłaty z tytułu dożycia końca okresu ubezpieczenia oraz z tytułu śmierci w okresie trwania ubezpieczenia stanowiące podstawę dalszych kalkulacji składki netto.

Ze względu na fakt, że ryzyko finansowe nie podlega dywersyfikacji przepływy pieniężne związane z ubezpieczeniem UFK wyceniono dla jednorodnego portfela ubezpieczeń. Wartość aktuarialna wypłaty wyrażonej wzorem (3) z tytułu ubezpieczenia na dożycie przy założeniu niezależności procesu umieralności i procesu cen można wyrazić wzorem:

$$E\left[B_D(t, S_{T_i}) \mid \mathcal{F}_t\right] = \sum_{i=1}^{l_x} {}_{T_i - t}\, p_{x+t} E\left[e^{-\delta(T_i - t)} \cdot b(S_{T_i}) \mid \mathcal{G}_t\right], \tag{6}$$

gdzie ${}_t\, p_x$ to prawdopodobieństwo przeżycia ubezpieczonego w wieku *x* okresu *t*.

Natomiast w przypadku ubezpieczenia na życie wartość aktuarialna wypłaty z tytułu śmierci zostaje wypłacona każdemu ubezpieczonemu z tytułu śmierci i wyraża się wzorem:

$$E\left[B_Z(t, S_T) \mid \mathcal{F}_t\right] = \sum_{i=1}^{l_x} \int_t^{T_i} E\left[e^{-\delta(\tau - t)} \cdot b(S_\tau) \mid \mathcal{G}_t\right]_{\tau - t}\, p_{x+t} \cdot \mu(x + \tau) d\tau, \tag{7}$$

gdzie $\mu(x+t)$ oznacza intensywność umieralności w wieku $x+t$.

Z powyższych wzorów wynika, że wyznaczenie wartości aktuarialnej wypłaty z tytułu ubezpieczenia UFK wymaga dodatkowych założeń co do modelu rynku finansowego (w zakresie procesu kształtowania się cen).

KALKULACJA SKŁADKI NETTO DLA UBEZPIECZENIA UFK

Zasada równoważności i jednorazowa składka netto

W klasycznych ubezpieczeniach na życie i dożycie wartość składki netto wyznacza się na podstawie wartości oczekiwanej zdyskontowanych przyszłych przepływów pieniężnych czyli ich wartości aktuarialnych. Podstawę tych kalkulacji stanowi klasyczna zasada równoważności zgodnie, z którą wartość aktuarialna składek i świadczeń wynikająca z zawartej umowy ubezpieczenia w całym okresie ubezpieczenia powinna się bilansować. Dla jednorazowej składki netto płatnej w momencie $t_0 = 0$ zasada ma postać [Bowers i in. 1997]:

$$\Pi_0 = E\left[\int_0^{T \wedge n} e^{-\delta t} \cdot b(S_t) \mid \mathcal{F}_0\right], \tag{8}$$

gdzie n - okres ubezpieczenia terminowego.

Składka netto wynikająca z powyższej zasady nazywana jest sprawiedliwą i w tradycyjnych ubezpieczeniach wyznacza się ją uwzględniając stopę wolną od ryzyka oraz ryzyko śmiertelności. W przypadku gdy firma ubezpieczeniowa posiada duży portfel to zgodnie z prawem wielkich liczb ryzyko śmierci jest dywersyfikowane. W przypadku ubezpieczeń UFK ubezpieczyciel ponosi z tytułu gwarancji dodatkowo ryzyko finansowe i nie ma możliwości jego dywersyfikacji. Należy podkreślić, że w Polsce najczęściej oferowane są ubezpieczenia UFK bez sumy gwarantowanej, a tym samym ubezpieczyciel nie uwzględnia go w kalkulacjach. Zatem składka w ubezpieczeniu UFK z wypłatą określoną wzorem (2) powinna być wyznaczona przy uwzględnieniu rozszerzonej filtracji generowanej przez portfel ubezpieczeniowy (w zakresie procesu śmiertelności) i finansowy (w zakresie procesu cen). Wykorzystując wyprowadzone wzory na wartość aktuarialną (6) i (7) przyjmując $t = 0$ jednorazowa składka netto UFK zgodnie z zasadą równoważności (9) wyraża się ogólnym wzorem:

$$\begin{aligned} \Pi_0 = & \sum_{i=1}^{l_x} {}_{T_i} p_x E\left[e^{-\delta T_i} \cdot b(S_{T_i}) \mid \mathcal{G}_0\right] + \\ & + \int_0^{T_i} E\left[e^{-\delta \tau} \cdot b(S_\tau) \mid \mathcal{G}_0\right] {}_\tau p_x \cdot \mu(x+\tau) d\tau \end{aligned} . \tag{10}$$

Cena a ryzyko finansowe UFK

Uwzględniając fakt, że w ubezpieczeniu UFK wypłata zależy od wartości rynkowej portfela referencyjnego po przekształceniach otrzymuje się następujący wzór jednorazowej składki netto:

$$\begin{aligned} \Pi_0 = & \sum_{i=1}^{l_x} {}_{T_i} p_x E\left[e^{-\delta T_i} \cdot \left(X_{T_i} - G_\pi\right)^+ \mid \mathcal{G}_0\right] + \\ & \int_0^{T_i} E\left[e^{-\delta \tau} \cdot \left(X_\tau - G_\pi\right)^+ \mid \mathcal{G}_0\right] {}_\tau p_x \cdot \mu(x+\tau) d\tau \\ & + G_\pi \left[e^{-\delta T_i} {}_{T_i} p_x + \int_0^{T_i} e^{-\delta \tau} \cdot {}_\tau p_x \cdot \mu(x+\tau) d\tau \right] \end{aligned} \tag{11}$$

Wartość oczekiwaną $E[e^{-\delta(T-t)} \cdot h(S_T) | \mathcal{G}_t]$ nazywa się Ceną arbitrażową instrumentu $h(S_t)$ w chwili $t < T$, opiewającego na aktywa o cenie opisanej przez proces $\{S_t\}_{t \geq 0}$ i o terminie zapadalności T [Jajuga K., Jajuga T. 2006]. W związku z tym przyjmując oznaczenie:

$$E\left[e^{-\delta(T-t)} \cdot (X_T - G_\pi)^+ \mid \mathcal{G}_t\right] = C_t(X_T, G_\pi)$$

wzór (11) na jednorazową składkę netto wyznaczoną według zasady równoważności z rozszerzoną na rynek finansowy filtracją przyjmie postać:

$$\Pi_0 = \underbrace{\sum_{i=1}^{l_x} G_\pi \left[e^{-\delta T_i} {}_{T_i} p_x + \int_0^{T_i} e^{-\delta\tau} \cdot {}_\tau p_x \cdot \mu(x+\tau) d\tau \right]}_{\Pi_0^I \equiv \Pi_{UZ \wedge UD}} + \tag{12}$$
$$+ \underbrace{\sum_{i=1}^{l_x} C_0(X_{T_i}, G_\pi) \cdot {}_T p_x + \int_0^{T_i} C_0(X_\tau, G_\pi) \cdot {}_\tau p_x \cdot \mu(x+\tau) d\tau}_{\Pi_0^{II} \equiv \Pi_{(X-G)^+}}$$

Powyższy wzór jest uogólnieniem wzoru na jednorazową składkę netto (j.s.n) w ubezpieczeniach życiowych. Pierwsza część wzoru określa wysokość należnej składki w klasycznych ubezpieczeniach na życie lub dożycie z sumą ubezpieczenia G_π. Część druga to dodatkowa część składki wynikająca z ryzyka finansowego portfela referencyjnego ubezpieczenia UFK. Zatem dokonując kalkulacji składki netto dla ubezpieczenia UFK należy połączyć ujęcie aktuarialne z finansowym, w zakresie narzędzi stosowanych do wyceny opcji (europejskiej w przypadku ubezpieczenia na życie i amerykańskiej w ubezpieczeniu na dożycie).

Należy jednak zauważyć, że wyznaczona składka zgodnie z zasadą równoważności charakterystycznej dla kalkulacji składki w ubezpieczeniach na życie, nie uwzględnia w pełni specyfiki ubezpieczeń na życie z funduszem kapitałowym wynikającej z faktu, że w ubezpieczeniach tego typu wielkość wypłaty nie jest znana w momencie kalkulacji składki. Analogiczna sytuacja ma miejsce w ubezpieczeniach nieosobowych, dlatego też proponuje się w przypadku ubezpieczeń UFK stosować zmodyfikowane zasady określania składek charakterystyczne dla ubezpieczeń nieosobowych. Zasady te oparte są na zasadzie równoważności, ale uwzględniony jest również dodatek na ryzyko [Moller 2003]. Dlatego też należałoby zmodyfikować powyższy wzór w taki sposób aby uwzględnić dodatkowe ryzyko obejmujące losowy charakter wypłaty. Wówczas wzór na jednorazową składkę przyjmuje ogólną postać:

$$\Pi_0 = \Pi_{UZ \wedge UD} + \Pi_{(X-G)^+} + \Pi_{Var(X-G)^+} \tag{13}$$

Pierwsze dwa składniki powyższego wzoru to odpowiednio składka klasycznego ubezpieczenia na życie i dożycie oraz część składki przeznaczona na pokrycie ryzyka finansowego wynikającego z wartości rynkowej portfela referencyjnego, natomiast ostatni człon to część składki przeznaczona na pokrycie ryzyka wynikającego z losowego charakteru wypłaty (odpowiednia miara zróżnicowania). W kontekście ubezpieczeń z funduszem kapitałowym, w których losowa wypłata zależna jest od wartości portfela referencyjnego w momencie wypłaty proponuje się zastosowanie zasad opartych na wartości oczekiwanej i miarach zróżnicowania. Ta część składki wyraża się wówczas wzorem:

$$\Pi_{Var(X-G)^+} = \sqrt{Var\left[\left(B_D(0,S_T)+B_Z(0,S_T)\right) \mid \mathcal{G}_0 \wedge \{T_i > 0\}\right]} =$$

$$= \sqrt{Var\left[\left(e^{-\delta T}\cdot b(S_T)\cdot \mathrm{I}\{T_i > T\} + \int_0^{T_i} e^{-\delta T}\cdot b(S_T)\cdot dN(\tau)\right) \mid \mathcal{G}_0 \wedge \{T_i > 0\}\right]}$$

Do wyznaczenia wariancji (odchylenia standardowego) potrzebna jest więc znajomość nie tylko wartości oczekiwanej ale również momentu zwykłego drugiego rzędu oraz momentu mieszanego poszczególnych strumieni płatności. Postępując analogicznie jak przy wyznaczaniu wartości oczekiwanej wyznacza się drugi moment przepływów, natomiast do wyznaczenia momentu mieszanego zastosowanie twierdzenie Fubiniego o całce podwójnej z funkcji o rozdzielonych zmiennych [Błaszczyszyn B., Rolski T.]. Ostatecznie odpowiednie wartości wyznaczono numerycznie i wykorzystano pakiet Mathematica.

KALKULACJA SKŁADKI NETTO DLA PRZYKŁADOWEGO UBEZPIECZENIA Z FUNDUSZEM KAPITAŁOWYM

Przykładowy portfel ubezpieczenia UFK

Jako przykład przeanalizowano kontrakt terminowy UFK na życie lub dożycie zgodnie, z którym jeśli ubezpieczony umrze to ubezpieczyciel wypłaci mu gwarantowaną sumę ubezpieczenia plus nadwyżkę wynikającą z wartości portfela. Ubezpieczony otrzyma również analogiczną wypłatę w sytuacji dożycia końca okresu ubezpieczenia. Ponadto przyjęto, że ubezpieczony może realizować różne strategie inwestycyjne różnicując tym samym zyski wynikające ze zmiennej wartości portfela. W analizie uwzględniono najlepsze fundusze UFK oferowane w Polsce w czterech grupach portfeli: PAK portfel akcji, PST - portfel stabilnego wzrostu, PZR - portfel zrównoważony oraz PPD - portfel papierów dłużnych.

W celu przeprowadzenia wyceny i kalkulacji składki netto dla poszczególnych typów ubezpieczenia UFK należy przeprowadzić symulację: procesu cen (przy założonym modelu rynku finansowego) oraz procesu śmiertelności (przy przyjętym modelu śmiertelności). Jako model rynku finansowego przyjęto klasyczny model Blacka-Scholesa (Blacka-Mertona-Scholesa) z horyzontem T. Zakładamy, że mamy do czynienia z rynkiem idealnym, na którym mamy papier ryzykowny (jednostki wybranego przez ubezpieczonego funduszu), o cenie zadanej wzorem [Jakubowski 2011].:

$$dS_t = \mu_S(t)S_t dt + \sigma_S(t)S_t dW_t$$

gdzie W_t jest procesem Wienera (standardowy ruch Browna),

S_t - przyszła cena instrumentu bazowego,

S_0 - cena rzeczywista instrumentu bazowego,

μ - średnia procesu,

σ - odchylenie standardowe procesu.

Jedynym rozwiązaniem powyższego równania różniczkowego jest:

$$S_t = S_0 \exp\left(\sigma W_t + \left(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right)\cdot t\right)$$

Proces S_t ma rozkład lognormalny tzn. $\ln S_t \sim N\left(\ln S_0 + \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)t, \sigma^2 t\right)$.

Na rynku tym mamy również rachunek ze stałą stopą procentową i kapitalizację ciągłą tj. proces wartości jednostki pieniężnej jest równy:

$$B_t = e^{\delta t} = e^{t\ln(1+r)}$$

Na tak opisanym rynku μ odzwierciedla stałe tendencje zmiany cen jednostek funduszu i nazywa się stopą aprecjacji, odchylenie standardowe σ odzwierciedla zmienność cen, natomiast stopa procentowa r to stopa wolna od ryzyka.

Ze względu na prawidłowy opis dynamiki śmiertelności w populacji dla przedziału wiekowego 30-80 lat, do wyznaczenia prawdopodobieństwa śmierci wykorzystano prawo Gompertza-Makehama zgodnie, z którym natężenie zgonów wyraża się wzorem:

$$\mu(x+t) = A + Bc^{x+t}$$

Na podstawie TTŻ dla mężczyzn przeprowadzono aproksymację funkcji i otrzymano następujące estymatory największej wiarygodności parametrów:

$$A = 0{,}0004;\ B = 0{,}0000034674;\ c = 10^{0{,}06}$$

Na tej podstawie wyznaczono prawdopodobieństwo przeżycia i śmierci wykorzystane w przykładzie.

Symulacja wysokości składki netto dla wybranych UFK

Do wyceny kontraktów typu UFK i ustalenia sprawiedliwej składki według wzoru (13) istotna staje się kwestia poprawnej wyceny instrumentu finansowego jakim jest opcja. W pracy do wyceny europejskiej opcji kupna zastosowano postać analityczną, natomiast w przypadku amerykańskiej opcji kupna, dla której nie ma jawnej postaci analitycznej ceny zastosowano metodę symulacyjną Monte-Carlo pozwalającą najogólniej obliczać wartości oczekiwane pewnych rozkładów prawdopodobieństwa. Przy zastosowaniu metody Monte Carlo do wyceny opcji kupna wykorzystywany jest fakt, że rozkład wartości instrumentu bazowego w dniu wygaśnięcia opcji jest zdeterminowany przez ustalony proces stochastyczny. Przy zastosowaniu opisanego modelu ewolucji cen i stosując metodę Monte Carlo, poprzez wielokrotne symulacje otrzymano rozkład końcowych wartości instrumentu pierwotnego, na który wystawiona jest opcja. Procedurę wyznaczania wartości opcji kończy szacowanie wartości oczekiwanej. Następnie z uwzględnieniem przyjętego modelu procesu śmierci, przeprowadzono kalkulację należnej jednorazowej składki netto[1]. Wyniki dla ubezpieczonego mężczyzny w wieku 30 lat z gwarantowaną sumą ubezpieczenia równą 1000j.p i stopą wolną od ryzyka 5% inwestującego w portfele referencyjne zamieszono w poniższych tabelach.

Tabela 1 Jednorazowa składka netto ubezpieczenia UFK na dożycie z portfelem PAK

Termin	Π_{UD}	$\Pi_{(X-G)^+}$	$\Pi_{Var(X-G)^+}$
25	278,52	53,63	21,20
30	207,20	66,44	19,49
35	146,69	75,70	17,96
40	94,06	70,79	17,04
45	49,50	53,71	12,55

Źródło: opracowanie własne

Tabela 2 Jednorazowa składka netto ubezpieczenia UFK na dożycie z portfelem PZR

Termin	Π_{UD}	$\Pi_{(X-G)^+}$	$\Pi_{Var(X-G)^+}$
25	278,52	40,76	19,00
30	207,20	54,82	18,42
35	146,69	63,11	15,99
40	94,06	62,19	14,31
45	49,50	47,75	10,74

Źródło: opracowanie własne

Tabela 3 Jednorazowa składka netto ubezpieczenia UFK na dożycie z portfelem PSW

Termin	Π_{UD}	$\Pi_{(X-G)^+}$	$\Pi_{Var(X-G)^+}$
25	278,525	16,77	13,99
30	207,207	28,40	12,99
35	146,69	38,70	11,44
40	94,0623	41,76	9,59
45	49,5071	35,05	6,66

Źródło: opracowanie własne

[1] Do obliczeń numerycznych wykorzystano pakiet Mathematica.

Tabela 4 Jednorazowa składka netto ubezpieczenia UFK na dożycie z portfelem PPD

Termin	Π_{UD}	$\Pi_{(X-G)^+}$	$\Pi_{Var(X-G)^+}$
25	278,525	0,28	7,68
30	207,207	2,66	6,81
35	146,69	9,62	5,58
40	94,0623	18,32	3,99
45	49,5071	21,05	1,96

Źródło: opracowanie własne

Tabela 5 Jednorazowa składka netto ubezpieczenia UFK na życie z portfelem PAK

Termin	Π_{UZ}	$\Pi_{(X-G)^+}$	$\Pi_{Var(X-G)^+}$
25	25,58	27,84	4,31
30	37,91	50,94	7,07
35	55,44	92,74	10,28
40	78,85	163,74	14,28
45	106,09	268,67	17,79

Źródło: opracowanie własne

Tabela 6 Jednorazowa składka netto ubezpieczenia UFK na życie z portfelem PZR

Termin	Π_{UZ}	$\Pi_{(X-G)^+}$	$\Pi_{Var(X-G)^+}$
25	25,58	21,76	2,81
30	37,91	38,51	5,91
35	55,44	74,52	9,12
40	78,85	120,47	12,80
45	106,09	239,21	16,40

Źródło: opracowanie własne

Tabela 7 Jednorazowa składka netto ubezpieczenia UFK na życie a z portfelem PSW

Termin	Π_{UZ}	$\Pi_{(X-G)^+}$	$\Pi_{Var(X-G)^+}$
25	25,58	19,51	1,50
30	37,91	36,24	2,97
35	55,44	71,57	5,53
40	78,85	116,31	8,32
45	106,09	210,35	12,12

Źródło: opracowanie własne

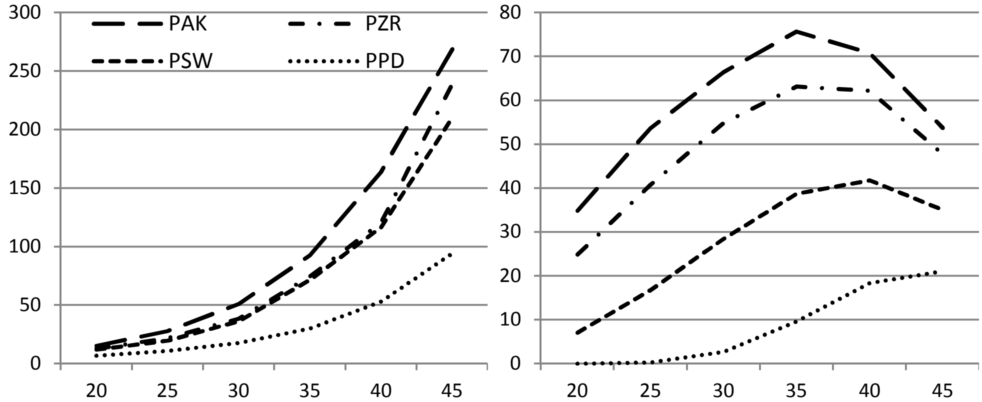
Tabela 8 Jednorazowa składka netto ubezpieczenia UFK na życie z portfelem PPD

Termin	Π_{UZ}	$\Pi_{(X-G)^+}$	$\Pi_{Var(X-G)^+}$
25	25,58	10,76	0,00
30	37,91	17,58	0,00
35	55,44	29,97	0,68
40	78,85	52,84	1,51
45	106,09	94,26	5,89

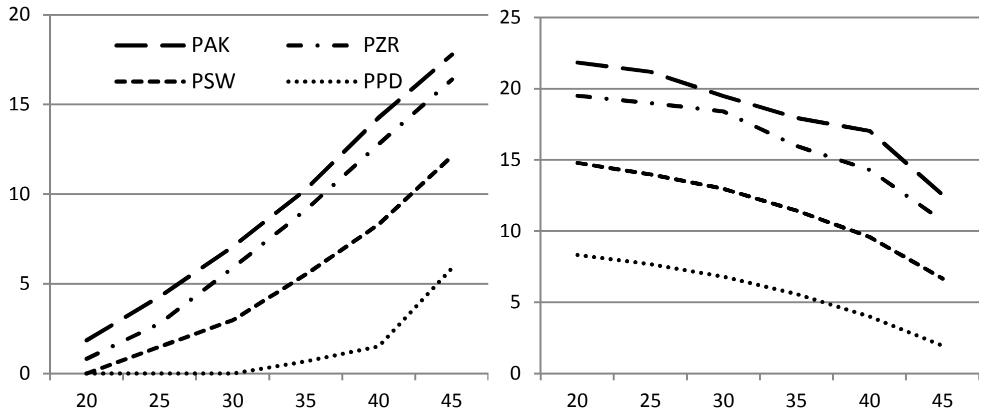
Źródło: opracowanie własne

Na podstawie powyższych symulacji można stwierdzić, że pierwsza część składki wyznaczona w tradycyjny sposób zarówno w ubezpieczeniu UZ jak i UD, niezależnie od przyjętej strategii inwestycyjnej ma taką samą wartość, co świadczy o tym, że wynika ona z uśrednionego ryzyka śmierci. Jest to podejście charakterystyczne dla ubezpieczeń życiowych i potwierdza konieczność potraktowania ubezpieczeń UFK w sposób szczególny stosując zasady przypisane w ujęciu czysto aktuarialnym do ubezpieczeń nieosobowych. Wyniki wskazują, że w ubezpieczeniach z funduszem kapitałowym wysokość składki netto powinna być wyższa i uwzględniać dodatkowe ryzyko decyzji inwestycyjnych ubezpieczonego. Ryzyko wynikające ze strategii inwestycyjnej ubezpieczonego znajduje pokrycie w dodatkowych członach składki, które w sposób istotny zwiększają jej wysokość, zapewniając jednocześnie wypłacalność ubezpieczyciela. Ich kształtowanie jako funkcji okresu ubezpieczenia przedstawiono na poniższych wykresach.

Rysunek 1 Dodatek na ryzyko portfela (część składki $\Pi_{(X-G)^+}$) w ubezpieczeniu UZ i UD



Rysunek 2 Dodatek na ryzyko portfela (część składki $\Pi_{Var(X-G)^+}$) w ubezpieczeniu UZ i UD



Źródło: opracowanie własne

Na wykresach przedstawiono dwie części składki przeznaczone na pokrycie ryzyka finansowego związanego ze zmianą ceny jednostek funduszu i ryzyka wynikającego z losowego charakteru wypłaty. Jak można było oczekiwać w ubezpieczeniu UFK na życie są one rosnącą, wypukłą funkcją niezależnie od przyjętej strategii. Natomiast w ubezpieczeniu UFK na dożycie to funkcje wklęsłe (rosnąco-malejące). Bez wątpienia kształt otrzymanych funkcji zdeterminowany jest przez prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia objętego umową.

WNIOSKI

Na podstawie uzyskanych wyników można stwierdzić, że niezależnie od przyjętej przez ubezpieczonego strategii inwestycyjnej ryzyko finansowe determinuje w sposób istotny wysokość składki. W związku z tym nie powinno być pomijane w przeprowadzanych wycenach i kalkulacjach. Proponowane rozszerzenie filtracji określającej pełną informację dostępną w chwili t dotyczącą procesu śmiertelności i kształtowania się cen, zastosowanie metod wyceny opcji (europejskiej i amerykańskiej), jak również spojrzenie na ubezpieczenia UFK poprzez pryzmat ubezpieczeń nieosobowych wydaje się być zasadne. Takie podejście wymusza kalkulacje składki będącą kombinacją podejścia aktuarialnego i finansowego.

BIBLIOGRAFIA

Bacinello A. (2003) Fair Valuation of Guaranteed Life Insurance Participating Contact Embedding a Surrender Option, The Journal of Risk and Insurance, Vol.70, No. 3.

Ballotta L., Habermann S. (2006) The fair valuation problem of guaranteed annuity options: the stochastic mortality environment case, Insurance Mathematics & Economics, nr 38.

Błaszczyszyn B., Rolski T.: Podstawy matematyki ubezpieczeń na życie. Warszawa: Wydawnictwo Naukowo-Techniczne 2004

Bowers N.L., Gerber H.U.,Hickman J.C, Jones D.A., Nesbitt C. (1997) Actuarial mathematics, The Society of Actuaries, Schaumburg .

Jajuga K., Jajuga T. (2006) Inwestycje, PWN Warszawa.

Jakubowski J. (2011) Modele matematyczne rynków instrumentów pochodnych I, Uniwersytet Warszawski.

Hardy M. (2003) Investment Guarantees. Modeling and Risk Management for Equity-Linked Life Insurance, John Wiley & Sons Inc.

Moller T. (2003) Indifference pricing of insurance contracts In a products pace model: applications, Insurance Mathematics & Economics, nr 32.

Moller T.,Steffensen M. (2007) Market valuation methods in life and pension insurance, Cambridge University Press, Cambridge.

Schrager D., Pelsser A. (2004) Pricing Rate of Retrun Guarantees in Regular Premium Unit Linked Insurance, Insurance Mathematics & Economics, nr 35.

PROPOSITION MODIFICATION OF NET PREMIUM FOR LIFE INSURANCE WITH EQUITY FUND INCLUDING FINANCIAL RISK

Abstract: Valuation of traditional life insurance is based on the principle of equivalence, taking into account the risk of death and change in time value of money ie. actuarial risk. Such actuarial valuation involves hedging strategy, which is difficult to implement by the insurance companies offering insurance with equity fund (unit-linked insurance). In this type of insurance benefits are linked to financial risk, which is not subject to the diversification and, therefore, the valuation should take into account this additional aspect. Therefore, in this article through combining a financial and actuarial approach, proposed a modification of the method of calculation of the net premiums for the unit-linked insurance. The value of net premium are determined as an appropriate conditional expected value including extended actuarial risk (risk of death and also financial risk).

Keywords: unit-linked insurance, the valuation of cash flows in ULIP, net premium, the principle of equivalence, actuarial risk, the Monte Carlo method