*prof. dr hab. Józef Banaś*
*dr Dorota Dejniak*

Międzyinstytutowy Zakład Matematyczno-Przyrodniczy
Państwowa Wyższa Szkoła Techniczno-Ekonomiczna w Jarosławiu

# Zastosowanie równań różnicowych w modelowaniu równowagi rynkowej

## WPROWADZENIE

Równowaga rynkowa jest stanem gospodarki, w którym popyt równoważy podaż wyprodukowanych dóbr i usług [por. Begg, Fischer, Dornbusch, 1996; Chiang, 1994; Varian, 2002]. Jest to stan idealny i mało realny do osiągnięcia w rzeczywistości. Tym niemniej, stan taki jest bardzo pożądany z punktu widzenia opłacalności produkowanych towarów. Wtedy bowiem następuje ich całkowita wyprzedaż oraz nie ma poważnych kłopotów z ich magazynowaniem. W praktyce ekonomicznej producenci, poprzez swoje działania, zawsze zmierzają do takiego stanu równowagi. Można oczywiście dyskutować, czy stan ten jest pożądany przez przeciętnego konsumenta. Oczywiście z jednej strony tak, bo wtedy nie ma groźby zjawiska bezrobocia (przynajmniej na dużą skalę), które to powodowane jest masowymi zwolnieniami wtedy, gdy produkowane towary są w dużej mierze niezbywalne na rynku. Wiadomo jest, że duże bezrobocie jest przyczyną powstawania poważnych nierówności społecznych.

Z drugiej jednak strony, równowaga rynkowa nie zawsze jest pożądana przez uboższe grupy społeczeństwa, bowiem nie zachęca ona producentów do sprzedaży towarów po niższych cenach. Tym niemniej, na pewno nie jest pożądany taki stan braku równowagi rynkowej, gdy podaż jest niższa od popytu. Stan taki powoduje drożyznę i przykre reperkusje dla uboższych grup społeczeństwa.

Z wyżej przeprowadzonych rozważań wynika, że z punktu widzenia interesów niemal całego społeczeństwa, stan równowagi rynkowej jest jednak stanem pożądanym.

W przedkładanej pracy będziemy rozpatrywać model równowagi rynkowej skonstruowany przy pomocy prostych narzędzi matematycznych, których dostarcza teoria równań różnicowych [zob. Agarwal, 2000; Banaś, 2007; Chiang, 1994; Elaydi, 1999]. Wydaje się bowiem, że równania różnicowe są najbardziej odpowiednie przy opisie większości zjawisk ekonomicznych. Wynika to stąd, że przebieg zjawisk ekonomicznych zdeterminowany jest głównie poprzez podejmowane decyzje dotyczące wielkości i jakości produkcji. Decyzje te są wynikiem dokonywanych obserwacji rynku, a w szczególności obserwacji wielkości popytu i podaży na tym rynku określonych towarów i usług. Na podstawie tych obserwacji podejmuje się wspomniane wyżej decyzje dotyczące wielkości produkcji danego towaru. Oczywiście decyzje te skutkują w pewnym okresie i na ogół nie są zbyt szybko korygowane. Ewentualna korekta wymaga dość długiego okresu, gdyż nie jest łatwo zmienić stan produkcji. W niektórych sytuacjach, jak np. w rolnictwie, w leśnictwie itp. jest to wręcz niemożliwe.

Reasumując, na podstawie powyższych rozważań widzimy, że wzajemna gra odbywająca się na rynku odnośnie wielkości produkcji w powiązaniu z popytem, przebiega przeważanie w sposób skokowy, z okresu na okres. Jak wiadomo [por. Agarwal, 2000; Chiang, 1994; Elaydi, 1999; Gandolfo, 1971] przebieg zjawisk o charakterze skokowym najlepiej opisuje się przy pomocy narzędzi jakich dostarcza teoria równań różnicowych.

W pracy tej będziemy właśnie realizować takie podejście, tzn. będziemy modelować równowagę rynkową przy pomocy teorii równań różnicowych. Będziemy jednak rozpatrywać sytuacje ekonomiczne na tyle proste, że dają się one opisywać przy pomocy równań różnicowych liniowych pierwszego rzędu [zob. Agarwal, 2000; Banaś, 2007; Elaydi, 1999].

Teoria takich równań jest na tyle prosta, że przedstawiana jest ona niemal we wszystkich pozycjach bibliograficznych, które tą teorię omawiają lub stosują. Dlatego też nie będziemy tutaj podawać szczegółów tej teorii, odwołując się do takich właśnie książek i podręczników.

Warto w tym miejscu wspomnieć również o tym, że niewątpliwie dość duży wpływ na przebieg zjawisk ekonomicznych determinujących sytuację na rynku, a w konsekwencji osiąganie stanu równowagi rynkowej, mają różnego typu zjawiska losowe. Do takich zjawisk zaliczamy np. różne zjawiska klimatyczne związane z pogodą, jak również wiele zjawisk o charakterze ekonomicznym, których wystąpienie lub intensywność przebiegu trudno jest dokładnie przewidzieć.

Do pierwszej grupy zjawisk losowych, związanych z pogodą, zaliczyć można np. ulewy, susze, wymarzanie zasiewów w wyniku dużych mrozów w zimie w połączeniu z małymi opadami śniegu itp. Zjawiska te są szczególnie dotkliwie odczuwalne w rolnictwie i w tych gałęziach gospodarki, które związane są z sektorem rolno-spożywczym.

Druga grupa wspomnianych wyżej zjawisk losowych to zjawiska o charakterze ekonomiczno-społecznym, takie jak załamanie się rynku czy też recesje gospodarcze w pewnych krajach, a nawet te o charakterze globalnym. Zaliczyć tutaj można również szereg konfliktów międzynarodowych, w tym konfliktów zbrojnych, których występowanie bardzo mocno wpływa na ogólną sytuację na rynku, a w szczególności na zachowanie się równowagi rynkowej. Wystarczy tutaj, jako przykład, wspomnieć o konflikcie w Zatoce Perskiej czy też w Cieśninie Ormuz. Konflikty te bardzo mocno wpływają na ceny występujące np. na rynku paliw, co z kolei mocno wpływa na inne sektory gospodarki.

W literaturze można spotkać liczne próby modelowania przebiegu zjawisk ekonomicznych z uwzględnieniem czynników losowych [por. Boucekkine, Licandro, Paul, 1977; Fulford, Forrester, Jones, 2001; Swords, 2009; Wei-Bin Zhang, 2009]. Jednakże otrzymywane w takich modelach losowe (stochastyczne) równania różnicowe są bardzo skomplikowane i mają tylko znaczenie teoretyczne i poznawcze. Oczywistym jest, że trudno oczekiwać rozwiązań takich równań, a tym bardziej analizy przebiegu otrzymanych rozwiązań.

Z opisanych wyżej względów w pracy tej zajmujemy się tylko modelowaniem zjawisk ekonomicznych o charakterze skokowym, które mają charakter deterministyczny. Zjawiska takie można z powodzeniem opisywać przy pomocy równań różnicowych lub układów takich równań [zob. Agarwal, 2000; Banaś, 2007; Chiang, 1994; Elaydi, 1999; Fabozzi, Focardi, Kolm, 2006; Wei-Bin Zhang, 2009]. Jak już wyżej wspomnieliśmy, ograniczymy się tutaj do prostych modeli ekonomicznych, które są opisane prostymi równaniami różnicowymi. Zwracamy natomiast dużą uwagę na analizę przebiegu rozwiązań rozważanych równań i ich interpretację ekonomiczną.

## LINIOWY MODEL RÓWNOWAGI RYNKOWEJ BEZ MAGAZYNOWANIA

Przedstawimy teraz tzw. model liniowy równowagi rynkowej opisany przy pomocy równań różnicowych.

W tym celu załóżmy, że rozpatrujemy rynek, na którym znajduje się jedno dobro konsumpcyjne. Producent tego dobra (np. producent jakiegoś towaru, rolnik podejmujący decyzję o wielkości zasiewów zboża, leśnik decydujący o wielkości wyrębu lasu itd.) musi podjąć decyzję o wielkości produkcji na jeden okres (ustalony umownie) przed jej sprzedażą.

Załóżmy teraz również, że cała produkcja rozważanego dobra z omawianego okresu jest wystawiona na sprzedaż oraz, że żadna jej część nie ulega magazynowaniu. Tego typu sytuacja ma np. miejsce w przypadku produktów, które szybko ulegają niszczeniu i psuciu albo wtedy, gdy brak jest odpowiednich magazynów czy urządzeń do przechowywania wytworzonej produkcji.

Reasumując, będziemy zakładać, że decyzja dotycząca wielkości produkcji jest podejmowana w *n*-tym okresie na podstawie informacji o występującej w tym okresie cenie $P_n$ na tę produkcję. Produkcja ta będzie wystawiona na sprzedaż w okresie następnym, tzn. w okresie $n+1$, a zatem będzie mieć wpływ na podaż $Q_{s,n+1}$ w tym okresie.

Zależność tą możemy zapisać w postaci

$$Q_{s,n+1} = f(P_n)$$

lub, po cofnięciu o jeden okres do tyłu, w postaci

$$Q_{s,n} = f(P_{n-1}), \tag{1}$$

gdzie $f$ jest pewną funkcją.

Z drugiej strony, popyt $Q_{d,n}$ w okresie o numerze $n$, jest również funkcją ceny w tym okresie. Zapisujemy to w następujący sposób

$$Q_{d,n} = g(P_n). \tag{2}$$

Dla uproszczenia naszego modelu przyjmiemy tutaj, że funkcje $f$ oraz $g$ są funkcjami liniowymi, tzn., że funkcje te mają postać

$$f(P_n) = -\gamma + \delta P_n,$$

$$g(P_n) = \alpha - \beta P_n,$$

gdzie $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ są pewnymi stałymi dodatnimi.

Uwzględniając powyższe zależności oraz to, że wtedy

$$f(P_{n-1}) = -\gamma + \delta P_{n-1},$$

a także biorąc pod uwagę (1) i (2), otrzymujemy

$$Q_{s,n} = -\gamma + \delta P_{n-1}, \tag{3}$$

$$Q_{d,n} = \alpha - \beta P_n. \tag{4}$$

Oczywistym wydaje się przyjęcie założenia, że warunek równowagi rynkowej w rozważanym tutaj modelu dyskretnym rynku będzie miał postać

$$Q_{s,n} = Q_{d,n}.$$

Stąd oraz z (3) i (4) dostajemy

$$\beta P_n + \delta P_{n-1} = \alpha + \gamma.$$

Dalej, po prostych przekształceniach, otrzymujemy

$$P_n + \frac{\delta}{\beta} P_{n-1} = \frac{\alpha + \gamma}{\beta}.$$

W celu zapisania powyższego równania w tradycyjnej postaci równania różnicowego liniowego rzędu pierwszego [por. Agarwal, 2000; Banaś, 2007; Cull, Flahive, Robson, 2005], dokonamy przesunięcia o jeden okres do przodu. Prowadzi to do następującego równania

$$P_{n+1} + \frac{\delta}{\beta} P_n = \frac{\alpha + \gamma}{\beta} . \tag{5}$$

Otrzymane równanie różnicowe jest równaniem liniowym pierwszego rzędu niejednorodnym, o współczynniku stałym. Biorąc pod uwagę fakt, że prawa strona tego równania jest stałą, przewidujemy rozwiązanie szczególne tego równania w postaci ciągu stałego $y_n = k \ (n = 0, 1, 2, \dots)$. Stąd, po podstawieniu do równania dostajemy, że stała

$$k = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}$$

jest szukanym rozwiązaniem szczególnym równania niejednorodnego (5), tzn. rozwiązanie to jest ciągiem postaci

$$y_n = \frac{\propto \ + \beta}{\beta + \delta} \tag{6}$$

dla $n = 0, 1, 2, \dots$ .

Rozważmy teraz równanie różnicowe jednorodne odpowiadające równaniu (5). Ma ono postać:

$$P_{n+1} + \frac{\delta}{\beta} P_n = 0 .$$

Na podstawie dobrze znanych faktów [Agarwal, 2000; Banaś, 2007] rozwiązanie ogólne wyżej napisanego równania ma postać

$$P_n = C \left( -\frac{\delta}{\beta} \right)^n , \tag{7}$$

gdzie $C$ jest dowolną stałą oraz $n = 0, 1, 2, \dots$ .

Łącząc (6) i (7) wnioskujemy, że rozwiązanie ogólne równania różnicowego (5) ma postać

$$P_n = C \left( -\frac{\delta}{\beta} \right)^n + \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta} . \tag{8}$$

Załóżmy w dalszym ciągu, że znany jest pierwszy wyraz $P_0$ ciągu $\{P_n\}$ spełniającego równanie różnicowe (5).

Wtedy, podstawiając w (8) $n = 0$ , dostaniemy

$$P_0 = C + \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta},$$

skąd

$$C = P_0 - \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}.$$

Po uwzględnieniu tej równości w (8), mamy

$$P_n = \left(P_0 - \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}\right)\left(-\frac{\delta}{\beta}\right)^n + \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}, \tag{9}$$

Zauważmy, że otrzymana postać (9) rozwiązania równania różnicowego (5) generuje wielkość współczynników $\delta$ i $\beta$ występujących jako współczynniki kierunkowe w funkcjach liniowych zadanych wzorami (3) i (4). Rzeczywiście, gdyby dopuścić możliwość, że $\frac{\delta}{\beta} > 1$, to wtedy $-\frac{\delta}{\beta} < -1$, a więc ciąg

$$\left\{\left(-\frac{\delta}{\beta}\right)^n\right\}$$

byłby ciągiem, który nie ma granicy. Mało tego, podciąg tego ciągu o wyrazach o numerach parzystych zmierza do $+\infty$, natomiast podciąg o wyrazach o numerach nieparzystych zmierza do $-\infty$. Wtedy z (9) wnioskujemy, w zależności od tego, czy wyrażenie

$$P_0 - \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$$

jest dodatnie czy ujemne, że któryś z dwóch podciągów ciągu $\{P_n\}$, tzn. podciąg ciągu $\{P_n\}$ o wyrazach o numerach nieparzystych lub podciąg ciągu $\{P_n\}$ o wyrazach o numerach parzystych zmierza do $-\infty$ i otrzymujemy sprzeczność z faktem, że cena przyjmuje wartości nieujemne.

Jedynie w przypadku, gdy $P_0 = \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$ dostajemy rozwiązanie stałe, będące rozwiązaniem oznaczającym stan równowagi. Ale sytuacja taka wydaje się zbyt wyidealizowana, żeby mogła mieć miejsce w rzeczywistości.

Z przeprowadzonych wyżej rozważań wynika więc, że współczynniki $\beta$ oraz $\delta$ występujące w określeniu funkcji (3) i (4), spełniają zależność $\delta < \beta$, tzn. $\frac{\delta}{\beta} < 1$.

Wtedy

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{\delta}{\beta}\right)^n = 0$$

co implikuje, że rozwiązanie $\{P_n\}$, postaci (8) lub (9), naszego równania różnicowego (5), dąży do stanu równowagi

$$\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta},$$

bowiem wtedy mamy:

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}.$$

Posługując się pojęciem stabilności i asymptotycznej stabilności rozwiązań równań różnicowych [Agarwal, 2000; Elaydi, 1999] można łatwo pokazać, że rozwiązanie

$$P_0 = \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$$

jest asymptotycznie stabilnym rozwiązaniem równania różnicowego (5).

Przeprowadzone wyżej rozumowanie o charakterze czysto matematycznym pozwala wywnioskować, że stan równowagi rynkowej będzie osiągany w wyniku długoterminowego cyklu produkcyjnego (opisywanego równaniem różnicowym (5)), jeżeli $\alpha < \delta$ , co oznacza, że prędkość zwiększania się popytu powinna być mniejsza od prędkości wzrostu podaży. Rzeczywiście, wynika to z zależności (1), (2), (3) i (4).

Innymi słowy można ten warunek wypowiedzieć w ten sposób, że wzrostowi podaży towaru na rynku nie powinno towarzyszyć zbyt duże zwiększanie się popytu na ten towar. Z punktu widzenia ekonomii wniosek taki wydaje się być w pełni logiczny i zasadny.

## LINIOWY MODEL RÓWNOWAGI RYNKOWEJ Z MAGAZYNOWANIEM

W dalszym ciągu uogólnimy nieco poprzednio rozpatrywany model. Załóżmy mianowicie, że na rynku znajduje się jedno dobro, które tym razem może być magazynowane. Ponadto będziemy zakładać, że spełnione są następujące warunki:

1. Wielkość popytu i wielkość podaży są, podobnie jak poprzednio, liniowymi funkcjami ceny $P$ , mającymi taką postać jak w (3) oraz (4).
2. Cenę dobra wystawionego do sprzedaży ustala się na początku każdego okresu po uwzględnieniu wielkości zasobów. Jeżeli w poprzednim okresie przyjęta cena spowodowała nagromadzenie zapasów, to cenę na bieżący okres usta-

la się na niższym poziomie. Na odwrót, jeżeli zapasy w poprzednim okresie uległy zmniejszeniu, to cenę na bieżący okres ustala się na poziomie wyższym.

3. Cenę z okresu na okres dostosowuje się odwrotnie proporcjonalnie do zaobserwowanych wielkości zasobów.

Przedstawimy teraz matematyczną interpretację sformułowanych wyżej założeń. Ma ona postać następujących zależności:

$$Q_{d,n} = \alpha - \beta P_n\,, \tag{10}$$

$$Q_{s,n} = -\gamma + \delta P_n\,, \tag{11}$$

$$P_{n+1} = P_n - \sigma\left(Q_{s,n} - Q_{d,n}\right), \tag{12}$$

gdzie przyjmujemy, że $\alpha > 0,\quad \beta > 0,\quad \gamma > 0,\quad \delta > 0$ oraz $\sigma > 0$. Współczynnik $\sigma$ nazywa się *współczynnikiem dostosowywania ceny do zapasów* [por. Banaś, 2007; Chiang, 1994].

Wstawiając związki (10) i (11) do (12), otrzymujemy następujące równanie różnicowe

$$P_{n+1} - [1 - \sigma(\beta + \delta)]P_n = \sigma(\alpha + \gamma)\,. \tag{13}$$

Jest to równanie różnicowe liniowe pierwszego rzędu, niejednorodne, o współczynniku stałym.

Biorąc pod uwagę fakt, że prawa strona równania (13) jest stała, podobnie jak to miało miejsce dla równania różnicowego (5), będziemy przewidywać postać rozwiązania szczególnego tego równania jako ciąg stały $y_n = k$ dla $n = 0, 1, 2, \dots$ . Po podstawieniu do (13) dostajemy

$$k - [1 - \sigma(\beta + \delta)]k = \sigma(\alpha + \gamma)\,.$$

Stąd otrzymujemy

$$k = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}\,,$$

a więc jednym z rozwiązań szczególnych równania (13) jest ciąg postaci

$$y_n = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}\,, \qquad n = 0, 1, 2, \dots. \tag{14}$$

Rozważmy teraz równanie różnicowe jednorodne stowarzyszone z równaniem (13), które ma postać:

$$P_{n+1} - [1 - \sigma(\beta + \delta)]P_n = 0\,. \tag{15}$$

Jak wiadomo z teorii równań różnicowych [por. Agarwal, 2000; Banaś, 2007; Chiang, 1994], rozwiązanie ogólne równania (15) można przedstawić w postaci

$$P_n = C[1 - \sigma(\beta + \delta)]^n, \tag{16}$$

dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ , gdzie $C$ jest dowolną stałą.

Na podstawie twierdzenia o postaci rozwiązania ogólnego równania różnicowego liniowego pierwszego rzędu [Agarwal, 2000; Banaś, 2007; Elaydi, 1999], biorąc pod uwagę (14) i (16) otrzymujemy, że rozwiązanie ogólne równania różnicowego (13) ma postać:

$$P_n = C[1 - \sigma(\beta + \delta)]^n + \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}, \tag{17}$$

dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ .

Załóżmy dalej, że zadany jest pierwszy wyraz $P_0$ ciągu $\{P_n\}$, który jest rozwiązaniem równania różnicowego (13). Wtedy, podstawiając w (17) $n = 0$ , otrzymujemy

$$P_0 = C + \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}.$$

Stąd wyznaczamy wartość stałej $C$ :

$$C = P_0 - \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}.$$

Uwzględniając wyliczoną wartość w (17) wyznaczamy rozwiązanie równania różnicowego (13) z zadanym warunkiem początkowym

$$P_n = \left(P_0 - \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}\right)[1 - \sigma(\beta + \delta)]^n + \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}, \tag{18}$$

dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ .

Przeprowadzimy teraz dyskusję otrzymanego rozwiązania równania różnicowego (13) w postaci (18), biorąc pod uwagę realia ekonomiczne oraz interpretację ekonomiczną otrzymanych wyników.

Przede wszystkim zauważmy, że wyrażenie $1 - \sigma(\beta + \delta)$ występujące w rozwiązaniu (18), nie może mieć wartości mniejszej od $-1$ , gdyż wtedy ciąg

$$\{[1 - \sigma(\beta + \delta)]^n\}$$

zawierałby dwa podciągi (podciąg o wyrazach o numerach parzystych i podciąg o wyrazach o numerach nieparzystych) zbieżne do $+\infty$ oraz $-\infty$. Wtedy z (18) mielibyśmy, o ile tylko

$$P_0 \neq \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta},$$

że jeden z dwóch podciągów ciągu $\{P_n\}$ zmierzałby do $-\infty$, co jest sprzeczne z faktem, że cena $P_n$ przyjmuje tylko wartości nieujemne.
Stąd otrzymujemy, że współczynnik $\beta, \delta, \sigma$ muszą spełniać nierówność

$$1 - \sigma(\beta + \delta) \geq -1,$$

skąd

$$\sigma \leq \frac{2}{\beta + \delta}. \tag{19}$$

Zauważmy dalej, że założenie o dodatniości współczynników $\beta, \delta, \sigma$ implikuje, że

$$\sigma(\beta + \delta) > 0,$$

skąd

$$1 - \sigma(\beta + \delta) < 1,$$

a to w połączeniu z warunkiem (19) pozwala uzyskać nierówność

$$-1 < 1 - \sigma(\beta + \delta) < 1,$$

o ile tylko założymy, że w (19) nie zachodzi równość.
Wtedy otrzymujemy, że

$$\lim_{n \to \infty} [1 - \sigma(\beta + \delta)]^n = 0$$

[por. Banaś, 2007], a zatem

$$\lim_{n \to \infty} P_n = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}. \tag{20}$$

Otrzymana w (20) zależność oznacza, że przy założeniu, że

$$\sigma < \frac{2}{\beta + \delta},$$

wszystkie rozwiązania równania różnicowego (13) dążą do stanu równowagi $\frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}$. Oznacza to, że stan równowagi, będący jednym z rozwiązań równania różnicowego (13), jest asymptotycznie stabilny.
W przypadku, gdy

$$\sigma = \frac{2}{\beta + \delta}$$

otrzymujemy, jak łatwo sprawdzić, że rozwiązanie (18) przybiera postać

$$P_n = (-1)^n \left(P_0 - \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}\right) + \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}\,.$$

Rozwiązanie to „oscyluje” z wyrazu na wyraz między liczbą $P_0$ a liczbą

tzn. przyjmuje na przemian te (i tylko te) dwie wartości. Stąd w szczególności otrzymujemy, że w tym przypadku powinien być spełniony warunek

lub, równoważnie

$$P_0 < 2\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta} = \sigma(\alpha+\gamma)\,.$$

Zauważmy, że sytuacja opisana wyżej jest raczej sytuacją mocno wyidealizowaną. Rzeczywiście, z ekonomicznego punktu widzenia oznaczałoby to, że współczynnik dostosowywania się ceny do zapasów $\sigma$ jest wielkością stałą, a ceny mogą przyjmować tylko dwie wartości, na przemian z okresu na okres.
Z drugiej strony, nałożone wyżej założenie, że

$$P_0 < 2\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$$

jest założeniem sztucznym.

Podsumowując powyższe rozważania zauważymy, że w sytuacji, gdy dopuszczalne jest magazynowanie towaru oraz stosujemy stały współczynnik dopasowywania cen do zapasów, ceny towaru dążą do pewnego, ustabilizowanego położenia równowagi.

Z punktu widzenia ekonomii sytuacja taka wydaje się być bardzo pożądana, ale mało możliwa w dłuższych okresach. Wynika to z faktu bardzo dużej złożoności zjawisk ekonomicznych.

Z drugiej strony wydaje się bardziej realne przyjęcie założenia, że współczynnik dostosowywania cen do zapasów powinien zmieniać się z okresu na okres, a więc powinien być ciągiem o pewnych własnościach.

Takim modelowaniem stanu równowagi rynkowej, opisywanym równaniem różnicowym, zajmujemy się w dalszych badaniach.

## LITERATURA

Agarwal R.P., 2000, *Difference Equations and Inequalities: Theory, Methods and Applications*, Marcel Dekker, New York.

Banaś J., 2007, *Podstawy Matematyki dla Ekonomistów*, Wydawnictwa Naukowo-

Techniczne, Warszawa.
Begg D., Fischer A., Dornbusch R., 1996, *Mikroekonomia*, PWE, Warszawa.
Boucekkine R., Licandro O., Paul C., 1977, *Differential-difference equations in economics: On the numerical solution of vintage capital growth models,* “Journal of Economic Dynamics and Control” 21, 347–362,.
Chiang A.C., 1994, *Podstawy Ekonomii Matematycznej*, PWE, Warszawa.

Cull P., Flahive M., Robson R., 2005, *Difference Equations. From Rabbits to Chaos,* Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, New York.
Elaydi S.N., 1999, *An Introduction to Difference Equations,* Springer, New York.
Varian H., 2002, *Mikroekonomia,* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
Fabozzi F.J., Focardi S.M., Kolm P.N., 2006, *Financial Modelling of the Equity Market,* John Wiley and Sons, New Yersey.
Fulford G., Forrester P., Jones A., 2001, *Modelling with Differential and Difference Equations,*CambridgeUniversity Press, Cambridge.
Gandolfo G., 1971, *Mathematical Methods and Models in Economic Dynamics,* NHPC, London.
Swords C., 2009, *Stochastic Delay Difference and Differential Equations: Applications to Financial Markets,* Ph.D. Thesis, DublinCityUniversity, Dublin.
Zhang Wei-Bin, 2009, *Mathematical Models in Economics,* EOLSS, New York.

*Streszczenie*

Celem pracy jest opisanie pewnych modeli równowagi rynkowej przy użyciu prostych równań różnicowych pierwszego rzędu. Rozważa się zarówno model równowagi rynkowej bez magazynowania wyprodukowanego dobra, jak i model dopuszczający jego magazynowanie. Decyzje dotyczące wielkości produkcji rozważanego dobra w tych modelach dokonuje się na początku pewnego okresu na podstawie danych dotyczących popytu i podaży z okresu poprzedniego. W pracy przeprowadza się analizę zachowania się rozwiązań otrzymanych równań różnicowych nawiązując do ich interpretacji ekonomicznej.

## Applications of Difference Equations to the Modellingof the Market Balance

*Summary*

The aim of the paper is to describe some models of the market balance with the use of simple difference equations of the first order. There are considered both a model of the market balance without the storage and a model admitting the storage. Decisions concerning the production amount are taken at the beginning of a time period on the base of the data concerning the supply and the demand from the preceding period. In the paper the analysis of the behavior of solutions of the obtained difference equations is conducted in connection with their economical interpretation.