Zygmunt Przybycin

DWUMIANOWY MODEL WYCENY OPCJI W WARUNKACH ROZMYTYCH INFORMACJI

Wprowadzenie

Inwestowanie na rynku kapitałowym jest sztuką i wyzwaniem dla osób pragnących osiągać ponadprzeciętne zyski. Sztuka polega na takim zarządzaniu inwestycjami kapitałowymi, które zapewnia osiągnięcie założonego celu. Tym celem może być minimalizacja ryzyka inwestycyjnego. Zarówno w literaturze, jak i w praktyce spotyka się wiele narzędzi i metod wspomagających proces zarządzania ryzykiem inwestycyjnym. Jedną z metod zarządzania ryzykiem inwestycyjnym jest przenoszenie ryzyka na inne podmioty. Narzędziem umożliwiającym przenoszenie ryzyka są kontrakty terminowe, a w szczególności opcje. Opcje w początkowym okresie były stosowane jako instrument finansowy, który zabezpieczał inwestycję przed ryzykiem, lecz bardzo szybko zorientowano się, że możliwości tego instrumentu są o wiele wieksze. Opcje zaczęto również stosować jako instrument finansowy generujący ponadprzeciętne zyski przy relatywnie niskim zaangażowaniu kapitału. To szerokie zastosowanie opcji spowodowało, iż stały się przedmiotem zainteresowania inwestorów. W historii inwestowania są znane spektakularne sukcesy stosowania tego instrumentu, a także liczne porażki inwestycji z wykorzystaniem opcji. Wydaje się, że dużego znaczenia w inwestycjach z zastosowaniem opcji nabiera problem oszacowania wartości opcji. Chodzi mianowicie o określenie tzw. wartości sprawiedliwej. W literaturze są znane rożne modele wyceny opcji. W tym artykule podjęto próbę modyfikacji dwumianowego modelu wyceny opcji. Celem jest zaadoptowanie dwumianowego modelu wyceny opcji w warunkach rozmytych informacji rynkowych.

1. Opcje – wybrane pojęcia

Ważną grupą instrumentów finansowych rynku kapitałowego są instrumenty pochodne, które zostały „wymyślone" w celu zarządzania wartością oraz ryzykiem inwestycji kapitałowych. Instrumenty te z uwagi na funkcje, jakie spełniają, podlegają ciągłemu rozwojowi i licznym modyfikacjom. Instrumentem pochodnym, który cieszy się dużym zainteresowaniem inwestorów, są opcje finansowe.

Opcja jest instrumentem finansowym, który daje jego posiadaczowi prawo do wykonania opcji, natomiast na wystawcę opcji nakłada obowiązek jej zrealizowania, tj. dostarczenia instrumentu bazowego posiadaczowi opcji w sytuacji, gdy zechce on ją zrealizować. Ze względu na sposób realizacji opcji wyróżnia się opcje kupna oraz sprzedaży. Opcja kupna daje jej posiadaczowi prawo do zakupu instrumentu bazowego po określonej cenie w określonym czasie, natomiast opcja sprzedaży daje takie same prawo, ale w odniesieniu do sprzedaży instrumentu bazowego. W kontrakcie opcyjnym występuje również wystawca opcji, który przyjmuje na siebie obowiązek dostarczenia instrumentu bazowego w przypadku, gdy opcja zostanie wykonana. Podstawowymi charakterystykami opcji są:

– cena wykonania (X) – cena, po jakiej opcja jest wykonana; jest ustalona w momencie wystawienia opcji i nie zmienia się w czasie ważności opcji,
– cena instrumentu bazowego (S_t) – wartość rynkowa instrumentu bazowego, na który jest wstawiona opcja,
– cena opcji (inaczej premia) (C) – cena prawa, które nabywa posiadacz opcji; cena ta jest kształtowana przez rynek,
– termin wygaśnięcia opcji (T) – termin ważności opcji, po upływie którego opcja traci ważność i nie może być wykonana,
– termin wykonania opcji (t_o) – termin, w którym opcja jest wykonana.

W zależności od możliwości wykonania opcji wyróżnia się opcję amerykańską oraz opcję europejską. Opcję amerykańską można wykonać w dowolnym momencie od chwili nabycia do momentu wygaśnięcia ($t_0 \leq$ T), natomiast opcję europejską można wykonać tylko w momencie wygaśnięcia (t_0= T). W dalszej części artykułu będą omawiane tylko opcje europejskie. Posiadacz opcji, jak wspomniano, ma prawo do jej wykonania i wykona opcję tylko wówczas, gdy będzie to opłacalne – decyduje relacja pomiędzy ceną wykonania a ceną instrumentu bazowego. Wyróżnia się tutaj następujące sytuacje:

– opcję opłaca się wykonać – opcja jest w cenie,
– opcji nie opłaca się wykonać – opcja nie jest w cenie,
– opcja jest neutralna – opcja jest po cenie.

Dla opcji kupna: opcja jest w cenie, gdy cena wykonania jest niższa od ceny instrumentu bazowego, w przeciwnym wypadku opcja nie jest w cenie, jeżeli natomiast cena wykonania opcji jest równa cenie instrumentu bazowego, to mówi się, że opcja jest neutralna. Dla opcji sprzedaży zachodzi odwrotna relacja pomiędzy ceną wykonania a ceną instrumentu bazowego.

Innym ważnym parametrem charakteryzującym opcje bez względu na rodzaj instrumentu bazowego jest wartość opcji, czyli wypłata, jaką otrzyma posiadacz opcji w chwili jej wykonania. Wartość opcji jest sumą dwóch składowych: wartości wewnętrznej oraz wartości czasowej zwanej również wartością zewnętrzną. Wartość opcji można więc zapisać następująco:

$$\mathrm{W} = W_w + W_t \tag{1}$$

gdzie:
W_w – wartość wewnętrzna opcji,
W_t – wartość czasowa opcji.

Opcja ma dodatnią wartość wewnętrzną, gdy jest w cenie, w przeciwnym wypadku wartość ta jest równa zero. W szczególności dla opcji kupna wartość wewnętrzna opcji wyraża się wzorem:

$$W_w = \max\{S_t - \mathrm{X}, 0\} \tag{2}$$

natomiast dla opcji sprzedaży wzorem:

$$W_w = \max\{\mathrm{X} - S_t, 0\} \tag{3}$$

Z zależności (1) wynika, że wartość czasowa opcji maleje do zera wraz ze zbliżaniem się terminu wykonania do terminu wygaśnięcia. Wypada również zauważyć, iż na wartość opcji mają wpływ następujące czynniki:
– cena wykonania opcji,
– cena instrumentu bazowego,
– długość okresu ważności opcji,
– zmienność stopy zwrotu instrumentu bazowego,
– stopa wolna od ryzyka.

W przypadku opcji kupna cena wykonania jest destymulantą, natomiast pozostałe czynniki są stymulantami wartości opcji. W przypadku opcji sprzedaży destymulantami są: cena instrumentu pierwotnego oraz stopa wolna od ryzyka, zaś pozostałe czynniki są stymulantami.

Wartość opcji, zwana również ceną sprawiedliwą jako wypadkowa czynników rynkowych, zmienia się w czasie ważności opcji i pokrywa się z ceną opcji tylko w przypadku, gdy rynek jest efektywny. Dlatego też ważne z punktu widzenia praktyki jest w miarę precyzyjne oszacowanie wartości opcji. Wartość sprawiedliwą opcji szacuje się wykorzystując różne modele wyceny. W artykule tym ograniczono się do modelu dwumianowego wyceny wartości opcji przy założeniu nieostrych informacji kształtowania się cen instrumentu bazowego.

2. Logika rozmyta i jej zastosowanie w modelu wyceny opcji

Proces szacowania prawdziwej wartości opcji z uwagi na stosunkowo dużą ilość informacji jest procesem złożonym. Ponadto część informacji ma charakter prognostyczny, a więc nie są to informacje w pełni precyzyjne. Oznacza to, że w procesie szacowania wartości opcji występuje tzw. zasada niespójności, według której w modelowaniu złożonych systemów stosuje się obok informacji precyzyjnych również informacje nieprecyzyjne (nieostre). Dalej informacje nieprecyzyjne występujące w modelu wyceny opcji będą traktowane w kategoriach liczb rozmytych.

Liczbą rozmytą nazywa się zbiór rozmyty określony na przestrzeni liczb rzeczywistych. Formalnie liczbę rozmytą A określa się następująco:

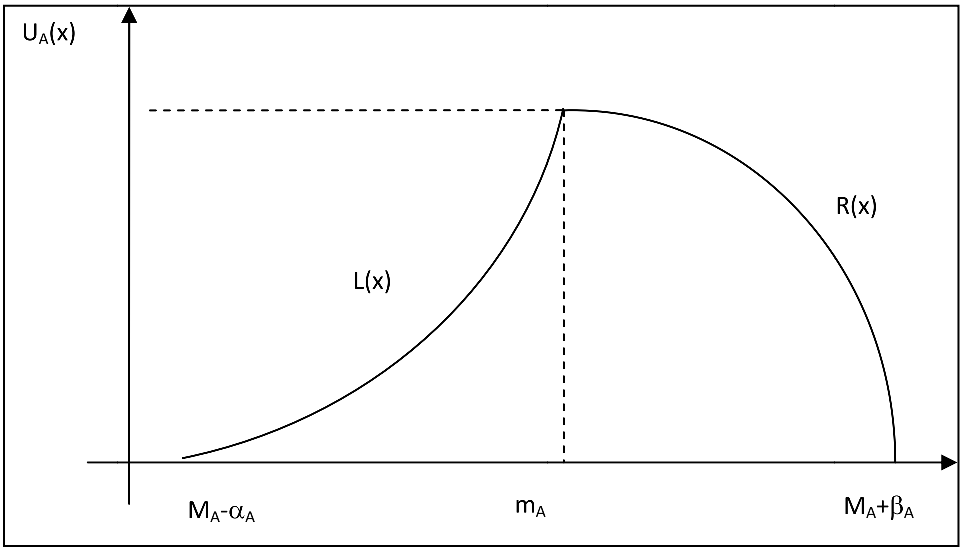
$$A = \{(U_A(x), x)\} \ \forall x \in R \tag{4}$$

gdzie $U_A(x)$ jest funkcją przynależności zbioru rozmytego, która każdej liczbie $x \in R$ przypisuje stopień jej przynależności do zbioru A, przy czym $U_A(x) \in <0,1>$.

Liczbę rozmytą jednoznacznie określa funkcja przynależności, którą wyznacza się na podstawie wiedzy historycznej lub/i eksperckiej. Ograniczono się tu tylko do trójkątnych liczb rozmytych L-R. Funkcję przynależności rozmytej trójkątnej liczby L-R określa się wzorem:

$$\begin{cases} L(x) \text{ dla } x \in (M_A - \alpha_{A,}, M_a) \\ U_A(x) = R(x) \text{ dla } x \in (M_A, M_A + \beta_A) \\ 1 \text{ dla } x = M_A \\ 0 \text{ dla x pozostałych} \end{cases} \tag{5}$$

gdzie:
L(x) – funkcja niemalejąca,
R(x) – funkcja nierosnąca.



Rys. 1. Rozmyta liczba trójkątna L-R

Przyjęto, że rozmyta liczba trójkątna L-R będzie zapisywana w postaci:

$$A = (M_A, \alpha_A, \beta_A) \tag{6}$$

Postać (6) nazywa się reprezentacją L-R liczby rozmytej. Przykładowo A = (2; 0,5; 0,8) oznacza rozmytą liczbę trójkątną około 2. W szczególności jeżeli $\alpha_A = \beta_A = 0$, wówczas liczbę rozmytą (6) traktuje się jak liczbę ostrą. Używając zapisu (6), definiuje się liczbę przeciwną do liczby rozmytej A:

$$- A = (- M_A, \alpha_A, \beta_A)$$

oraz liczbę odwrotną:

$$A^{-1} = (1/_{M_A}, \beta_A / M_A (M_A + \beta_A), \alpha_A / M_A (M_A - \alpha_A))$$

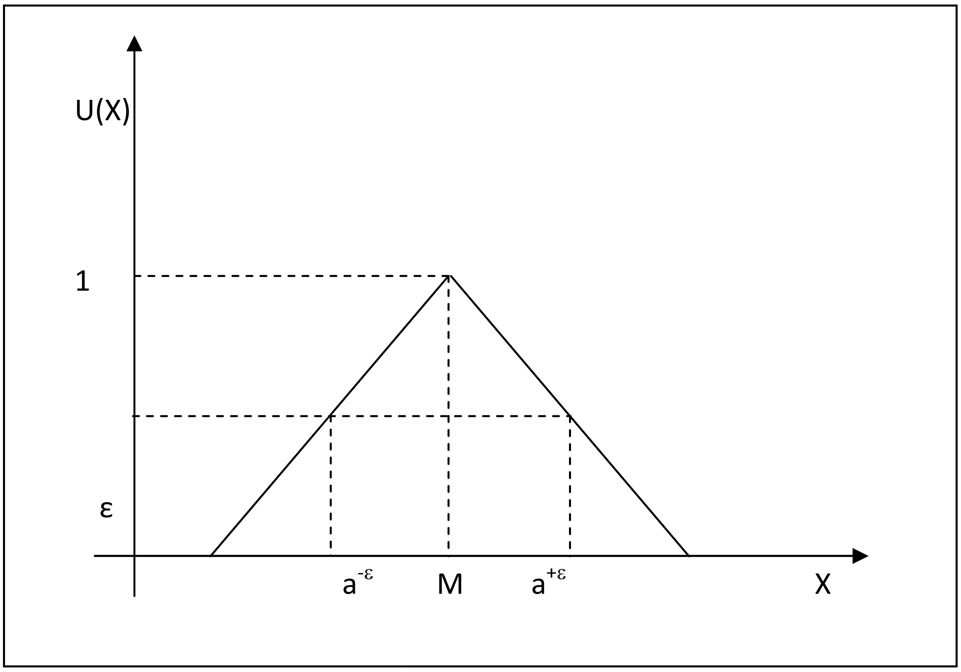
przy założeniu $M_A \neq 0$.

Wprowadzono pojęcie przekroju liczby rozmytej: ε przekrojem liczby rozmytej (4) nazywa się zbiór ostry określony następująco:

$$A^{\varepsilon} = \{ x \in R : U_A (x) \geq \varepsilon \}, \varepsilon \in > 0 ,1 > \tag{7}$$

Zbiór ten będzie również oznaczany symbolem $< a^{-z}, a^{+z} >$, gdzie:

$$a^{-\varepsilon} = \min \{ x : U_A (x) \geq \varepsilon \}, \tag{8}$$
$$a^{+\varepsilon} = \max \{ x : U_A (x) \geq \varepsilon \}. \tag{9}$$



Rys. 2. Liczba rozmyta i jej ε przekrój

Używając operacji ε przekroju, można dokonać dekompozycji funkcji przynależności liczby rozmytej zgodnie ze wzorem (zasada dekompozycji):

$$U_A(x) = \sup [\, \varepsilon \wedge I_{A^{\varepsilon}}(x) \,],\ x \in R,\ \varepsilon \in \langle 0, 1 \rangle \tag{10}$$

gdzie $I_{A^{\varepsilon}}(x)$ jest funkcją charakterystyczną zbioru A^{ε}, natomiast ^ – algebraiczną operacją minimum. Zasada dekompozycji wyraża więc funkcję przynależności liczby rozmytej poprzez funkcje charakterystyczne zbiorów ostrych. Na liczbach rozmytych definiuje się działania arytmetyczne. Ograniczono się tu do zdefiniowania dodawania i mnożenia rozmytych liczb trójkątnych typu L-R. [4].

Jeżeli liczby rozmyte A i B są liczbami typu L-R:

$$A = (M_A, \alpha_A, \beta_A)\ ,\ B = (M_B, \alpha_B, \beta_B) \tag{11}$$

to sumę liczb rozmytych A, B określa się następująco:

$$A+B = (M_{A+B}, \alpha_{A+B}, \beta_{A+B}) \tag{12}$$

gdzie:

$$M_{A+B} = M_A + M_B,$$
$$\alpha_{A+B} = (\alpha_A + \alpha_B),$$
$$\beta_{A+B} = (\beta_A + \beta_B).$$

Iloczyn dwóch liczb rozmytych A, B dla A > 0 oraz B > 0 określa wzór:

$$A \bullet B = (M_{A \bullet B}, \alpha_{A \bullet B}, \beta_{A \bullet B}) \tag{13}$$

gdzie:
$M_{A \bullet B} = M_A \bullet M_B,$
$\alpha_{A \bullet B} = M_A\, \alpha_B + M_B\, \alpha_A - \alpha_A \alpha_B,$
$\beta_{A \bullet B} = M_A\, \beta_B + M_B\, \beta_A + \beta_A\, \beta_B.$

Z przyjętych definicji sumy i iloczynu liczb rozmytych wynika, że własności dla tych działań są identyczne z własnościami analogicznych działań na liczbach ostrych. Funkcję przynależności dla tak zdefiniowanej sumy oraz iloczynu liczb rozmytych wyznacza się stosując zasadę dekompozycji [3]. W przypadku gdy funkcje L(.) oraz R(.) są funkcjami liniowymi, funkcje przynależności wyznacza się analitycznie.

Należy zwrócić uwagę na fakt, że prognozowane ceny instrumentu bazowego w modelu wyceny opcji różnią się od ceny rzeczywistej nawet wtedy, gdy są sporządzone według założeń, które są bliskie faktycznym wielkościom osiągniętym w przeszłości. Dlatego też prognozowana cena instrumentu bazowego powinna uwzględniać przynajmniej trzy warianty: pesymistyczny, najbardziej realny oraz optymistyczny. Warianty pesymistyczny oraz optymistyczny powinny obejmować takie wartości, które nie powinny być przekroczone w przyszłości, stąd będą one reprezentować planowane wartości nieprzekraczalne. Jeżeli prognozowana cena instrumentu bazowego jest określona w kategoriach liczb rozmytych, a w szczególności w postaci trójkątnej liczby rozmytej (6), to parametry występujące w zapisie rozmytej liczby A traktuje się odpowiednio:
M_A – wariant najbardziej realny,
$M_A - \alpha_A$ – wariant pesymistyczny,
$M_A + \beta_A$ – wariant optymistyczny.

Przyjęta interpretacja parametrów liczby rozmytej umożliwia również określenie rozmytego ryzyka wyceny opcji. Jeżeli założy się, że cena sprawiedliwa opcji jest wyrażona w postaci liczby rozmytej (6), to ryzyko rozmyte wyceny wartości opcji mierzy się następująco [5]:

$$S_A = (\alpha_A + \beta_A)/2 \tag{14}$$

Przedział $< M_A - \alpha_A, M_A + \beta_A >$ jest ε przekrojem liczby rozmytej (6) (ε = 0). Przyjmując różne poziomy przekrojów ($\varepsilon \in <0,1>$), można rozważać różne ε przekroje tej samej liczby rozmytej, a w szczególności różne scenariusze wyceny opcji.

3. Dwumianowy model wyceny opcji w warunkach rozmytych informacji

Zagadnienie wyceny instrumentów pochodnych jest zagadnieniem ważnym z punktu widzenia teorii i praktyki i trzeba dodać, że nadal aktualnym.

Pierwsze prace z zakresu metodologii wyceny instrumentów pochodnych pokazały się w 1973 roku i były to prace: F. Blacka i M. Scholesa (*The Pricing of Options annd Corporate Liabilities*) oraz R.C. Mertona (*Theory of Rational Option Pricing*). W pracach tych przedstawiono koncepcję arbitrażowej wyceny instrumentów pochodnych. Arbitrażowa koncepcja wyceny jest na ogół realizowana w konwencji portfela bez ryzyka lub w konwencji replikacji. Model wyceny opcji realizowany w konwencji portfela bez ryzyka został zaproponowany w 1972 roku przez J. Coxa, M. Rubinsteina i S. Rossa [1]. Koncepcja wyceny opcji w konwencji portfela bez ryzyka polega na takiej konstrukcji portfela posiadającego określoną ilość instrumentów bazowych oraz wystawionej opcji na ten instrument, aby był to portfel bez ryzyka.

Koncepcję portfela bez ryzyka prześledzono na przykładzie europejskiej opcji kupna na akcję bez dywidendy. Rozważono portfel, który składa się z h akcji oraz wystawionej na te akcje opcji kupna, przy czym wymaga się, aby inwestycja ta była bez ryzyka. Wartość portfela w chwili początkowej jest równa:

$$h\,S_0 - C_0$$

gdzie :
S_0 – cena akcji w momencie początkowym inwestycji,
C_0 – wartość europejskiej opcji kupna w momencie początkowym inwestycji.

Założono dalej, że do terminu wygaśnięcia opcji pozostał jeden okres. Na koniec tego okresu cena akcji może wzrosnąć do poziomu S_u lub spaść do poziomu S_d. Zatem w terminie wykonania opcji wartość inwestycji jest odpowiednio równa:

$$V_u = h\,S_u - C_u, \text{ gdy cena akcji wzrośnie}$$

$$V_d = h\,S_d - C_d, \text{ gdy cena akcji spadnie}$$

przy czym wartość opcji, gdy cena akcji wzrośnie – $C_u = \max\{S_u - X, 0\}$, natomiast wartość opcji, gdy cena akcji spadnie – $C_d = \max\{S_d - X, 0\}$, gdzie X oznacza cenę wykonania opcji.

Ponieważ założono, że inwestycja jest bez ryzyka, więc musi zachodzić równość:

$$V_u = V_d$$

Z równości tej wyznacza się współczynnik hedgingowy h:

$$h = (C_u - C_d) / (S_u - S_d)$$

Współczynnik hedgingowy określa liczbę akcji w portfelu, która zabezpiecza wystawioną opcję kupna. Jeżeli ponadto założy się, że mechanizm kształtowania ceny akcji w górę i w dół jest następujący:

$$S_u = \mathrm{u}\, S_0 \text{ i } S_d = \mathrm{d}\, S_0$$

przy czym u > 1 + r_f > d (r_f – stopa zwrotu wolna od ryzyka), co wyklucza możliwość transakcji arbitrażowej, wówczas współczynnik hedgingowy wyraża się wzorem:

$$h = (C_u - C) / S_0(\mathrm{u} - \mathrm{d}) \tag{15}$$

Inwestycja bez ryzyka powinna generować stopę zwrotu równą stopie zwrotu wolnej od ryzyka, zatem zachodzi następująca równość:

$$(\mathrm{h}\, S_u - C_u) / (\mathrm{h}\, S_0 - C_0) = 1 + r_f$$

Wstawiając do powyższej równości współczynnik hedgingowy (15), otrzymano wartość euorepejskiej opcji kupna na akcję bez dywidendy:

$$C_0 = [\mathrm{g}\, C_u + (1 - \mathrm{g})\, C_u] / (1 + r_f) \tag{16}$$

gdzie:

$$\mathrm{g} = (1 + r_f - \mathrm{d}) / (\mathrm{u} - \mathrm{d}) \tag{17}$$

Wobec wcześniejszego założenia g ε (0, 1), tak więc para (g, 1 – g) jest tzw. miarą arbitrażową [6].

Wzór (16) określa wartość europejskiej opcji kupna w przypadku jednego okresu, jaki pozostał do terminu wygaśnięcia opcji. Wzór ten można uogólnić na przypadek n okresów, jakie pozostały do terminu wygaśnięcia opcji (n > 1). Zakładając, że wielkości ruchu ceny akcji w górę (u) oraz w dół (d) są znane i nie zmieniają się w okresie ważności opcji, wówczas wartość sprawiedliwa opcji wyraża się wzorem [2]:

$$W_0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{g}^{k} (1 - \mathrm{g})^{n-k} \max\{S_0\, \mathrm{u}^{k}\, \mathrm{d}^{n-k} - \mathrm{X}, 0\} / (1 + r_f)^{n} \tag{18}$$

gdzie g jest określone wzorem (15), natomiast $\binom{n}{k}$ oznacza symbol Newtona.

Równość (18) określająca wartość europejskiej opcji kupna w literaturze jest nazywana dwumianowym modelem wyceny opcji. Zupełnie analogicznie wyprowadza się model europejskiej opcji sprzedaży. W dwumianowym modelu wyceny opcji kupna zmienność ceny akcji jest zdeterminowana parametrami u oraz d. Parametry te określają zmienność ceny instrumentu bazowego w przyszłości, a więc mają charakter prognostyczny. Oznacza to, że nie są w pełni precyzyjne, stąd w modelu wyceny opcji ingeruje wspomniana wcześniej zasada niespójności. Zgodnie z tą zasadą w modelu wyceny opcji obok informacji precyzyjnych występują również informacje nieprecyzyjne – rozmyte. Założono więc, że parametry określające ruchy ceny instrumentu bazowego są liczbami rozmytymi, dla ułatwienia przyjęto, że są trójkątnymi liczbami rozmytymi typu L-R, ponadto założono znajomość funkcji przynależności tych liczb. Konsekwencją przyjętego założenia jest to, że wartość opcji w momencie wygaśnięcia jest również liczbą rozmytą. Wstawiając do modelu dwumianowego wyceny opcji kupna w miejsce parametrów określających ruchy ceny instrumentu bazowego ich wersje rozmyte, otrzymano model wyceny opcji w warunkach rozmytych informacji. Uwzględniając fakt, iż działania arytmetyczne na liczbach rozmytych mają podobne własności, jak działania na liczbach ostrych, otrzymano następujący model wyceny opcji kupna:

$$\breve{W}_0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \breve{g}^{\mathrm{k}} (1- \breve{g})^{\mathrm{n-k}} \max \{\mathrm{S}\, \breve{u}^{\mathrm{k}}\, \breve{d}^{\mathrm{n-k}} - \mathrm{X}, 0\}/(1 + r_f)^{\mathrm{n}} \qquad (19)$$

gdzie symbol $\breve{W}$ oznacza liczbę rozmytą. Funkcję przynależności rozmytej wartości opcji kupna wyznacza się zgodnie z zasadą dekompozycji lub jej przybliżoną postać korzystając z reprezentacji L-R.

Podsumowanie

Zaproponowana w artykule modyfikacja modelu wyceny opcji powinna poprawić skuteczność wyznaczenia ceny sprawiedliwej. Stwierdzenie to można uzasadnić tym, że w naukach ekonomicznych bardziej realne i często wystarczające jest stwierdzenie, że np. cena instrumentu finansowego przyjmie wartość równą pewnej liczbie rozmytej, niż stwierdzenie, że wartość ta będzie określona liczbą ostrą. Należy wyraźnie zaznaczyć, iż parametry określające liczbę rozmytą wyznacza się na podstawie danych historycznych oraz wiedzy eksperckiej, dotyczy to zwłaszcza funkcji przynależności. Fakt ten pozwala mieć nadzieję na to, że w prognozach określających przyszłe wartości parametrów występujących w modelu wyceny opcji zostanie uwzględniona psychologia rynku. W zaprezentowanej modyfikacji modelu dwumianowego założono rozmytość parametrów określających ruchy ceny instrumentu bazowego, nic nie stoi więc na przeszkodzie, aby stopę wolną od ryzyka również traktować jako liczbę rozmytą. Ponadto przy stosowaniu logiki rozmytej istnieje możliwość oceny ryzyka oszacowanej sprawiedliwej wartości opcji.

Literatura

1. Cox J., Rubinstein M., Ross S.: *Option Pricing: A Simplified Approach*. „The Journal of Financial Economics" 1979, No. 7.
2. Jajuga K., Jajuga T.: *Inwestycje*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2001.
3. Łachwa A.: *Rozmyty świat zbiorów, liczb, relacji, faktów, reguł i decyzji*. Exit, Warszawa 2001.
4. Piegat A.: *Modelowanie i sterowanie rozmyte*. EXIT, Warszawa 2003.
5. Przybycin Z.: *Zastosowanie logiki rozmytej w ekonomii – wybrane modele decyzyjne*. Akademia Ekonomiczna, Katowice 2009.
6. Weron A., Weron R.: *Inżynieria finansowa*. WNT, Warszawa 1998.

THE BINOMIAL OPTION PRICING MODEL IN CASE OF A FUZZY INFORMATION

Summary

In the article presents the modification of the binomial model of European option pricing. Adopted namely, that it is appropriate to the weakening of the assumptions about the mechanism of price formation on the underlying instrument. In the proposed option pricing model, mechanism of option pricing formation is described in terms of fuzzy numbers. In the article, also posted selected messages from the scope of fuzzy numbers and options.