Donata Kopańska-Bródka
Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach

ZWIĄZKI MIAR AWERSJI DO RYZYKA Z FUNKCJAMI ZALEŻNYMI OD PARAMETRÓW ROZKŁADU

Wprowadzenie

Definicja ekonomicznej racjonalności mająca swoje źródła w teorii oczekiwanej użyteczności odzwierciedla sposób oceniania ryzykownych wariantów. Ponieważ relacja preferencji w zbiorze decyzji o losowych efektach zależy od indywidualnego profilu jednostki, zatem wartościowanie decyzji jest subiektywne. Mimo takiego ograniczenia, podejście to jest powszechnie akceptowane w ekonomii oraz finansach. Jednocześnie w praktyce decyzyjnej bardzo często stosowane są relacje preferencji wykorzystujące wartości dwóch pierwszych momentów rozkładu prawdopodobieństwa, które nie zależą od decydenta i w tym sensie są obiektywne. Zatem w ocenie losowych wariantów decyzyjnych występuje wzajemne przenikanie dwóch odmiennych sposobów ich wartościowania.

Przyjmuje się, że źródłem ryzyka jest losowość wariantów decyzyjnych, natomiast konsekwencje decyzji to realizacje zmiennych losowych. Zatem każdy ryzykowny wariant decyzyjny jest zmienną losową, której realizacje są zyskami (przyszłymi stanami posiadania, bogactwem) wyrażanymi w jednostkach monetarnych, a rozkład prawdopodobieństwa jest obiektywnym opisem decyzji. Celem analizy decyzji jest uporządkowanie zbioru możliwych decyzji, otrzymywane poprzez porównywanie poszczególnych decyzji względem pewnej relacji preferencji. Zatem w zbiorze losowych wariantów definiowana jest relacja dwuargumentowa, której własności oraz funkcyjna reprezentacja jest podstawą uporządkowania jego elementów, jak i wyodrębnienia podzbiorów wariantów o takim samym ryzyku (indyferentnych). W literaturze najczęściej przytaczane są sposoby porządkowania wariantów na podstawie relacji zdefiniowanych w pracy Rothschilda i Stiglitza[1].

Równoważność pomiędzy definicjami relacji mniejszego ryzyka rozumiana jako zgodność otrzymywanych uporządkowań (rankingów) wariantów decyzyjnych została przeanalizowana jest przez Levy'ego[2].

W ekonomicznych i finansowych problemach podejmowania decyzji w warunkach niepewności dominują dwa podejścia – podejście bazujące na modelu oczekiwanej użyteczności (EU) oraz takie, w którym preferencje modelowane są funkcjami zależnymi od średniej i wariancji rozkładu (MV[3]). Podejście EU ma charakter subiektywny, zależy bowiem od profilu decydenta opisywanego własnościami jego funkcji użyteczności, która reprezentuje jego relację preferencji. Natomiast modele MV (modele dwóch-momentów) konstruowane są bez uwzględniania czynników behawioralnych, wymagają mniej informacji o podejmującym decyzje zatem są modelami obiektywnymi. Warunki zgodności wyborów dokonywanych w ramach powyższych metodologii są celem artykułu.

1. Relacje preferencji

Problem zgodności podejścia bazującego na zasadzie maksymalnej oczekiwanej użyteczności z podejściem wykorzystującym ocenę dwóch pierwszych parametrów rozkładu nurtował autorów od momentu, kiedy Markowitz przedstawił swój model wyboru optymalnego portfela. Najwcześniej zauważona zgodność tych dwóch metodologii odnosi się do sytuacji, kiedy funkcja użyteczności jest funkcją kwadratową lub losowe warianty decyzyjne mają rozkład normalny[4]. Badania empiryczne pokazują, że tylko w nielicznych przypadkach modele ekonomiczne opisujące rzeczywisty problem decyzyjny spełniają takie założenia. Badania prowadzone przez Mayera[5] dotyczyły formalnych wa-

[1] M. Rothschild, J.S. Stiglitza: Increasing Risk I. A Definition. „Journal of Economic Theory" 1970, s. 225-343.

[2] H. Levy: Stochastic Dominance. Investment Decision Making under Uncertainty. Springer, 2006.

[3] Do określenia podejścia MV (Mean – Variance) również stosowana jest symbolika (μ, σ)-model.

[4] J.S. Chipman: The Ordering of Portfolios in Terms of Mean and Variance. „Review of Economic Study" 1973, Vol. 40(2), No. 122, s. 167-190; H. Levy, H. Markowitz: Approximating Expected Utility by a Function of Mean and Variance. „The American Economic Review" 1979, Vol. 69(3), s. 308-317.

[5] J. Mayer: Two-Moment Decision Models and Expected Utility Maximization. „The American Economic Review" 1987, Vol. 77(3), s. 421-430.

runków, przy których te dwa podejścia są zgodne. Również modele wykorzystujące relacje dominacji stochastycznych prezentowane m.in. w pracach Trzpiot[6], Ogryczaka, Ruszczyńskiego[7] analizowane są w kontekście zgodności z podejściem EU.

Przyjmuje się, że zasady wyboru są zgodne, jeśli decyzja A jest preferowana nad B w podejściu EU wtedy i tylko wtedy, gdy A jest preferowana nad B w podejściu MV. Mówiąc inaczej, uporządkowanie zbioru wariantów decyzyjnych przy zastosowaniu zasady EU jest takie samo, jak przy zasadzie MV. W teorii portfelowej zgodność rozumiana jest również jako identyczność granic efektywnych.

Problem braku zgodności preferencji omawianych podejść zilustrujmy prostym przykładem rachunkowym. Rozpatrzmy dwa losowe warianty decyzyjne dotyczące niepewnych zysków zadane następującymi dyskretnymi rozkładami:

$D1 = \{(0; 0{,}8), (100; 0{,}2)\}$

$D2 = \{(10; 0{,}99), (1000; 0{,}01)\}$

Podstawowe parametry są odpowiednio równe:

$E(D1) = 20{,}8 \quad V^2(D1) = 1568$,

$E(D2) = 19{,}1 \quad V^2(D2) = 9703$.

Ponieważ $E(D1) > E(D2)$ oraz $V^2(D1) < V^2(D2)$, to zgodnie z zasadą MV decyzja D1 jest preferowana od D2.

Załóżmy dalej, że profil decydenta z awersją do ryzyka opisuje logarytmiczna funkcja użyteczności $u(x) = \log(x)$. Oczekiwane użyteczności decyzji wynoszą

$$E[u(D1)] = 0{,}4 \quad E[u(D2)] = 1{,}02$$

Skoro oczekiwana użyteczność decyzji D2 jest większa od oczekiwanej użyteczności D1, więc D2 jest preferowana od D1. Przykład ten dobitnie ilustruje problem niezgodności relacji preferencji.

Formalnym warunkiem zgodności preferencji w podejściu EU i MV jest możliwość wyrażenia oczekiwanej użyteczności rzeczywistą funkcją dwóch pierwszych momentów rozkładu. Dosyć często do szacowania funkcji użyteczności za pomocą dwóch pierwszych momentów wykorzystywane jest jej rozwinięcie w szereg Taylora[8].

---

[6] G. Trzpiot: Dominacje w modelowaniu i analizie ryzyka. AE, Katowice 2006.

[7] W. Ogryczak, A. Ruszczyński: Dual Stochastic Dominance and Quantile Risk Measures. „International Transaction in Operational Research" 2002, Vol. 9, s. 661-680.

[8] H. Levy, H. Markowitz: Op. cit.

Dla dalszych rozważań przyjmijmy, że losowy wariant decyzyjny jest zmienną losową X określoną w przedziale <a, b>[9] o wartości oczekiwanej E(X) = μ i wariancji $D^2(X) = \sigma^2$ oraz rozkładzie zadanym funkcją dystrybuanty $F(x)$. Natomiast funkcja użyteczności $u(x)$ jest ciągłą, niemalejącą i wklęsłą funkcją rzeczywistą. Osoba podejmująca decyzje preferuje wybory o mniejszej wartości σ i większej wartości μ.

Definicja 1. Relacje preferencji w podejściu EU i MV są zgodne, jeśli istnieje rzeczywista funkcja $V(\sigma, \mu)$ taka, że

$$E[u(X)] = \int_a^b u(x)dF(x) = V(\sigma, \mu) \tag{1}$$

$$\text{oraz } \frac{\partial V}{\partial \sigma} < 0, \quad \frac{\partial V}{\partial \mu} > 0 \tag{2}$$

Formalne badanie zgodności sprowadza się do wskazania takich własności rozkładów lub funkcji użyteczności, dla których zachodzą warunki (1)-(2).

2. Warunki zgodności preferencji EU i VM

Badanie warunków zgodności relacji preferencji sprowadza się do poszukiwania założeń dotyczących rozkładu prawdopodobieństwa, jak i tych związanych z funkcjami użyteczności.

Warunki dotyczące klasy rozkładu prawdopodobieństwa losowych wariantów, lub też ich własności, nie zależą od indywidualnych preferencji decydenta, zatem mają charakter warunków obiektywnych, natomiast te związane z własnościami funkcji użyteczności to warunki subiektywne.

Zgodność dla klasy rozkładów normalnych

Jeśli rozkłady losowych wariantów decyzyjnych należą do klasy rozkładów normalnych $N(\mu,\sigma)$, gdzie σ < c oraz funkcja użyteczności spełnia warunek[10]

$$u(x) \leq A\exp\left[\tfrac{x^2}{2c^2}\right]$$

[9] Rozważania odnoszą się również do rozkładów określonych w przedziale obustronnie otwartym (a, b) oraz $(-\infty, +\infty)$.

[10] Dowód własności w pracy: J.S. Chipman: Op. cit.

to istnieje taka funkcja $V(\sigma, \mu)$, dla której

(i) zachodzi zgodność w sensie (1)-(2)

(ii) spełniony jest warunek $$\frac{1}{\sigma}\frac{\partial V}{\partial \sigma} = \frac{\partial^2 V}{\partial \mu^2} \tag{3}$$

(iii) spełnione są warunki

$$\lim_{\sigma \to 0^+} E[u(X)] = u(\mu) \tag{4}$$

$$\lim_{(\mu,\sigma) \to (m,0^+)} E[u(X)] = u(m) \tag{5}$$

Powyższe własności mówią nie tylko o zgodności EU z MV, ale również pokazują ciekawą zależność wyrażaną równaniem różniczkowym (3), na które często powołują się autorzy badający związki pomiędzy tymi dwoma podejściami. Rozwiązaniem równania różniczkowego (3) jest funkcja oceny dwóch pierwszych parametrów rozkładu i jest to reprezentacja funkcyjna relacji preferencji w przestrzeni (σ, μ).

Teoretyczną siłą rozkład normalnego jest to, że jako rozkład dwuparametryczny w sposób dokładny definiowany jest za pomocą dwóch pierwszych momentów rozkładu. Zatem wartość oczekiwana dowolnej monotonicznej transformacji zmiennej losowej o rozkładzie normalnym wyrażana jest w sposób jawny za pomocą jej wartości oczekiwanej i wariancji. W szczególności funkcje użyteczności są takimi transformacjami, więc założenie normalności rozkładu gwarantuje zgodność tych dwóch podejść.

W zastosowaniach ekonomicznych popularne są funkcje typu CARA, dla których bezwzględna awersja do ryzyka jest stała. Przykładem takiej funkcji użyteczności jest funkcja wykładnicza $u(x) = -e^{-x}$. Jeśli tylko rozważane warianty decyzyjne należą do rodziny rozkładów normalnych, a preferencje decydenta wyraża funkcja wykładnicza $u(x)$, to zachodzi zgodność podejścia EU i MV oraz

$$V(\sigma, \mu) = -\exp[-(\mu - 0{,}5\sigma^2)] = E[u(X)]$$

W praktyce niezmiernie rzadko mamy do czynienia z normalnością rozkładu ryzykownych decyzji. Dla przykładu, rozkłady stóp zwrotu walorów notowanych na giełdach nie spełniają założenia normalności, zatem równoprawne stosowanie podejścia MV i EU nie zawsze jest uzasadnione.

Zgodność dla klasy rozkładów spełniających warunek LS

W dalszej części rozważane będą własności rodziny rozkładów prawdopodobieństwa, które różnią się parametrami lokalizacji i skali (LS) co również znaczy, że dowolne dwie zmienne należące do takiej rodziny są powiązane ze sobą związkiem liniowym. Definicja rodziny rozkładów spełniających warunek LS nie zależy od rodzaju (klasy) rozkładu prawdopodobieństwa.

Definicja 2. Dwie zmienne X i $Y = \alpha + \beta X$, gdzie $\beta > 0$, spełniają warunek LS wtedy i tylko wtedy, jeśli zachodzi równość rozkładów

$$F_X(x) = F_Y(\alpha + \beta x)$$

gdzie F_X, F_Y są odpowiednio funkcjami dystrybuanty zmiennej losowej X i Y.

Definicja 2 odnosi się zarówno do rozkładów ciągłych jak i dyskretnych. W szczególności można wyodrębniać rodziny rozkładów LS generowane przez wybraną zmienną X. Zmiennymi X generującymi taką rodzinę najczęściej są zmienne, dla których $E(X) = 0$ oraz $D^2(X) = 1$. Wówczas to dowolna zmienne Y spełniająca warunek LS ze zmienną X jest w liniowej zależności $Y = \mu + \sigma X$ gdzie $E(Y) = \mu$ oraz $D^2(Y) = \sigma^2$. Zatem jeśli tylko standaryzacja zmiennych zachowuje rozkład zmiennej standaryzowanej, to mamy do czynienia z rodziną LS. Spośród rozkładów dwuparametrycznych klasa rozkładów normalnych $N(\mu, \sigma)$ oraz klasa rozkładów jednostajnych na odcinku <a, b>[11] (symbolicznie zapisujemy U <a, b>) spełniają warunek LS.

Mayer[12] pokazał, że w zbiorze wariantów losowych spełniających warunek LS zachodzi zgodność preferencji MV i EU dla dowolnej funkcji użyteczności. Ponadto, preferencje dotyczące wyborów z rodziny LS są w pełni charakteryzowane przez wartość oczekiwaną i wariancję losowego wariantu.

W podejściu MV funkcja preferencji $V(\sigma, \mu)$ najczęściej prezentowana jest w płaszczyźnie (σ, μ) w postaci planu warstwicowego nazywanego zbiorem krzywych obojętności. Ponadto, jeśli istnieją pochodne cząstkowe funkcji $V(\sigma, \mu)$ to dla klasy rozkładów LS zachodzi następujący związek

$$V_\mu(\sigma, \mu)d\mu + V_\sigma(\sigma, \mu)d\sigma = 0$$

[11] Dla takiego rozkładu $E(X) = (a + b)/2$ oraz $D^2(X) = (b - a)^2/12$.
[12] J. Mayer: Op. cit.

Stopień nachylenia stycznej do krzywej obojętności określany jest za pomocą stosunku pochodnych cząstkowych

$$S(\sigma,\mu) = \frac{-V_\sigma}{V_\mu} \tag{6}$$

gdzie:

$$V_\mu = \frac{\partial V}{\partial \mu} = \int_a^b u'(\mu + \sigma x)dF(x)$$

$$V_\sigma = \frac{\partial V}{\partial \sigma} = \int_a^b u'(\mu + \sigma x)xdF(x)$$

Własności stopnia nachylenia $S(\sigma,\mu)$ mają ścisły związek z miarami awersji do ryzyka w podejściu EU o czym szerzej będzie w dalszej części artykułu.

Zgodność dla kwadratowej funkcji użyteczności

Wcześniej wskazano, że dla kwadratowej funkcji użyteczności i dowolnych rozkładów losowych wariantów decyzyjnych zachodzi warunek zgodności EU i MV. Oczekiwana użyteczność funkcji kwadratowej w sposób dokładny zależy od dwóch pierwszych momentów rozkładu. W pracy Johnstona i Lindleya[13] (2011) przedstawiono formalny dowód związku MV i kwadratowej funkcji użyteczności. Przyjmując postać funkcji użyteczności $u(x) = x - ax^2$ oraz $x < a/2$ mamy związek

$$E[u(X)] = \mu - a(\mu^2 + \sigma^2)$$

zatem

$$V(\sigma,\mu) = \mu - a(\mu^2 + \sigma^2)$$

Krzywe obojętności są współśrodkowymi okręgami o środku w punkcie $(0, -a/2)$.

Kwadratowa funkcja użyteczności opisująca preferencje jednostki nie ma empirycznego uzasadnienia. Funkcja taka zdefiniowana jest tylko dla określonego przedziału argumentów, zatem zakres jej stosowalności jest ograniczony. Ponadto, decydent wartościujący efekty decyzji funkcją kwadratową charakteryzuje się rosnącą bezwzględną, jak i względną awersją do ryzyka[14]. W przypadku

[13] D.J. Johnstone D.V. Lindley: Elementary Proof that Mean –Variance Implies Quadratic Utility. „Theory Decision" 2011, Vol. 70, s. 149-155.

[14] Względna i bezwzględna awersja do ryzyka mierzona jest miarami Arrowa-Pratta.

inwestora znaczy to, że ze wzrostem stanu posiadania (bogactwa) zmniejsza on ilość walorów ryzykownych w swoim portfelu oraz zmniejsza odsetek kapitału przeznaczany na inwestycje ryzykowne. Obserwowane w praktyce standardowe zachowanie decydenta jest przeciwne do powyższego, co znaczy, że ze wzrostem bogactwa zwiększa lub utrzymuje na tym samym poziomie ilość walorów obarczonych ryzykiem w swoim portfelu. Również odsetek kapitału przeznaczanego na decyzje ryzykowne rośnie wraz ze wzrostem bogactwa. Zatem stosowanie kwadratowej funkcji użyteczności w zastosowaniach i badaniach empirycznych jest słabością takiego podejścia. Chociaż w praktyce decyzyjnej kwadratowa funkcja użyteczności jest odrzucana ze względu na brak empirycznej weryfikacji, to jej własności zostały wykorzystane dla innych rodzajów funkcji użyteczności, które są funkcjami kwadratowymi otrzymywanymi z rozwinięcia Taylora.

3. Awersja do ryzyka w modelu EU i MV

Badanie zgodność preferencji EU z MV nie może ograniczać się tylko do poszukiwania formalnych bądź empirycznie weryfikowalnych warunków. Mając na uwadze siłę teorii EU i jej znaczenie w ekonomii, odpowiednie pojęcie i twierdzenia tej teorii powinny mieć odpowiedniki w modelu MV, a mówiąc za Mayerem, powinny być przetłumaczone na odpowiednie równoważne warunki w modelu MV. Siła teorii oczekiwanej użyteczności leży w jej jasnej i akceptowalnej definicji stosunku decydenta do ryzyka. Osoba wykazuje awersję do ryzyka, jeśli zachodzi jeden z poniższych warunków:

- preferuje wybór pewnej wypłaty x_0 niż jakiejkolwiek loterii X o wartości oczekiwanej $\mathrm{E}(X) = x_0$,
- preferencje reprezentuje rosnąca i wklęsła funkcja użyteczności ($u'(x) > 0$ i $u''(x) < 0$),
- premia za ryzyko π jest dodatnia.

Powyższe warunki są równoważne, zatem jeśli np. krzywa funkcji użyteczności jest wklęsła, to decydent zawsze wybierze pewną inwestycję przynoszącą zysk x_0 niż inną inwestycję ryzykowną o wartości oczekiwanej x_0. W sytuacji, kiedy w procesie decyzyjnym bez dodatkowych komentarzy mowa o decydencie z awersją do ryzyka, to zawsze jest to rozumiane w sensie powyższych definicji.

Do porównywania siły awersji do ryzyka stosowane są miary wprowadzone przez Arrowa-Pratta. Lokalna miara bezwzględnej awersji do ryzyka (absolute risk aversion) używana w teorii EU definiowana jest następująco

$$A(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$$

W zależności od monotoniczności tej miary mówi się o rosnącej, malejącej i stałej awersji do ryzyka. Charakter monotoniczności miary określa znak jej pierwszej pochodnej $A'(x)$, a funkcje użyteczności mogą być typu IARA (gdy $A'(x) > 0$), DARA ($A'(x) > 0$) i CARA ($A'(x) = 0$).

Problem merytoryczny powstaje wówczas, kiedy decydentowi przypisywane są własności zaczerpnięte z teorii EU, preferencje modelowane są podejściem MV oraz występuje brak zgodności MV z EU. Natomiast jeśli występuje zgodność metodologii EU i MV, a decydent korzysta z modelu (σ, μ), wówczas pojęcia związane z awersją do ryzyka powinny mieć swoje odpowiedniki wyrażone własnościami funkcji $V(\sigma, \mu)$.

W podejściu MV stopień nachylenia stycznych do krzywych obojętności $S(\sigma, \mu)$ traktowany jest jako miara wrażliwości na ryzyko. Zatem o rosnącej (malejącej) wrażliwości mowa, jeśli $S(\sigma, \mu)$ przyjmuje wartości dodatnie (ujemne), natomiast $S(\sigma, \mu) = 0$ mówi o braku wrażliwości na ryzyko. Relacja większej awersji do ryzyka określana w teorii EU ma swój odpowiednik w podejściu MV nazywany relacją większej awersji do wariancji[15].

Definicja 3. Funkcja $V_1(\sigma, \mu)$ określa większą awersję do wariancji niż funkcja $V_2(\sigma, \mu)$ jeśli dla wszystkich σ_0 i σ_1 takich, że $0 \leqslant \sigma_0 \leqslant \sigma_1$ i dowolnych wartości μ_0, μ_1 zachodzi implikacja

$$V_1(\sigma_0, \mu_0) \le V_1(\sigma_1, \mu_1) \Rightarrow V_2(\sigma_0, \mu_0) \le V_2(\sigma_1, \mu_1)$$

Korzystając z określenia miary nachylenia (6) można wykazać, że $V_1(\sigma, \mu)$ określa większą awersję do wariancji niż $V_2(\sigma, \mu)$, jeśli

$$S_1(\sigma, \mu) \ge S_2(\sigma, \mu)$$

Jeśli zachodzi zgodność preferencji EU z MV, wówczas większa awersja do wariancji jest odpowiednikiem większej awersji do ryzyka w podejściu EU.

W pracy Mayera wykazano szereg własności miar awersji do wariancji dla rodziny rozkładów LS i związków z pochodnymi funkcji użyteczności.

Załóżmy dalej, że zachodzi zgodność w sensie warunków (1)-(2) oraz że istnieją pochodne cząstkowe funkcji $V(\sigma, \mu)$. Dla dowolnej funkcji użyteczności $u(x)$ gdzie $E[u(X)] = V(\sigma, \mu)$ zachodzą poniższe własności:

15 F. Lajeri, L.T. Nielsen: Parametric Characterizations of Risk Aversion and Prudence. „Economic Theory" 2000, Vol. 15, s. 469-476.

Własność 1

$u'(x) > 0 \Leftrightarrow V_\mu(\sigma, \mu) > 0$

Własność 2

$u''(x) < 0 \Leftrightarrow V_\sigma(\sigma, \mu) < 0$

Własność 3

$u''(x) < 0 \Leftrightarrow$ funkcja $V(\sigma, \mu)$ jest ściśle wklęsła.

Własność 4

$A'(x) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad S_\mu(\sigma, \mu) < 0$

Własność 1 mówi o tym, że rosnący charakter funkcji ocen $V(\sigma, \mu)$ względem wartości oczekiwanej jest równoważny rosnącej funkcji użyteczności. Z własności 2 wnioskujemy, że jeśli tylko funkcja oceny dwóch pierwszych momentów rozkładu $V(\sigma, \mu)$ jest malejąca względem odchylenia standardowego, to jest to równoznaczne z tym, że posługująca się nią osoba ma awersję do ryzyka. W sytuacji zgodności metodologii EU i VM wklęsłość funkcji użyteczności przekłada się na wklęsłość funkcji $V(\sigma, \mu)$. Własność 4 mówi o związku pomiędzy malejąca awersją do ryzyka a malejącym nachyleniem stycznych do krzywych obojętności, jeśli poruszamy się w kierunku osi wartości oczekiwanych. Reasumując, jeśli warianty decyzyjne spełniają warunek LS, wówczas miary awersji do ryzyka definiowane w teorii EU mają swoją interpretację w metodologii MV i są wyrażane stopniem nachylenia stycznych do krzywych obojętności.

4. Zachowania rozważne

Awersja do ryzyka łączona jest z zachowaniami określanymi mianem działań rozważnych (roztropnych) polegających na zapobiegawczym oszczędzaniu lub ograniczaniu konsumpcji. Celem tak rozumianego oszczędzania jest zapobieganie skutkom ryzyka co do niepewnego przyszłego stanu posiadania. Rozwaga może być definiowana jako cecha osobowości związana z określonym zachowaniem w sytuacji ryzyka lub na gruncie teorii oczekiwanej użyteczności, jako wypukłość marginalnej użyteczności, co jest równoznaczne z warunkiem $u'''(x) > 0$. Określenie „rozwaga" („prudence") w kontekście osoby z awersją do ryzyka po raz pierwszy zostało wprowadzone przez Kimballa[16], zaś przedefiniowanie miar Arrowa-Pratta dało formalne podstawy teorii dotyczącej zapobiegawczych zachowań decydenta w odpowiedzi na ryzyko. Jeśli zachodzi zgodność preferencji EU i MV, to zachowania roztropne również powinny mieć swój opis w modelu (σ, μ). Konstrukcja taka oparta jest na własności 5, która mówi, że jeśli tylko rozkłady spełniają warunek LS, to zachowania rozważne opisuje dodatnia mieszana pochodna funkcji reprezentującej preferencje w podejściu MV.

Własność 5

$$u'''(x) > 0 \Leftrightarrow V_{\mu\sigma}(\sigma, \mu) > 0 \qquad (7)$$

Funkcja użyteczności dla której $u'''(x) > 0$ (typu DARA[17]) charakteryzuje decydenta, którego bezwzględna awersja do ryzyka maleje wraz ze wzrostem jego stanu posiadania. Zatem z własności 5 mamy, że dodatnia pochodna mieszana funkcji oceny $V_{\mu\sigma}(\sigma, \mu)$ jest odpowiednikiem malejącej awersji do ryzyka.

Analogicznie do bezwzględnej awersji do ryzyka $A(x)$ określona została miara bezwzględnej intensywności rozwagi $AP(x)$ (absolute prudance) w następujący sposób

$$AP(x) = -\frac{u'''(x)}{u''(x)} \qquad (8)$$

gdzie x jest możliwym stanem posiadania wyrażanym w jednostkach pieniężnych. Dla stanu bogactwa x wartość $AP(x)$ mierzy intensywność zapobiegawczego oszczędzania na okoliczność ryzyka.

Propozycja miary bezwzględnej rozwagi w ramach metodologii MV pochodzi od Lajeri i Nielsena[18] i związana jest ze stopniem nachylenia stycznych do krzywych $V_{\mu}(\sigma, \mu)$ na płaszczyźnie (σ, μ).

Definicja 4. Miarą intensywności zachowań rozważnych w modelu MV jest wielkość $SP(\sigma, \mu)$, gdzie

$$SP(\sigma, \mu) = \frac{-V_{\mu\sigma}(\sigma, \mu)}{V_{\mu\mu}(\sigma, \mu)} \qquad (9)$$

[16] M. Kimball: Precautionary Saving in the Small and in the Large. „Econometrica" 1990, Vol. 58 (1), s. 53-73.

[17] Warunkiem malejącej awersji do ryzyka jest ujemność $A'(x)$ którą zapewnia $u'''(x) > 0$ (bądź wypukłość użyteczności marginalnej).

[18] F. Lajeri, L.T. Nielsen: Op. cit.

Z własności 3 i 5 wynika, że $SP(\sigma,\mu)\geq 0 \Leftrightarrow AP(x)\geq 0.$ Zatem miarą intensywności zachowań rozważnych jest nieujemna wtedy i tylko wtedy, kiedy miara nachylenia stycznych do krzywych obojętności funkcji $V_{\mu}(\sigma,\mu)$ w płaszczyźnie (σ,μ) jest nieujemna.

Decydent posługujący się funkcją użyteczności $u_1(x)$ jest bardziej rozważny niż ten posługujący się $u_2(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$AP_1(x)\geq AP_1(x)$$

gdzie $AP_1(x)=-\dfrac{u_1'''(x)}{u_1''(x)}$ $\quad AP_2(x)=-\dfrac{u_2'''(x)}{u_2''(x)}$

Jeśli wybory dotyczą wariantów spełniających warunek LS, wówczas zachodzi zgodność oceny jednostki charakteryzującej się większą rozwagą podejścia EU i MV, ponieważ

$$AP_1(x)\geq AP_1(x) \;\Leftrightarrow\; SP_1(\sigma,\mu)\geq SP_1(\sigma,\mu)$$

Malejąca intensywność zachowań rozważnych w metodologii EU definiowana jest ujemnym znakiem pochodnej miary $AP(x)$ $(AP'(x)<0).$ Zachowanie takie w podejściu MV charakteryzuje ujemna pochodna cząstkowa miary $SP(\sigma,\mu)$ względem wartości oczekiwanej

$$SP_{\mu}(\sigma,\mu)=\frac{-V_{\mu\mu}V_{\sigma\mu\mu}+V_{\sigma\mu}V_{\mu\mu\mu}}{V_{\mu\mu}^{2}}<0$$

Wagener[19] pokazał, że miara $SP(\sigma,\mu)$ ma takie same ekonomiczne i matematyczne własności, jak miara intensywności zachowań rozważnych $AP(x)$ w modelu teorii oczekiwanej użyteczności, zatem może być traktowana jako odpowiednik koncepcji rozwagi w modelu średnia-wariancja.

---

[19] A. Wagener: Prudence and Risk Vulnerability in Two-moment Decision Models. „Economics Letters" 2002, Vol. 74, s. 229-235.

Podsumowanie

Począwszy od prac Markowitza, Sharpe'a i Tobina preferencje bazujące na ocenie wartości oczekiwanej i wariancji odgrywają ważną rolę zarówno w teorii decyzji, jak i ekonomii finansowej. Wybory dokonywane zgodnie z zasadą średnia-wariancja są zgodne z zasadą maksymalizacji oczekiwanej użyteczności dla dowolnej funkcji użyteczności, jeśli tylko rozkłady ryzykownych decyzji spełniają warunek lokalizacji i skali. Badanie warunków zgodności relacji preferencji sprowadza się do poszukiwania obiektywnych założeń dotyczących tylko rozkładu prawdopodobieństwa lub subiektywnych, związanych z funkcjami użyteczności i ich własnościami.

W zastosowaniach modelu Markowitza do konstrukcji portfeli optymalnych często przyjmowane jest założenie, że inwestor charakteryzuje się awersją do ryzyka, wyrażaną wklęsłością funkcji użyteczności. Ponadto, bez odpowiedniej weryfikacji przyjmowane jest założenie o normalnym rozkładzie stóp zwrotu. Postępowanie takie jest dużym nadużyciem, jeśli zgodność preferencji podejścia MV z EU nie zostanie poddana weryfikacji. Modele ekonomiczne opisujące problemy decyzyjne generalnie nie spełniają warunku zgodności EU i MV. Jeśli zgodność metodologii występuje, wówczas interpretując decyzje podejmowane zgodnie z zasadami modelu MV może korzystać z charakterystyk opisu decydenta na podstawie jego funkcji użyteczności. Jeśli występuje brak zgodności, to siłę awersji do ryzyka oraz intensywność zachowań rozważnych należy opisywać miarami będącymi funkcjami średniej i wariancji.

Literatura

Chipman J.S.: The Ordering of Portfolios in Terms of Mean and Variance. „Review of Economic Study" 1973, Vol. 40(2), No. 122.

Johnstone D.J., Lindley D.V.: Elementary Proof that Mean –Variance Implies Quadratic Utility. „Theory Decision" 2011, Vol. 70.

Kimball M.: Precautionary Saving in the Small and in the Large. „Econometrica" 1990, Vol. 58 (1).

Lajeri F., Nielsen L.T.: Parametric Characterizations of Risk Aversion and Prudence. „Economic Theory" 2000, Vol. 15.

Lajeri-Chaherli F.: Proper and Standard Risk Aversion in Two-Moment Decision Models. „Theory and Decision" 2005, Vol. 57.

Levy H., Markowitz H.: Approximating Expected Utility by a Function of Mean and Variance. „The American Economic Review" 1979, Vol. 69(3).

Levy H.: Stochastic Dominance. Investment Decision Making under Uncertainty. Springer, 2006.
Mayer J.: Two-Moment Decision Models and Expected Utility Maximization. „The American Economic Review” 1987, Vol. 77(3).
Ogryczak W., Ruszczyński A.: Dual Stochastic Dominance and Quantile Risk Measures. „International Transaction in Operational Research” 2002, Vol. 9.
Rothschild M., Stiglitza J.S.: Increasing Risk I. A Definition. „Journal of Economic Theory” 1970.
Trzpiot G.: Dominacje w modelowaniu i analizie ryzyka. AE, Katowice 2006.
Wagener A.: Prudence and Risk Vulnerability in Two-moment Decision Models. „Economics Letters” 2002, Vol. 74.

RELATIONS OF MEASURES OF RISK AVERSION WITH THE FUNCTIONS DEPENDED ON THE PARAMETERS OF THE PROBABILITY DISTRIBUTION

Summary

The expected utility model (EU) and the mean-variance model (M-V) are the most common approaches to analyzing choices under uncertainty. These two models produce the preference relations which are only consistent under additional restrictions. Although the mean-variance preferences has been important in financial economics, such a concept of risk is not consistent with others. However, the decision makers select alternatives by comparing their risk, and various risk measures are employed. The main aim of the paper is to compare various concepts of measure of risk aversion and present some conditions providing consistency in the two approaches.