

**Anna Janiga-Ćmiel**

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach

Katedra Matematyki

anna.janiga-cmiel@ue.katowice.pl

# SKŁADOWA $\gamma_t$ MODELU AARCH ROZWOJU GOSPODARCZEGO

## Wprowadzenie

Gospodarka każdego kraju jest kształtowana przez specyficzne dla danego kraju czynniki, a zależności występujące wśród tych czynników można opisać dynamicznymi macierzami korelacji oraz modelami ekonometrycznymi. Zaproponowane modele w sposób ścisły ujmują występowanie tych zależności i stanowią również obraz badanej rzeczywistości, ponieważ: „Każda teoria cyklu określa inny dobór i interpretację zdarzeń historycznych, co nadaje wielkie znaczenie wcześniejszemu ustaleniu, za pomocą procedur metodologicznych innych niż pozytywistyczne, prawomocnych teorii umożliwiających trafną interpretację rzeczywistości. Nie istnieje zatem żadne niezбите świadectwo historyczne, tym bardziej zaś świadectwo zdolne wykazać, że jakaś teoria jest poprawna lub nie. Powinniśmy być więc bardzo ostrożni i pokorni w naszych nadziejach na empiryczne potwierdzenie teorii. Musimy się, co najwyżej, zadowolić rozwijaniem spójnej logicznie teorii możliwie wolnej od błędów łańcuchu argumentów logicznych i opartej na podstawowych zasadach ludzkiego działania. Dysponując taką teorią, możemy sprawdzić, czy dobrze pasuje ona do zdarzeń historycznych i pozwala interpretować rzeczywiste przypadki w sposób ogólniejszy, bardziej wyważony i poprawny niż inne, alternatywne teorie” [12]. Wybrane modele powinny prezentować kształtowanie się wartości oczekiwanej rozpatrywanych procesów, wariację tych procesów, ich wzajemne kowariancje oraz możliwie jak najszerzej przedstawiać dynamikę składników losowych.

Dysponując odpowiednimi narzędziami ekonometrycznymi można próbować przeciwdziałać globalnym scenariuszom stagnacji, uchronić kraj przed ewentualnymi spowolnieniami gospodarczymi i zdobywać doświadczenia.

## 1. Zastosowanie modelu GARCH

Zastosowanie modeli GARCH z jednej strony dotyczy problemów związanych z ekonomią i stanowi wspomaganie podejmowania decyzji, a z drugiej strony dotyczy własności statystycznych, uzyskując tym samym bardziej efektywne estymatory parametrów i nieobciążone średnie błędy szacunku. Modele pozwalają również na dokonanie opisu zmieniających się w czasie jednoczesnych relacji między warunkowymi wartościami oczekiwanymi.

Rozwój gospodarczy w długim okresie charakteryzuje się nieprzewidywalnymi zmianami wzrostu i spadku wskaźników powodujących zmiany w dynamice rozwoju, koncentrujące się na nieregularnych wahaniami i cyklach o zróżnicowanych długościach. Do opisu tak skomplikowanych procesów można zastosować autoregresyjny model klasy GARCH. W literaturze znajduje się wiele modyfikacji i rozszerzeń modelu GARCH (Bollerslev, Chou i Kroner, Bera i Higgins, Engle i Nelson, Gouriéroux, Osiewalski i Pipień, Tsay, Bauwens, Laurent i Rombouts, Weron i Weron, Brzeszczyński i Kelm, Doman i Doman, Fiszeder) [6].

Jednym z ważniejszych zastosowań modeli GARCH jest modelowanie i prognozowanie zmienności, przy czym modele te nie wskazują źródeł zmienności. Zmienność nie jest bezpośrednio obserwowalna, w jednych okresach bywa bardzo wysoka, w innych niska; nie jest stała. Własność ta została nazwana heteroskedastycznością warunkową. Modele heteroskedastyczności [2] warunkowej opisują dynamikę zmiennej  $\sigma^2_t$ .

Modele te można podzielić na dwie zasadnicze grupy: pierwszy typ modeli obejmuje te, w których ewolucja zmienności  $\sigma^2_t$  jest przedstawiona za pomocą funkcji deterministycznej, drugi typ uwzględnia zależności typu stochastycznego. Modele GARCH służą do badania zmienności wariancji warunkowej i warunkowych kowariancji, umożliwiając wykrywanie zjawisk szokowych i ich wpływ pozytywny lub negatywny na inne populacje. Modele GARCH pozwalają na przeprowadzenie analiz ilości przekazanej informacji między badanymi populacjami oraz zgodności dokonanego przekazu wiedzy. Współzależności ujęte w ramach badanych populacji charakteryzują wewnętrzny stan analizowanych zjawisk, natomiast współzależności istniejące między populacjami charakteryzują powiązania zewnętrzne. Badając współzależności zewnętrzne wykrywa się efekty przenoszenia pozytywnych i negatywnych wpływów z jednej zbiorowości do drugiej. Można ocenić korzyści lub straty, jakie mają miejsce w zbiorowości, do której zostały przeniesione.

## 2. Weryfikacja występowania efektu ARCH

Efekt ARCH – **AUTO**REGRESSIVE **C**ONDITIONAL **H**ETEROSKEDASTICITY to własność grupowania wariancji opisana warunkową heteroskedastycznością i warunkową autokorelacją składnika losowego.

Analizując efekt ARCH należy uwzględnić następujące dodatkowe uwarunkowania: niestałą wariancję składnika losowego (heteroskedastyczność), klastrowanie wariancji (*Volatility clusteting*), czyli występowanie sytuacji, gdy blisko siebie są skupione obserwacje o wysokiej wariancji składnika losowego lub w innych okresach koncentrują się obok siebie obserwacje o niskiej wariancji oraz tworzenie autoregresji składnika losowego i odwrotnie, ponieważ autoregresja stanowi źródło efektu ARCH.

Czynniki determinujące efekt ARCH można dla badanego procesu zweryfikować na podstawie przyjętego poziomu istotności, stosując odpowiednie testy statystyczne. Testy pozwalają wyeliminować z rozważań niektóre postacie modelu i dokonać oceny poprawności przyjętych specyfikacji. W literaturze znajduje się wiele testów na występowanie efektu ARCH. Najczęściej stosowanym testem jest test zaproponowany przez Engle'a [5], jednak nie pozwala rozstrzygnąć, czy ma być stosowany w badaniach model ARCH czy GARCH. Następnie test Ljunga–Boxa (LB) wyznaczany dla kwadratów reszt z równania dla warunkowej wartości oczekiwanej lub warunkowo standaryzowanych reszt dla modelu uwzględniającego zmienną wariancję warunkową – test McLeoda i Li [20] oraz test Li i Mak [16], Lee i King [15] opierający się na pochodnych cząstkowych logarytmu funkcji wiarygodności czy też zaproponowany przez Demos i Sentana test [1], który jest wersją testu LM.

W celu zweryfikowania występowania efektu ARCH można zastosować test McLeoda i Li [3], uwzględniający współczynniki korelacji kwadratów reszt. Hipoteza główna  $H_0$  oznacza brak efektu ARCH, hipoteza alternatywna  $H_1$  informuje o jego występowaniu. Wyznacza się współczynnik korelacji wariancji resztowej modelu zgodnie ze wzorem:

$$\rho_j = \frac{\sum_{t=j+1}^T \xi_t^2 \xi_{t-j}^2}{\sum_{t=1}^T (\xi_t^2)^2}, \quad (1)$$

gdzie:

$T$  – liczba obserwacji,

$j$  – testowany rząd autokorelacji kwadratów reszt,

$j = 1, 2, \dots, k$ .

Wartość statystyki testowej wyznacza się zgodnie ze wzorem:

$$u = \frac{\rho_j}{\sqrt{1-\rho_j^2}} \sqrt{T}. \quad (2)$$

Statystyka  $u$  ma rozkład normalny i jeśli  $|u| > u_\alpha$ , to hipotezę  $H_0$  odrzuca się, co oznacza występowanie efektu ARCH. Procedurę powyższej weryfikacji powtarzamy dla wszystkich  $j = 1, \dots, k$ . Maksymalna wartość  $j$ , dla której odrzucona jest hipoteza  $H_0$  i przyjmowana  $H_1$ , wyznacza w drugi sposób rząd opóźnień  $k$  w modelu wariancji  $\alpha_t$ . Proces ARCH jest zdefiniowany za pomocą ciągu warunkowych reszt i modelu warunkowej wariancji globalnej  $h_t$ . Składowa  $\beta_t$  tego modelu ma za zadanie utrzymanie równowagi modelu z oceną parametru  $\alpha_0$  wyrazu wolnego. Stacjonarność lub niestacjonarność procesu ma swoje źródła w konstrukcji składowych  $\alpha_t$  i  $\gamma_t$ .

### 3. Model AARCH

Pierwsze modele autoregresyjnej heteroskedastyczności warunkowej ARCH znajduje się w pracach Engle'a, modele te wraz z rozwojem badań podlegały wielu modyfikacjom i rozszerzeniom. Etap specyfikacji modelu obejmuje przyjęcie jego formalnej postaci, na co składa się wyznaczenie zmiennych i składowych modelu.

Specyfikacja modelu klasy GARCH wymaga wcześniejszego wyznaczenia modelu podstawowego opisującego przebieg głównej składowej badanego zjawiska, jaką stanowi trend. Wahania rozwoju gospodarczego charakteryzują się dużą zmiennością, proces jest heteroskedastyczny, co wymaga odrębnego opisu rozwoju. Składnik resztowy zastosowanego modelu ARIMA będzie wykorzystany do konstrukcji autoregresyjnego modelu zmiennej wariancji warunkowej  $h_t$ . Od prawidłowego doboru opóźnień zmiennej endogenicznej [8] i średniej ruchomej w modelu ARIMA zależy istotnie specyfikacja równania modelu dla wariancji. Zmienna losowa składnika resztowego powinna mieć rozkład zgodny z rozkładem normalnym lub co dopuszcza się w przypadku modeli AARCH, rozkład leptokurtyczny. Model AARCH stosuje się również dla szeregów czasowych o niskiej częstotliwości i o małej liczbie obserwacji (kilkadziesiąt), jeśli natomiast posiada się szeregi o dużej liczbie obserwacji (kilkaset), wówczas należy uwzględnić duże rzędy opóźnień. Może to spowodować w pewnych przypadkach jednostki czasowej zmianę znaku wariancji teoretycznej. Wówczas na-

leży rozpatrywać uwzględnienie innego rzędu opóźnień. Innym źródłem efektu ARCH jest autokorelacja składnika resztowego, wtedy do modelu wariancji oprócz opóźnień wariancji wprowadza się opóźnienia składnika resztowego, czyli składową średniej ruchomej. Składowa ta odpowiada za autokorelację składnika resztowego i jest wykorzystywana do wyznaczenia stabilizatorów dalszego rozwoju gospodarczego. Składowa średniej ruchomej pozwala również wyznaczyć punkty zwrotne w rozwoju zjawiska. W sytuacji, gdy cykle, jakie występują w rozwoju zjawiska wykazują asymetryczny przebieg, wówczas do modelu wariancji wprowadza się opóźnienia całkowitej wariancji. Otrzymuje się w ten sposób trzecią składową modelu pomagającą wyjaśnić asymetrię w rozwoju gospodarczym.

Wymienione założenia spełnia model AARCH. Asymetryczny model autoregresyjny z warunkową heteroskedastycznością (AARCH) dotyczy zmienności wariancji, na ogół jest podawany w postaci dwóch równań: równania opisującego warunkowo postać trendu i równania opisującego warunkową wariancję. W sytuacji, gdy w wyodrębnionych przedziałach czasu występują modele trendu postaci wykładniczej, wówczas w celu zlinearyzowania wartości zmiennej endogenicznej należy ją zlogarytmować. Zmienna endogeniczna wcześniej powinna zostać poddana procesowi standaryzacji. Logarytmy zmiennej endogenicznej wyznaczamy zgodnie ze wzorem:

$$Y_t' = \ln Y_t \quad (3)$$

Przedstawione problemy stanowią merytoryczne uzasadnienie oczekiwania efektu ARCH w rozwoju gospodarczym. Model AARCH może być uwzględniony z dowolną liczbą opóźnień wariancji i odchyleń resztowych. Model AARCH został przedstawiony w roku 1990 przez Engle'a [21] i jest to asymetryczny, autoregresyjny model z warunkową heteroskedastycznością. Warunkowa heteroskedastyczność, jak już wcześniej zaznaczono, dotyczy zmiennej wariancji badanego zjawiska, przy czym warunkiem zmiennej wariancji w okresie  $t$  są wartości wariancji z okresów wcześniejszych. Model warunkowej wariancji globalnej  $h_t$  jest zdefiniowany w postaci:

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 . \quad (4)$$

Zmienna  $Y_t'$ , jako logarytm standaryzowanej wartości zmiennej  $Y_t$ , jest również zmienną losową standaryzowaną. Jeśli  $\sqrt{h_t}$  jako odchylenie standardowe

zmiennej losowej standaryzowanej jest zmienną o rozkładzie  $N(0,1)$  wówczas można przedstawić model w postaci:

$$Y_t' = v_t \sqrt{h_t}. \quad (5)$$

w którym  $v_t$  również będzie zmienną losową standaryzowaną. Zmienną losową standaryzowaną wprowadza się, by zniwelować wpływ wartości nietypowych na rozwój zjawiska. Wariancja  $h_t$  może wówczas być przedstawiona za pomocą modelu opóźnień wariancji zmiennej losowej  $Y_t'$ , czyli:

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_{t-1}'^2 + \alpha_2 Y_{t-2}'^2 + \dots + \alpha_q Y_{t-q}'^2. \quad (6)$$

Zgodnie z konstrukcją powyższej warunkowej wariancji budujemy model autoregresyjny kwadratów standaryzowanej zmiennej objaśnianej  $Y_t'$ .

$$Y_t'^2 = \alpha_0 + \alpha_1 Y_{t-1}'^2 + \alpha_2 Y_{t-2}'^2 + \dots + \alpha_q Y_{t-q}'^2 + \eta_t. \quad (7)$$

Składnik resztowy powyższego modelu  $\eta_t$  wyznaczono na podstawie przekształconej zależności:

$$h_t = Y_t'^2 - \eta_t \quad (8)$$

Dla otrzymanego ciągu wartości teoretycznych  $h_t$  zbudowano model wariancji resztowej zawierającej trzy odrębne człony:  $\alpha_t$ ,  $\beta_t$ ,  $\gamma_t$ .

$\alpha_t$  jest funkcją wariancji resztowych  $\varepsilon_{t-i}^2$ , dla  $i = 1, \dots, k$

$\beta_t$  jest funkcją odchyłeń standardowych  $\varepsilon_{t-i}$ , dla  $i = 1, \dots, l$

$\gamma_t$  jest funkcją opóźnień wariancji globalnej  $h_{t-i}$  dla  $i = 1, \dots, \max\{k, l\}$ ,

gdzie  $k$  to ilość opóźnień wariancji, a  $l$  liczba opóźnień składnika losowego. Zatem:

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^k \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^l \beta_i \varepsilon_{t-i} + \sum_{i=1}^{\max\{k, l\}} \gamma_i h_{t-i} + \xi_t \quad (9)$$

można zapisać również:

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \dots + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \beta_2 \varepsilon_{t-2} + \beta_3 \varepsilon_{t-3} + \dots + \gamma_1 h_{t-1} + \gamma_2 h_{t-2} + \dots + \xi_t \quad (10)$$

i będzie to ostateczna postać modelu AARCH przyjęta do estymacji.

Wobec ocen liczbowych parametrów przedstawionego modelu wymaga się przedstawienia założeń gwarantujących dodatniość wartości teoretycznych mo-

delu. Wartości teoretyczne powinny być dodatnie, ponieważ  $h_t$  to model wariancji globalnej.

Pierwszą z restrykcji wobec ocen parametrów jest  $\alpha_0 > 0$ . Jest to stały poziom wariancji globalnej procesu  $Y_t$ .

$$\alpha_0 + \sum_{i=1}^k \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^l \beta_i \varepsilon_{t-i} + \sum_{i=1}^{\max[k,l]} \gamma_i h_{t-i} > 0. \quad (11)$$

W literaturze nie znajduje się uniwersalnego kryterium wyboru postaci modelu GARCH [26]. Najczęściej w badaniach stosuje się kryterium informacyjne Akaike'a (AIC) lub kryterium Schwarza (SIC) oraz współczynnik determinacji.

#### 4. Charakterystyka składowych modelu AARCH

W modelu AARCH wyróżnia się trzy składowe. Składowa  $\alpha_t$  dostarcza informacji na temat zmienności wariancji. W przedziałach czasowych, w których zaobserwowano narastanie wariancji, składowa  $\alpha_t$  przyjmuje wartości dodatnie. Natomiast w przedziałach, którym odpowiada spadek wariancji, stwierdzono ujemny znak wartości pierwszej składowej modelu  $\alpha_t$ . W sytuacjach, gdy w zjawisku występuje stała wartość oczekiwana i gdy nie występują wahania regularne, model AARCH wystarczy ograniczyć do składowej  $\alpha_t$ .

Jeżeli w zjawisku następują zmiany kierunku rozwoju, to do modelu wprowadza się składową  $\beta_t$ . Jeżeli składowa ta przyjmuje wartości wyłącznie dodatnie, to w zjawisku mamy trend rosnący. Jeśli występują wyłącznie wartości ujemne, to trend jest malejący. Trend zmienia kierunek, jeżeli wartości teoretyczne  $\beta_t$  zmieniają znak. W sytuacji, gdy mają miejsce momenty, w których składowa  $\beta_t$  zmienia znak wartości teoretycznych, występują punkty zwrotne.

Trzecim czynnikiem decydującym o typie wybranego modelu GARCH jest długość i asymetria cykli. Jeżeli cykle są symetryczne, to wartości składowej  $\gamma_t$  są bliskie zera, jeżeli są dodatnie, to obserwuje się krótkie wzrosty i długie spadki w dynamice cykli, co oznacza prawostronną asymetrię cykli, a jeżeli ujemne, to odwrotnie, czyli długie wzrosty oraz krótkie spadki i wówczas ma miejsce lewostronna asymetria.

## 5. Dane empiryczne i model

W przedstawionej analizie rozpatrywano czynniki, które kształtują rozwój gospodarczy w skali makro i dotyczyły one charakterystyki ludności, zatrudnienia i bezrobocia, produkcji globalnej, wszelkich dochodów i kosztów, jakie są ponoszone w celu uzyskania przychodów całokształtu działalności. Stanowią one charakterystykę gospodarki Polski według kategorii ekonomicznych, finansowych, socjalnych i technicznych. Zakres czasowy obejmuje długi okres badanego zjawiska, czyli lata od roku 1949 do 2006 [13], ze szczególnym zwróceniem uwagi na zmiany w gospodarce po roku 1990. Dane zebrano na podstawie materiałów publikowanych przez Główny Urząd Statystyczny, a następnie sprowadzono je do poziomów porównywalnych, stosując w różnych okresach korygujące współczynniki wyrównania. Rozpatrywana analiza została wykonana na podstawie zmiennej syntetycznej bezwzorcową. Z uwagi na ograniczony rozmiar artykułu pominięto prezentację tabeli z danymi, natomiast dane oraz konstrukcja modelu, prezentacja prognoz i prognoz ostrzegawczych zostały przedstawione we wcześniejszych badaniach [13]. Skonstruowana zmienna syntetyczna, stanowiła podstawę wyznaczenia modelu AARCH [12]:

$$h_t = 13,31 - 2,580\varepsilon_{t-1}^2 + 1,305\varepsilon_{t-2}^2 - 23,662\varepsilon_{t-1} + 63,405\varepsilon_{t-2} - 26,796\varepsilon_{t-3} + 0,963h_{t-1} - 0,045h_{t-2} + u_t, \quad (12)$$

który charakteryzuje się najniższym poziomem wskaźnika AIC, najwyższym współczynnikiem determinacji w klasie innych podobnych modeli. Najważniejszym uzasadnieniem jego wykorzystania w rozpatrywanym zagadnieniu jest pozytywne zweryfikowanie występowania efektu ARCH.

W konstrukcji modelu można wyodrębnić następujące trzy składowe. Składowa  $\alpha_t$  charakteryzującą dynamikę wariancji procesu:

$$\alpha_t = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2\varepsilon_{t-2}^2 + \dots \quad (13)$$

Model składowej  $\alpha_t$  przyjmuje postać:

$$\alpha_t = 13,31 - 2,58\varepsilon_{t-1}^2 + 1,305\varepsilon_{t-2}^2. \quad (14)$$

Wartości teoretyczne modelu  $\alpha_t$  w dalszych analizach stanowiły podstawę wyznaczenia prognozy na lata 2007 do 2011.

Druga ze składowych, składowa  $\beta_t$  pozwala wyznaczyć graniczne punkty cykli w rozwoju zjawiska oraz punkty zwrotne. Przyjmuje postać:

$$\beta_t = \beta_1\varepsilon_{t-1} + \beta_2\varepsilon_{t-2} + \beta_3\varepsilon_{t-3} + \dots \quad (15)$$



oraz jej model:

$$\beta_t = 23,662\varepsilon_{t-1} + 63,405\varepsilon_{t-2} - 26,7\varepsilon_{t-3}. \quad (16)$$

Składowa  $\beta_t$  przyjmuje głównie wartości dodatnie, ujemne zdarzają się sporadycznie. Postać składowej  $\beta_t$  potwierdza rosnącą tendencję wskaźników gospodarczych i ich wariancji. Składowa ta również stanowi podstawę wyznaczenia prognozy ostrzegawczej, ponadto na jej podstawie wyznaczono stabilizatory.

Trzecia składowa  $\gamma$  pozwalająca scharakteryzować cykle w rozwoju gospodarczym, czyli wyznaczyć długości cykli, amplitudy, okresy wzrostu i spadku w badanym przedziale czasowym to:

$$\gamma_t = \gamma_1 h_{t-1} + \gamma_2 h_{t-2} + \dots \quad (17)$$

i model dla badanego zagadnienia ma postać:

$$\gamma_t = 0,963h_{t-1} - 0,045h_{t-2}. \quad (18)$$

Jeżeli  $\gamma$  przyjmuje wartości wyłącznie ujemne, to występuje lewostronna asymetria cykli, które mają miejsce w sytuacji, gdy w rozwoju gospodarczym występują długie powolne wzrosty i krótkie spadki. Jeśli  $\gamma$  przyjmuje wartości wyłącznie dodatnie, to w cyklach stwierdzamy prawostronną asymetrię. W rozpatrywanym przykładzie jeden ze współczynników jest dodatni, drugi ujemny, czyli występuje w pewnych okresach zmiana znaku wskaźnika  $\gamma$ . Oznacza to, że są momenty, w których zmienia się asymetria cykli. Jednak przeważają cykle o asymetrii prawostronnej, ponieważ dodatni współczynnik ma wartość bezwzględną większą niż ujemny.

## 6. Analiza zmian asymetrii w kolejnych cyklach rozwoju gospodarczego

Składowa  $\gamma_t$  modelu AARCH informuje nas o asymetrii w zakresie kształtowania się cykli. Składowa  $\gamma_t$  przyjmuje wartości o znaku dodatnim w cyklach o asymetrii prawostronnej oraz ujemne, gdy odpowiadają one cyklowi o asymetrii lewostronnej. Prawostronna asymetria cyklu ma miejsce, gdy następuje początkowo szybki wzrost, a następnie powolny spadek rozwoju gospodarczego. Lewostronna asymetria cykli występuje, gdy w pierwszej kolejności rozwój gospodarczy wskazuje powolny wzrost, a później szybki spadek. Zmiana tendencji rosnącej na malejącą ma miejsce w górnym punkcie zwrotnym rozwoju, a w dolnym punkcie zwrotnym mamy przejście z tendencji spadkowej w tenden-

cję wzrostową. Punkty te znajduje się na podstawie analizy przebiegu standaryzowanych wartości składowych  $\beta_t$  i  $\gamma_t$  przedstawionych w tabeli:

Tabela 1

Wartości teoretyczne składowej modelu  $\beta_t$  i  $\gamma_t$ 

Rok	Beta(-)	Beta(+)	Gam(-)	Gam(+)
1964		1,543	-1,226	
1965	-0,991		-0,095	
1966	-0,138		-0,573	
1967	-0,162		-0,523	
1968	-0,776		-0,451	
1969	-1,387		-0,203	
1970		0,677	-1,006	
1971		0,294	-0,563	
1972		1,784	-0,573	
1973		4,116	-1,164	
1974		0,940		0,656
1975		1,235		0,470
1976		1,291		0,512
1977		1,403		0,660
1978		1,886		0,457
1979		1,156		1,112
1980		2,391		0,528
1981		0,881		1,176
1982	-2,700			1,758
1983	-6,326			2,062
1984	-1,525		-0,528	
1985		6,306	-2,257	
1986		5,819	-1,221	
1987	-0,528			1,945
1988		0,568		1,117
1989		2,839		0,196
1990		0,488		0,804
1991	-7,200			2,856
1992	-6,519		-0,578	
1993		3,681	-0,583	
1994	-1,297			0,814
1995	-0,043		-0,923	
1996	-1,135		-0,286	
1997		1,196	-1,106	
1998		0,774		0,318
1999		1,195	-0,485	
2000		1,570	-0,438	
2001		0,282	-0,819	
2002	-1,218		-0,465	
2003	-0,807			0,106
2004		0,513	-0,620	
2005	-0,774			0,160
2006		0,045	-0,168	
		0,474	-0,857	

Wartości standaryzowane składowych  $\beta_t$  i  $\gamma_t$  przedstawiono w osobnych kolumnach rozdzielając wartości dodatnie i ujemne. Znak  $\beta_t$  odpowiada znakowi tendencji rozwoju, znak  $\gamma_t$  odpowiada znakowi współczynników asymetrii cykli. Należy zwrócić uwagę na naśladujące zmiany znaku składowej  $\beta_t$  przez zmiany znaku składowej  $\gamma_t$ . Każda zmiana znaku składowej  $\beta_t$  pociąga za sobą zmianę znaku składowej  $\gamma_t$  w następnym okresie, a czasami za dwa lata. Zmiany uważa się za istotne, gdy wartości przyrostów przekraczają progową wartość współczynnika zmienności 0,1, ponieważ tylko takie wartości w składowej  $\beta_t$  zmieniają kierunek trendu rozwoju gospodarczego, a w składowej  $\gamma_t$  zmieniają kierunek asymetrii. Do roku 1980 obserwuje się słaby wzrost rozwoju gospodarczego przy dodatniej asymetrii cyklu. Załamanie pojawia się w roku 1980, by w 1982 spaść poniżej oczekiwań – świadczy o tym składowa  $\beta_t$  na poziomie  $-6,33$ . W dalszych latach ma miejsce słaby wzrost rozwoju gospodarczego potwierdzany dodatnią wartością  $\beta_t$  w latach 1984, 1985. Rok 1986 to nieistotny punkt zwrotny dolny rozwoju gospodarczego utrzymuje się na stałym, ale niskim poziomie, osiągając dolny punkt zwrotny w latach 1990, 1991. W ślad za tym zmienia się asymetria cyklu na lewostronną. Obserwuje się silny spadek rozwoju gospodarczego, co potwierdzają częste zmiany składowych  $\beta_t$  i  $\gamma_t$ . Wartości, jakie przyjmują te składowe w tych latach, nie są istotne statystycznie, tak jak w latach, w których występowały zmiany silnego kierunku rozwoju. W ostatnim dziesięcioleciu zwrócić uwagę należy na lata 1997, 2002, 2004. W tych latach zmienia się asymetria cykli rozwoju (przy ograniczeniu się do obserwacji krótkich okresów). Wartość 0,318 składowej  $\gamma_t$  wyznacza ważny górny punkt zwrotny, znak  $\gamma_t$  zmienia się z minusa na plus i jest poprzedzony zmianą znaku  $\beta_t$  również z minusa na plus. Natomiast rok 2002 to dolny punkt zwrotny, w punkcie tym  $\gamma_t$  również zmienia się z minusa na plus, przy czym zmiana ta poprzedzona jest zmianą znaku  $\beta_t$  w latach 2000-2001 z plusa na minus. Istotną zmianę kierunku rozwoju zaobserwowano w roku 2004. Znak  $\gamma_t$  zmienia się z plusa na minus. Znak  $\beta_t$  zmienia się z minusa na plus. Jest to górny punkt zwrotny. Po roku 2000 obserwuje się roczne zmiany znaku składowej  $\gamma_t$  i składowej  $\beta_t$ .

## Podsumowanie

W niniejszym artykule przedstawiono wartości teoretyczne składowej  $\beta_t$  i  $\gamma_t$  modelu AARCH. Stwierdzono, że składowa  $\gamma_t$  zmienia znak w sposób naśladujący zmiany znaku składowej  $\beta_t$ . Przejawia się to w tym, że zmiana znaku składowej  $\beta_t$  każdorazowo poprzedza zmianę znaku składowej  $\gamma_t$ . Oznacza to

skorelowanie dynamiki składowej  $\gamma$  z dynamiką składowej  $\beta$ . Wykorzystując tę własność będzie można w przyszłości wywierać w pewnym stopniu wpływ na skuteczność szacowania prognoz ostrzegawczych.

## Literatura

- [1] Demos A., Sentana E., *Testing for GARCH Effects: A One-Sided Approach*, „Journal of Econometrics” 1998, Vol. 86.
- [2] Doman M., Doman R., *Ekometryczne modelowanie dynamiki polskiego rynku finansowego*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Poznań 2004.
- [3] Doman M., Doman R., *Modelowanie zmienności i ryzyka*, Wolters Kluwer Polska, Kraków 2009.
- [4] Engle R.F., Kraft D., *Autoregressive Conditional Heteroskedasticity in Multiple Time Series Models*, Discussion Paper, University of California, San Diego 1982.
- [5] Engle R.F., *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of the United Kingdom*, „Econometrica” 1982.
- [6] Fiszeder P., *Modele klasy GARCH w empirycznych badaniach finansowych*, Wydawnictwo Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, Toruń 2009.
- [7] Franco Ch., Zakoian J.M., *GARCH Models. Structure, Statistical Inference and Financial Applications*, John Wiley & Sons, New York 2009.
- [8] Glosten L.R., Jagannathan R., Runkle D.E., *On the Relation between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks*, „Journal of Finance” 1993, Vol. 48.
- [9] Hellwig Z., *Ekspansja gospodarcza Polski końca XX wieku*, Wydawnictwo Wyższej Szkoły Bankowej, Poznań 1997.
- [10] Hong Y., Shehadeh R.D., *A New Test for ARCH Effects and Its Finite-Sample Performance*, „Journal of Business and Economic Statistics” 1999, Vol. 17.
- [11] Hosking J., *The Multivariate Portmanteau Statistic*, „Journal of American Statistical Association” 1980.
- [12] Huerta de Soto J., *Pieniądz, kredyt bankowy i cykle koniunkturalne*, Instytut Ludwiga von Mileisa, Warszawa 2009.
- [13] Janiga-Ćmiel A., *Trójliniowy model dynamiki procesu gospodarczego [w:] Polityka gospodarcza i finanse w teorii i praktyce*, red. A. Poszewicki, G. Szczodrowski, Instytut Wiedzy i Innowacji, Warszawa 2011.
- [14] Janiga-Ćmiel A., *Dynamika gospodarki polskiej na tle wybranych krajów Unii Europejskiej – wielowymiarowa analiza porównawcza*, Zarządzanie, Informatyka. Dylematy i kierunki rozwoju, IV Forum Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach, Katowice 2010.

- [15] Lee J.H.H., King M.L., *A Locally Most Mean Powerful Based Score Test for ARCH and GARCH Regression Disturbance*, „Journal of Business and Economic Statistics” 1993, Vol. 11.
- [16] Li W.K., Mak T.K., *On the Squared Residual Autocorrelations in Non-Linear Time Series with Conditional Heteroscedasticity*, „Journal of Time Series Analysis” 1994, Vol. 15.
- [17] Ling S., Li W., *Diagnostic Checking of Nonlinear Multivariate Time Series with Multivariate ARCH Errors*, „Journal of Time Series Analysis” 1997, Vol. 18.
- [18] Linton O.B., Steigerwald D.G., *Adaptive Testing in ARCH Models*, „Econometric Reviews” 2000, Vol. 19.
- [19] *Advanced Data Mining and Applications 6<sup>th</sup> International Conference, ADMA 2010 Chongqing*, China, November 2010, eds. C. Longbing, F. Yong, Z. Jiang, Proceedings, Part II, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg 2010.
- [20] McLeod A.I., Li W.K., *Diagnostic Checking ARMA Time Series Models Using Squared-Residual Autocorrelations*, „Journal of Time Series Analysis” 1983, Vol. 4.
- [21] Osińska M., *Ekonometria finansowa*, PWE, Warszawa 2006.
- [22] Terasvirta T., Tjøstheim D., Granger C.W.J., *Modeling Nonlinear Economic Time Series*, Oxford University, Oxford 2010.
- [23] Wang P., *Financial Econometrics. Methods and Models*, Routledge Chapman & Hall, London 2003.
- [24] Yamarone R., *Wskaźniki ekonomiczne: przewodnik dla inwestora*, Wydawnictwo Helion, Gliwice 2006.
- [25] *Myśli o...*, „Forbes” 2009, nr 3.
- [26] Bollerslev T., Engle R.F., Nelson D.B., *ARCH Models. Handbook of Econometrics 4*, Elsevier Science, Amsterdam 1994.

## COMPONENT OF ASYMMETRY $\gamma_t$ OF AARCH MODEL OF ECONOMIC DEVELOPMENT

### Summary

In the volatility of economic development as in any other phenomenon, a regular component and an incidental component can be distinguished. The former consolidates main factors while the latter is related to random factors. It can be achieved by constructing a precise model, where the random factor isn't statistically significant. The economic development was described by means of model ARMA(1,1). Subsequently, model AARCH(3,2) was used to characterize all kinds of variations. The components of this model were examined and attention was paid to any delays which occur in the creation of the trend and amplitude.