

Tomasz Szkutnik
Mirosław Wójciak

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach

METODY NIEPARAMETRYCZNE JAKO PODSTAWA ESTYMACJI MODELI EKONOMETRYCZNYCH Z ODSTAJĄCYMI OBSERWACJAMI

Wprowadzenie

Jednym z pierwszych udokumentowanych zastosowań metody najmniejszych odchyłeń bezwzględnych (w skrócie MNOB, regresja NOB lub metoda NOB) przy szacowaniu parametrów regresji było wykorzystanie jej przez Bernoulliego w 1734 r. do prognozowania problemów astronomicznych. Dalszy rozwój prac nad metodą NOB był kontynuowany przez Laplace'a i Gaussa. Sheyin zwrócił natomiast uwagę na to, że Gauss rozwinął programowanie liniowe wyłącznie na potrzeby oszacowania parametrów związanych z regresją NOB. Gauss musiał wykorzystać poprzednio rozwiniętą przez siebie klasyczną metodę najmniejszych kwadratów (w skrócie KMNK), która została niezależnie rozwinięta przez Legendre'a), ponieważ rachunek różniczkowy dostarczał skutecznego sposobu na oszacowanie parametrów związanych z regresją KMNK. Jak pisze Sheyin, KMNK jest procedurą, która została wprowadzona jedynie ze względu na fakt, że Gauss nie dysponował stosownymi narzędziami obliczeniowymi w procesie rozwiązywania problemów programowania liniowego. Klasyczna metoda najmniejszych kwadratów była niejednokrotnie obiektem dyskusji, czy wykorzystanie kwadratów reszt nie kładzie zbyt dużego nacisku na skrajne obserwacje w porównaniu z resztami absolutnymi związanymi z metodą NOB [Cade, 2006].

Celem artykułu jest sprawdzenie, czy i w jakim stopniu estymacja parametrów metodą najmniejszych odchyłeń bezwzględnych jest odporna na zmiany wartości parametrów w przypadku występowania obserwacji odstających. Obserwacja odstająca jest to obserwacja znacząco różniąca się od pozostałych,

wywołana przypadkowymi czynnikami. W przypadku gdy obserwacja odstająca charakteryzuje się dużą resztą, a jej występowanie nie zmienia zasadniczo wartości oszacowanych parametrów, mówi się o obserwacji nietypowej. Obserwacja jest natomiast nazywana wpływową, jeśli zmiana jej wartości, przesunięcie jej w zbiorze obserwacji, czy też jej usunięcie powoduje znaczną zmianę wartości oszacowanych parametrów [Dziechciarz, 2002; Maddala, 2006].

W związku z tym, w pracy przeanalizowano metody MNOB i KMNK w kontekście oddziaływania wyżej wymienionych obserwacji na wartości szacowanych parametrów oraz własności składnika resztowego. Ponadto przedstawiona koncepcja zastosowania metod permutacyjnych MRPP daje potencjalne możliwości testowania określonych hipotez statystycznych w sytuacji, gdy rozkłady badanych zmiennych losowych nie są rozkładami normalnymi.

1. Uchylenie założeń KMNK a inne metody estymacji

Najpopularniejsza metoda estymacji modeli ekonometrycznych, jaką jest klasyczna metoda najmniejszych kwadratów (KMNK), wymaga spełnienia wielu założeń tak, by estymatory parametrów strukturalnych modelu miały dobre własności.

Uchylenie założeń KMNK powoduje, że estymator traci pożądane właściwości [Barczak, Biolik, 2002, s. 59].

W przypadku występowania w modelu autokorelacji lub heteroskedastyczności można wybrać inną metodę estymacji w celu zniwelowania wpływu niekorzystnego zjawiska. Do klasycznych metod w tym zakresie są zaliczane metody oparte na koncepcji uogólnionej metody najmniejszych kwadratów (UMNK), gdzie w zależności od postaci macierzy Ω może zostać rozwiązany problem dotyczący autokorelacji lub heteroskedastyczności. Do takich metod należą m.in. metody Aitkena, Cochrańa-Orcutta, Hildretha-Lu, czy metoda Praisas-Winstena [Kufel, 2007, s. 124-128]. Jak podaje się w literaturze [por. np. Gajda, 2004, s. 82-87], ważnym jest zidentyfikowanie źródła problemu, bowiem właściwa identyfikacja może wyeliminować problemy związane z niejednorodnością czy autokorelacją składnika losowego i tym samym może nastąpić konieczność zmiany metody szacowania parametrów strukturalnych.

Zastosowanie koncepcji modelowania zgodnego Zygmunta Zielińskiego [1991] daje również potencjalne możliwości zachowania własności w modelu szacowanym za pomocą KMNK. Jednorównaniowy model zgodny zakłada zgodność harmonicznej struktury procesu objaśnianego (endogenicznego) z łączną strukturą procesów objaśniających (egzogenicznych) oraz procesu resztowego, który jest niezależny od procesów objaśniających.

Odrębnym problemem jest rozkład składnika losowego, bowiem w modelu KMNK składnik losowy powinien mieć rozkład normalny. W przypadku niespełnienia tego założenia często jedynym wyjściem, poza transformacją zmiennych objaśniających (np. przez logarytmowanie lub standaryzację), jest powrót do etapu specyfikacji i zmiana koncepcji modelowej.

Niezależnie od problemów związanych z własnościami składnika losowego w modelu KMNK, większość wspomnianych wyżej metod opiera się na zastosowaniu koncepcji minimalizacji kwadratów odchyłeń, przy uwzględnieniu pewnych transformacji zmiennych, tak jak np. w przypadku metody UMNK.

Dobrym przykładem będzie tu pokazanie, jak różne mogą być efekty związane ze średnią i medianą, a tym samym modelem opierającym się na koncepcji minimalizacji kwadratów odchyłeń reszt i modelem opierającym się na minimalizacji wartości bezwzględnych odchyłeń reszt, nawet jeśli w danych będą występowały obserwacje nietypowe, których nie można traktować jako obserwacji odstających w zwykłym sensie.

2. Pozostałe własności reszt a estymacja modelu

W poprzednim punkcie przedstawiono metody estymacji modeli ekonometrycznych w przypadku, gdy nie są spełnione założenia KMNK. Ponadto spełnienie wymienionych założeń nie zawsze gwarantuje, że oszacowane parametry będą prawidłowe. W przypadku występowania obserwacji wpływowych (dźwigniowych) wartości parametrów mogą znacznie różnić się od rzeczywistych zależności pomiędzy zmiennymi. Nie jest to jednoznaczne z faktem, że reszta dla danej obserwacji musi być duża. Do identyfikacji, czy y_i jest wpływowe na tle pozostałych wartości y , używa się statystyki h_i , określanej mianem dźwigni [Kufel, 2007, s. 63]. Jest to odpowiedni element diagonalny macierzy:

$$H = X(X^T X)^{-1} X^T \quad (1)$$

$$0 < h_i < 1$$

Obserwacja jest dźwigniowa, jeśli jest spełniony warunek:

$$h_i > h^* = \frac{2(k+1)}{n}, \quad (2)$$

gdzie:

k – liczba parametrów strukturalnych modelu,

n – liczba obserwacji.

Drugą dość istotną własnością reszt, która musi być spełniona jest normalność rozkładu. Poprawna interpretacja testu F i testu t – czyli testów istotności zmiennych objaśniających – jest możliwa pod warunkiem przyjęcia założenia stwierdzającego, że rozkład składnika losowego modelu jest rozkładem normalnym o wartości oczekiwanej równej zeru i skończonej, różnej od zera wariancji. W celu sprawdzenia normalności rozkładu można zastosować test Jarque’a-Bery, Doornika-Hansena lub Shapiro-Wilka.

Regresja KMNK od dawna jest uznawana za użyteczne narzędzie w wielu badaniach. Optymalne własności estymatorów parametrów regresji KMNK są dobrze znane, kiedy reszty modelu mają rozkład normalny. W praktyce jednak założenie normalności jest często odrzucane przy weryfikacji własności reszt modelu. Regresja liniowa MNOB daje lepsze rezultaty niż regresja KMNK, w sytuacji gdy reszty szacowanego modelu nie mają rozkładu normalnego. Estymatory parametrów regresji KMNK mogą być pod silnym wpływem nietypowych obserwacji. Dzieje się tak ze względu na wartość nadaną każdemu punktowi danych w procesie minimalizowania sumy kwadratów odchyleń. Regresja MNOB jest natomiast mniej wrażliwa na wpływ nietypowych wartości, ponieważ błędy nie są podnoszone do kwadratu. Jest to analogiczne do wpływu wartości ekstremalnych na średnią i medianę, jako miary pozycyjne [Dielman, 1986].

W dalszej części zostanie przedstawiona koncepcja metody MNOB w odniesieniu do efektów związanych z takimi pojęciami, jak odległość, dźwignia oraz wpływ [Berry, Mielke, 1998].

W przeciwieństwie do regresji KMNK, w metodzie MNOB nie można podać bezpośredniej metody estymacji parametrów strukturalnych. Jednakże wartości tych parametrów wyznacza się poprzez zastosowanie metod programowania liniowego. Oszacowania parametrów regresji MNOB są dokonywane poprzez minimalizowanie sumy absolutnych różnic pomiędzy obserwacjami empirycznymi i teoretycznymi.

Trzy użyteczne diagnostyki do oceny potencjalnych efektów, jakie wywierają wartości odstające na estymatory regresji to odległość, dźwignia i wpływ.

Odległość – odnosi się do możliwej obecności nietypowych wartości w zmiennej objaśnianej y_i i zazwyczaj jest mierzona jako odchylenie wartości od jej środka.

Dźwignia – odnosi się do możliwej obecności nietypowych wartości w zmiennej objaśniającej x_{ki} . W przypadku gdy w modelu występuje jedna zmienna objaśniająca x_{1i} , dźwignia jest mierzona jako odchylenie wartości od środka zmiennej x_{1i} .

Wpływ – zawiera zarówno odległość, jak i dźwignie i odnosi się do możliwej obecności nietypowych wartości w pewnej kombinacji zmiennej objaśnianej y_i oraz zmiennej objaśniającej x_{ki} .

Dla jasności prezentowanych wyników dalsze omówienie jest ograniczone do regresji liniowej z jedną zmienną objaśnianą y_i oraz jedną zmienną objaśniającą x_i . Rozważmy N obserwacji, gdzie $i = 1, \dots, N$. Dla regresji KMNK równanie będzie postaci:

$$y_i^{MNK} = \alpha' + \beta' x_i + \xi_i' \quad (3)$$

Estymatory nieznanymi parametrów strukturalnych można wyznaczyć analitycznie, gdyż są dane w jawnej postaci.

Model regresji MNOB będzie oznaczony przez równanie postaci:

$$y_i^{NOB} = \alpha'' + \beta'' x_i + \xi_i'' \quad (4)$$

W tym przypadku minimalizowana suma wartości bezwzględnych z różnicy pomiędzy obserwacjami teoretycznymi i empirycznymi nie ma rozwiązania analitycznego danego w jawnej postaci.

Do sprawdzenia własności reszt w przypadku występowania obserwacji wpływowych lub gdy reszty nie mają rozkładu normalnego można posłużyć się metodami permutacyjnymi.

3. Ogólne sformułowanie metody MRPP (Multiresponse Permutation Procedures)

Metoda MRPP stanowi klasę metod permutacyjnych służących do wyróżnienia potencjalnych różnic pomiędzy wieloma grupami w jednym lub wielu wymiarach. Prezentowana metodologia pozwala na wykorzystanie metod permutacyjnych w testowaniu własności odpowiednich modeli ekonometrycznych.

Niech $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$ jest skończoną próbką obiektów, która reprezentuje daną docelową populację. Niech $x_i' = (x_{1i}, \dots, x_{ri})$ oznacza r wymiarów dla obiektu ω_i , a S_1, \dots, S_{g+1} wyznacza wyczerpujący podział N obiektów składających się na rozłączne grupy $g + 1$, a także niech $\Delta_{i,j}$ będzie symetryczną funkcją odległości pomiarów odpowiedzi związanych z obiektami ω_i i ω_j . Statystyka MRPP jest w tym przypadku wyrażona jako:

$$\delta = \sum_{i=1}^g C_i \xi_i \quad (5)$$

gdzie:

$C_i > 0$ jest wagą klasyfikowanej grupy ($i = 1, \dots, g$), $\sum_{i=1}^g C_i = 1$,

$$\xi_i = \binom{n_i}{2}^{-1} \sum_{I < J} \Delta_{I,J} \Psi_i(\omega_I) \Psi_i(\omega_J) \quad (6)$$

jest średnią wartością funkcji odległości dla wszystkich odrębnych par obiektów w grupie,

$S_i, n_i > 2$ jest liczbą obiektów z góry klasyfikowanych w grupie S_i ,

$K = \sum_{i=1}^g n_i, n_{g+1} = N - K \geq 0$ to liczba pozostałych (nieklasyfikowanych) obiektów w „dodatkowej” grupie S_{g+1} (w wielu zastosowaniach jest to pusta grupa),

$\sum_{I > J}$ to suma po wszystkich I i J , takich że $1 \leq I \leq J \leq N$,

$\Psi_i(\cdot)$ to indyktor wyrażony jako:

$$\Psi_i(\omega_I) = \begin{cases} 1 & \text{dla } \omega_I \in S \\ 0 & \text{dla } \omega_I \notin S \end{cases} \quad (7)$$

Hipoteza zerowa (H_0) stwierdza, że równe prawdopodobieństwa są przypisane do każdego z:

$$M = \frac{N!}{\prod_{i=1}^{g+1} n_i!} \quad (8)$$

możliwych przydziałów obiektów N w Ω do $g + 1$ grup (tj. S_1, \dots, S_{g+1}). W rezultacie zbiór r pomiarów odpowiedzi dostarcza N r -wymiarowych wymiennych zmiennych losowych dla H_0 . Statystyka δ porównuje wewnątrzgrupowe łączenie pomiarów odpowiedzi z modelem określonym poprzez losowe przydzielenie w hipotezie H_0 [Mielke et al., 1976, 1981].

Tak określone własności modelu MRPP ukazują jego potencjalne zastosowanie w badaniu obiektów wielowymiarowych ze względu na interesujące charakterystyki.

MRPP stanowi klasę metod permutacyjnych, które służą do wyodrębnienia możliwych różnic pomiędzy dwoma lub większą ilością grup w jednym bądź wielu wymiarach. Rozważmy niezależne zmienne losowe o takich samych rozkładach o rozmiarach n_1, \dots, n_g , mianowicie $(y_{11}, \dots, y_{n_1 1}), \dots, (y_{1g}, \dots, y_{n_1 g})$, pochodzące z g populacji o dystrybuantach postaci $F_1(x), \dots, F_g(x)$. Dla uproszczenia zostanie przyjęte, że populacja i ma rozkład normalny ze średnią μ_i i wariancją σ^2 ($i = 1, \dots, g$). W klasycznym teście, gdzie hipoteza $H_0: \mu_1 = \dots = \mu_g$ mówi o braku różnic pomiędzy g grupami z hipotezą alternatywną postaci $H_1: \mu_i \neq \mu_j$ dla $i \neq j$, postać dobrze znanej statystyki testowej wygląda następująco:

$$F = \frac{MS_{gr}}{MS_{wew}} \quad (9)$$

gdzie:

$$MS_{gr} = \frac{1}{g-1} SS_{gr}, \quad SS_{gr} = \sum_{i=1}^g n_i (\bar{y}_i - \bar{y})^2,$$

$$MS_{wew} = \frac{1}{N-1} SS_{wew}, \quad SS_{wew} = \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2.$$

Statystyka F ma rozkład F-Snedecora z $g - 1$ i $N - g$ stopniami swobody. Jednakże jeśli którakolwiek z populacji g nie ma rozkładu normalnego, wówczas statystyka F nie ma już rozkładu F-Snedecora. Pomimo to, sama statystyka F jest nadal znaczącym miernikiem różnic pomiędzy g populacjami. Porównuje ona międzygrupową zmienność MS_{wew} z wewnątrzgrupową zmiennością MS_{gr} w próbach i ; jeśli międzygrupowa zmienność jest „znacznie większa” niż zmienność wewnątrzgrupowa, wówczas można to uznać jako zaprzeczenie hipotezy H_0 .

Metoda permutacyjna zaproponowana przez Pitmana rozważa warunkowy rozkład F przy N statystykach pozycyjnych $x_{1,N} \leq \dots \leq x_{N,N}$ wspólnego zbioru danych. Przy hipotezie zerowej takiej, że $F_i(x) = F_0(x)$ dla $i = 1, \dots, g$, każde z możliwych M przypisań do g grup zachodzi z identycznym prawdopodobieństwem. Wiadomo że możliwych przypisań jest w tym przypadku:

$$M = \frac{N!}{\prod_{i=1}^g n_i!} \quad (10)$$

Warunkowy rozkład F wyrażony przy $x_{1,N} \leq \dots \leq x_{N,N}$ nie zależy zatem od $F(x)$ oraz może być wyraźnie obliczony poprzez wyliczenie ilorazów M i obliczenie wartości F odpowiadającej każdemu przydzieleniu. Procedura ta dostarcza test istotności, który jest niezależny od rozkładu, tzn. który nie zależy od $F_0(x)$. To podejście było oryginalnie zaproponowane przez Fishera w kontekście eksperymentów losowych, a potem przez Pitmana w kontekście ogólnym i jest często określane jako test permutacyjny Fishera-Pitmana dla porównania niezależnych grup g .

Metody MRPP są oparte na tej koncepcji, a alternatywna reprezentacja statystyki F jest wyrażona jako:

$$F = \frac{2SS_{Total} - (N - g)\delta}{(g - 1)\delta}, \quad (11)$$

gdzie:

$$SS_{Total} = SS_{gr} + SS_{wew},$$

$$\delta = \sum_{i=1}^g C_i \xi_i,$$

$$C_i = \frac{n_i - 1}{N - g},$$

$$\xi_i = \binom{n_i}{2}^{-1} \sum_{j < k} (y_{ji} - y_{ki})^2$$

Wielkość SS_{Total} jest niezmienna przy wszystkich M przydzieleniach całkowitych wartości N do grup g . Wielkość δ może być wykorzystana jako statystyka testowa, co jest odpowiednikiem F . Duże wartości F odpowiadają małym wartościom δ , dlatego wartość P - obserwowanego tego testu może być wyrażona jako:

$$P(\delta \leq \delta_0 | x_{1,N} \leq \dots \leq x_{N,N}) \quad (12)$$

gdzie:

δ_0 jest obserwowaną wartością δ , która odpowiada wielkości F_0 .

Przy założeniu, że wartości danych są punktami w przestrzeni danych, statystyka δ jest oparta na „międzypunktowych” odległościach wartości danych należących do tej samej grupy.

W rzeczywistości $\delta_i = 2s_i^2$, gdzie s_i^2 jest wariancją z próby; zatem jest miarą dyspersji wartości y_{1i}, \dots, y_{n_i} dla $i = 1, \dots, g$. Jeśli wartości w różnych grupach są stosunkowo blisko wobec siebie, wówczas δ będzie mała. Cecha ta może być opisana poprzez powiedzenie, że wartości danych wewnątrzgrupowych wykazują *zbijanie się w grupę* lub *gromadzenie się*. Wartość P będzie mała, jeśli obserwowane dane wykazują tendencje zbijania się w grupę w odniesieniu do wszystkich możliwych permutacji wartości danych.

Podsumowując, δ jest naturalną statystyką wykorzystaną w testowaniu hipotezy H_0 , gdy hipoteza alternatywna rozważa rozkłady $F_1(x), \dots, F_g(x)$ różniące się położeniem, tzn. są oddzielone od siebie. Co więcej, zmienność δ prowadzi do naturalnych i znaczących uogólnień. Kluczowy składnik δ jest punktową odległością kwadratową $(x_i - x_j)^2$, dlatego uogólnienia mogą zostać uzyskane poprzez zastąpienie tej odległości jakąkolwiek symetryczną odległością $\Delta_{i,j}$, która dostarcza miary odległości pomiędzy wielkościami x_i i x_j . Intuicyjnie prostą funkcją odległości może być $|x_i - x_j|$. Można użyć jakiegokolwiek miary odległości $\Delta(s, t)$, spełniającej warunek $\Delta(s, t) \geq 0, \Delta(s, s) = 0$ i $\Delta(s, t) = \Delta(t, s)$, choć z przyczyn geometrycznych byłoby wskazane, aby dla $\Delta(s, t)$ była spełniona nierówność trójkąta $\Delta(s, t) \leq \Delta(s, u) + \Delta(t, u)$.

Inną ważną zaletą wykorzystywania δ zamiast F jest fakt, że istnieje uogólnienie do danych wielowymiarowych. Jeśli s i t są r -wymiarowymi punktami, a $\Delta(s, t)$ jest miarą odległości w przestrzeni r -wymiarowej, to δ jest automatycznie zdefiniowane i mierzy całkowity rozmiar grupowania, jaki istnieje wewnątrz grup g . Rozważania te skłaniają do wykorzystywania δ , statystyki MRPP do testowania bardziej złożonych hipotez H_0 .

4. Badanie wpływu obserwacji nietypowych i wpływowych na estymację parametrów modelu metodą KMNK i MNOB – analiza symulacyjna

Tabela 1

Dane umowne użyte do estymacji modeli

zmienna	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Y	2	3	5	7	8	10	12	13	14	16	18	19	20	22	24
X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	29

Na podstawie 15 obserwacji zamieszczonych w tab. 1 oszacowano modele (3) i (4), zaprezentowane w poprzednim punkcie. W celu sprawdzenia odporności obu metod estymacji na występowanie obserwacji nietypowych (odległość), dźwigniowych (dźwignia), wpływowych (wpływ) rozpatrzono 6 przypadków:

1. Zmianie będzie podlegać tylko piętnasta obserwacja y (y_{15}) w zakresie od 24 do 150. Pozwoli to na ocenienie wpływu odległości pomiędzy wielkościami empirycznymi a teoretycznymi na estymatory KMNK i MNOB.
2. Zmianie będą podlegać pozycje obserwacji o współrzędnych $y_i = 33$ i $x_i = 15$ od $i = 1$ do $i = 15$, zastępując oryginalne wartości z tab. 1. Pozwoli to na ocenę wpływu umiejscowienia danej obserwacji na estymatory KMNK i MNOB.
3. Zmianie będzie podlegać tylko 15 obserwacja x (x_{15}) w zakresie od 15 do 150. Pozwoli to na ocenę wpływu dźwigni na estymatory KMNK i MNOB.
4. Zmianie będzie podlegać pozycja obserwacji o współrzędnych $y_i = 24$ i $x_i = 27$ od $i = 1$ do $i = 15$, zastępując oryginalne wartości z tab. 1. Pozwoli to na ocenienie wpływu umiejscowienia danej obserwacji na estymatory KMNK i MNOB.
5. Zmianie będzie podlegać tylko ostatnia obserwacja obu zmiennych y i x (y_{15}, x_{15}). Y w zakresie od 24 do 150, a x w zakresie od 15 do 150. Pozwoli to na ocenienie wpływu dźwigni na estymatory KMNK i MNOB.
6. Zmianie będzie podlegać pozycja obserwacji o współrzędnych $y_i = 37$ i $x_i = 28$ od $i = 1$ do $i = 15$, zastępując oryginalne wartości z tab. 1. Pozwoli to na ocenienie wpływu umiejscowienia danej obserwacji na estymatory KMNK i MNOB.

Przypadek 1

W przypadku zmiany odległości wartości parametrów uzyskane KMNK zmieniają się. Współczynnik kierunkowy a_1 systematycznie rośnie z wartości 1,554 do 4,704. Ze względu na zmianę pochylenia linii regresji wyraz wolny maleje z wartości 0,438 do -16,362. Wartość statystyki Durбина-Watsona maleje z 1,8 do 1,267. Stosując metodę najmniejszych absolutnych odchyleń (MNOB), z każdą zmianą zmiennej Y (na ostatnim miejscu) wartości parametrów nie zmieniają się i wynoszą 0,444 dla a_0 i 1,556 dla a_1 .

Tabela 2

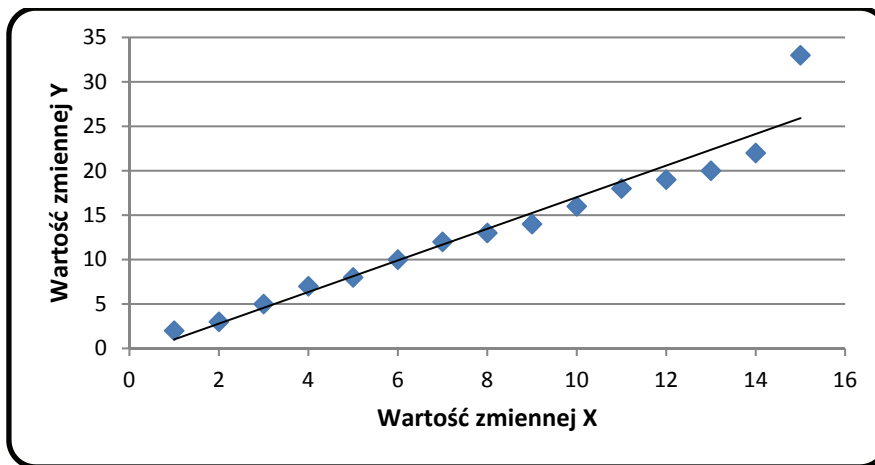
Efekt odległości na wartości parametrów modeli KMNK i MNOB

Lp.	Dane		KMNK					MNOB			
	Y	X	a_0	a_1	Su^2	d	r_1	a_0	a_1	Su^2	$\Sigma u $
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	24	15	0,438	1,554	0,15	1,779	0,093	0,444	1,556	0,15	4,33
2	25	15	0,305	1,579	0,25	1,645	0,014	0,444	1,556	0,26	5,33
3	26	15	0,171	1,604	0,46	1,506	-0,020	0,444	1,556	0,53	6,33
4	27	15	0,038	1,629	0,79	1,427	-0,030	0,444	1,556	0,94	7,33
5	28	15	-0,095	1,654	1,24	1,382	-0,033	0,444	1,556	1,52	8,33
6	29	15	-0,229	1,679	1,81	1,355	-0,033	0,444	1,556	2,24	9,33
7	30	15	-0,362	1,704	2,49	1,337	-0,033	0,444	1,556	3,12	10,33
8	31	15	-0,495	1,729	3,28	1,325	-0,032	0,444	1,556	4,16	11,33
9	32	15	-0,629	1,754	4,20	1,316	-0,031	0,444	1,556	5,35	12,33
10	33	15	-0,762	1,779	5,23	1,309	-0,030	0,444	1,556	6,69	13,33
11	34	15	-0,895	1,804	6,38	1,304	-0,030	0,444	1,556	8,18	14,33
12	35	15	-1,029	1,829	7,64	1,299	-0,029	0,444	1,556	9,83	15,33
13	36	15	-1,162	1,854	9,03	1,296	-0,029	0,444	1,556	11,64	16,33
14	37	15	-1,295	1,879	10,52	1,293	-0,028	0,444	1,556	13,59	17,33
15	38	15	-1,429	1,904	12,14	1,291	-0,027	0,444	1,556	15,70	18,33
16	39	15	-1,562	1,929	13,87	1,289	-0,027	0,444	1,556	17,97	19,33
17	40	15	-1,695	1,954	15,72	1,287	-0,027	0,444	1,556	20,39	20,33
18	42	15	-1,962	2,004	19,76	1,284	-0,026	0,444	1,556	25,69	22,33
19	44	15	-2,229	2,054	24,28	1,282	-0,025	0,444	1,556	31,60	24,33
20	46	15	-2,495	2,104	29,26	1,280	-0,025	0,444	1,556	38,13	26,33
21	48	15	-2,762	2,154	34,70	1,279	-0,024	0,444	1,556	45,28	28,33
22	50	15	-3,029	2,204	40,62	1,277	-0,024	0,444	1,556	53,04	30,33
23	52	15	-3,295	2,254	46,99	1,276	-0,024	0,444	1,556	61,41	32,33
24	54	15	-3,562	2,304	53,84	1,275	-0,023	0,444	1,556	70,41	34,33
25	56	15	-3,829	2,354	61,15	1,275	-0,023	0,444	1,556	80,01	36,33
26	58	15	-4,095	2,404	68,93	1,274	-0,023	0,444	1,556	90,23	38,33
27	60	15	-4,362	2,454	77,18	1,273	-0,023	0,444	1,556	101,07	40,33
28	62	15	-4,629	2,504	85,89	1,273	-0,023	0,444	1,556	112,53	42,33
29	64	15	-4,895	2,554	95,07	1,272	-0,022	0,444	1,556	124,59	44,33
30	66	15	-5,162	2,604	104,72	1,272	-0,022	0,444	1,556	137,28	46,33
31	68	15	-5,429	2,654	114,83	1,272	-0,022	0,444	1,556	150,58	48,33
32	70	15	-5,695	2,704	125,41	1,271	-0,022	0,444	1,556	164,49	50,33
33	80	15	-7,029	2,954	185,31	1,270	-0,022	0,444	1,556	243,29	60,33
34	90	15	-8,362	3,204	256,87	1,269	-0,021	0,444	1,556	337,48	70,33

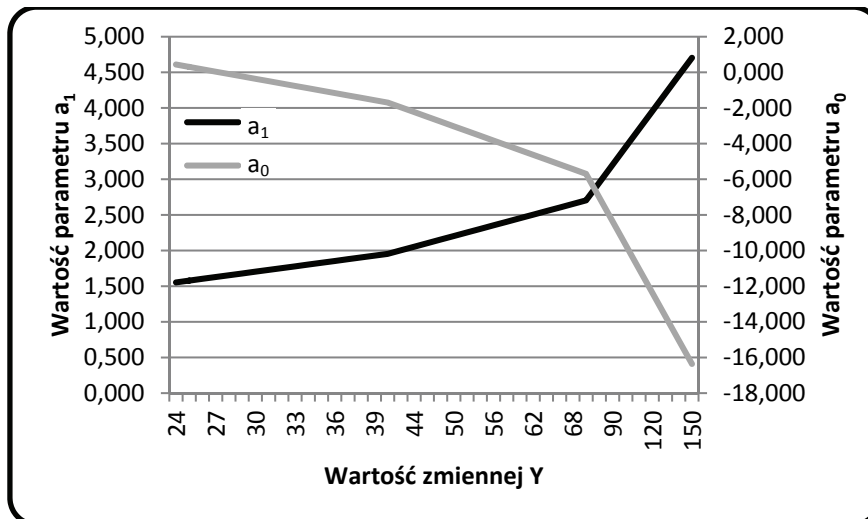
cd. tabeli 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
35	100	15	-9,695	3,454	340,10	1,268	-0,021	0,444	1,556	447,06	80,33
36	110	15	-11,029	3,704	435,00	1,268	-0,021	0,444	1,556	572,01	90,33
37	120	15	-12,362	3,954	541,56	1,268	-0,021	0,444	1,556	712,35	100,33
38	130	15	-13,695	4,204	659,79	1,267	-0,020	0,444	1,556	868,08	110,33
39	140	15	-15,029	4,454	789,69	1,267	-0,020	0,444	1,556	1039,19	120,33
40	150	15	-16,362	4,704	931,26	1,267	-0,020	0,444	1,556	1225,69	130,33

Źródło: Obliczenia własne.



Rys. 1. Przykładowy efekt odległości dla modelu KMNK



Rys. 2. Wpływ efektu odległości na wartości parametrów modelu KMNK przy zmianie ostatniej wartości zmiennej Y

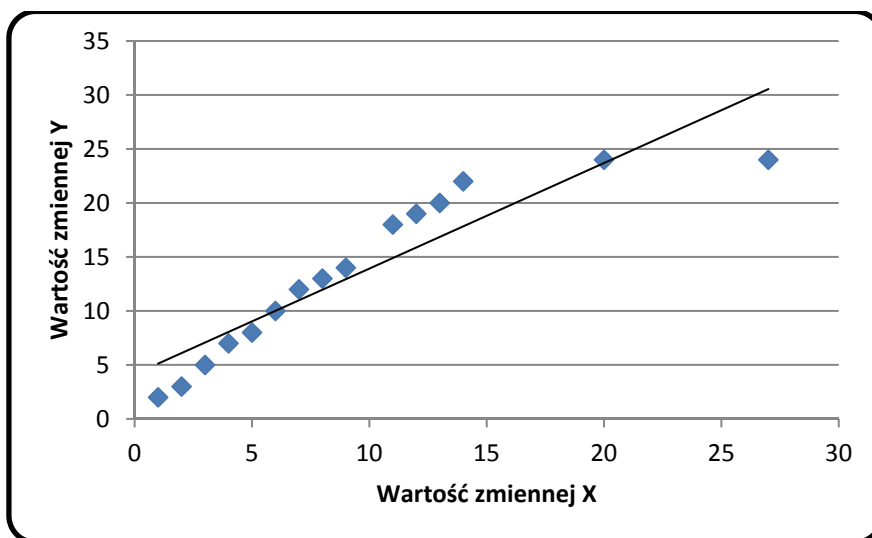
Przypadek 2

Tabela 3

Efekt odległości przy zmianie obserwacji $y_i = 33$ $x_i = 15$ jako obserwacja od numeru 1 do 15

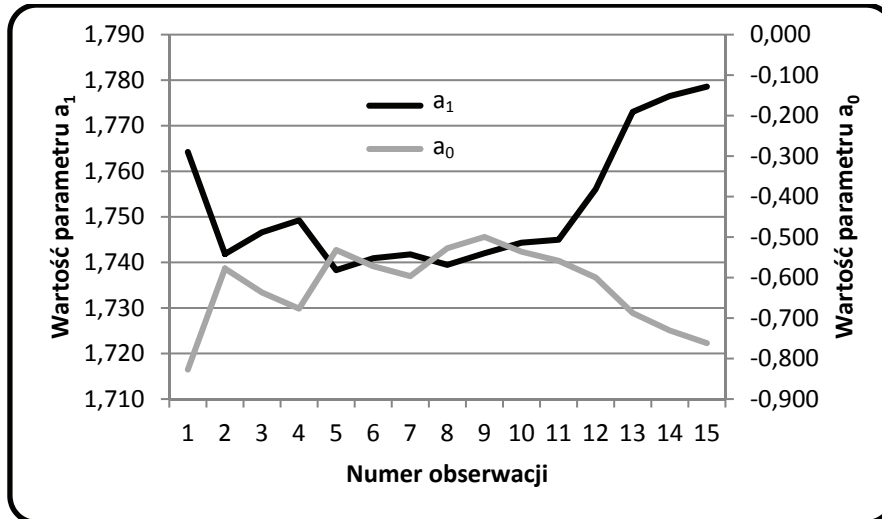
Numer miejsca obserwacji	KMNK					MNOB			
	a_0	a_1	Su^2	d	r_1	a_0	a_1	Su^2	$\Sigma u $
1	-0,827	1,764	5,392	0,760	0,214	0,250	1,583	23,769	22,000
2	-0,578	1,742	5,458	1,372	0,292	0,429	1,571	23,712	21,500
3	-0,637	1,747	5,448	1,454	0,250	0,429	1,571	23,769	22,000
4	-0,677	1,749	5,428	1,541	0,206	0,286	1,571	25,065	22,157
5	-0,532	1,738	5,457	1,475	0,241	0,429	1,571	23,769	22,000
6	-0,572	1,741	5,458	1,569	0,194	0,286	1,571	25,080	22,231
7	-0,596	1,742	5,447	1,664	0,146	0,286	1,571	25,042	21,769
8	-0,527	1,739	5,448	1,783	0,087	0,286	1,571	25,083	22,308
9	-0,500	1,742	5,359	1,907	0,023	0,429	1,571	23,769	22,000
10	-0,536	1,744	5,400	2,007	-0,027	0,429	1,571	25,085	22,385
11	-0,559	1,745	5,430	2,104	-0,075	0,444	1,556	25,058	21,923
12	-0,600	1,756	5,309	2,266	-0,160	0,429	1,571	25,087	22,462
13	-0,687	1,773	5,084	2,479	-0,273	0,429	1,571	23,769	22,000
14	-0,731	1,777	5,162	2,595	-0,332	0,429	1,571	25,580	22,455
15	-0,762	1,779	5,231	1,309	-0,030	0,444	1,556	23,769	22,000

Źródło: Obliczenia własne.

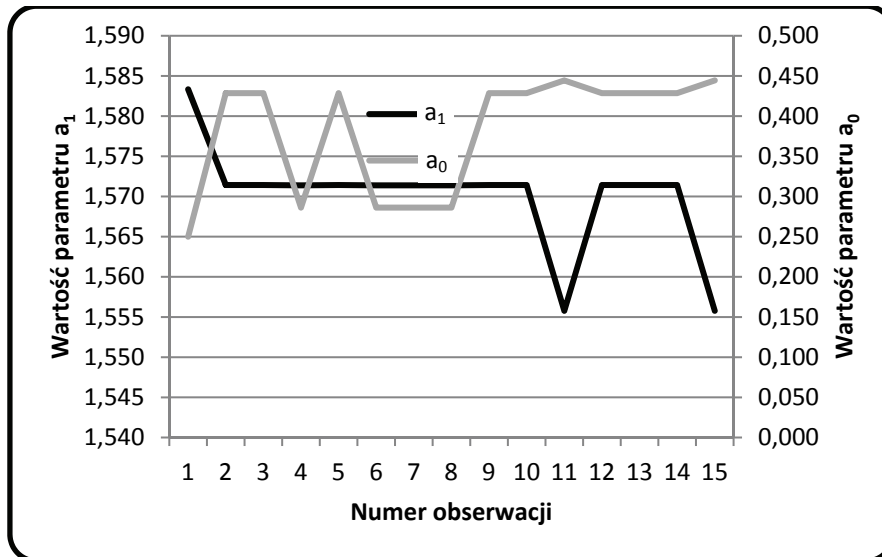
Rys. 3. Przykładowy efekt odległości dla modelu KMNK dla obserwacji $y_i = 33$ $x_i = 15$

Zmiana położenia obserwacji powodująca efekt odległości ma wpływ zarówno na oszacowanie wartości parametrów metodą KMNK, jak i MNOB. W przy-

padku KMNK zmiany te są mniejsze niż w przypadku MNOB. Położenie obserwacji wywołującej efekt odległości powoduje jednak otrzymywanie wartości współczynnika autokorelacji rzędu pierwszego od -0,332 do 0,292 (wartości statystyki Durбина-Watsona od 0,8 do 2,6).



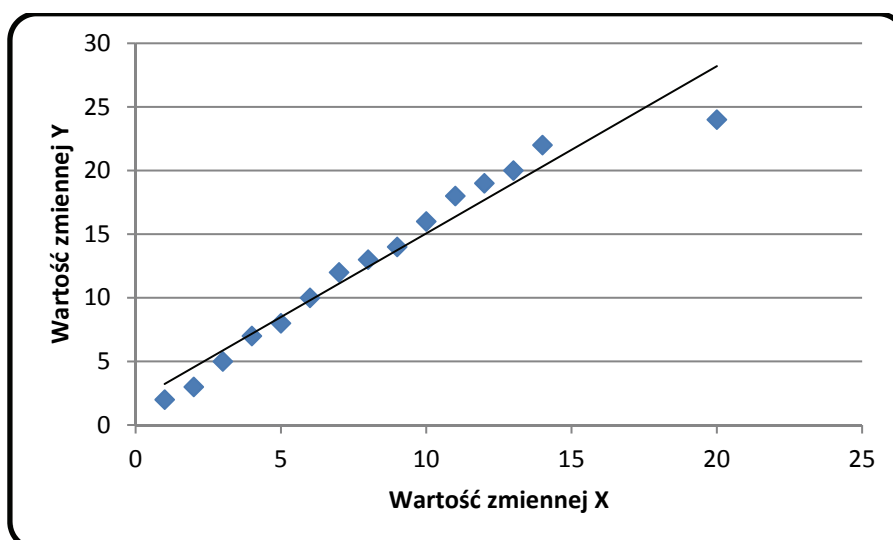
Rys. 4. Wpływ efektu odległości na wartości parametrów modelu KMNK przy zmianie pozycji obserwacji $y_i = 33$ $x_i = 15$



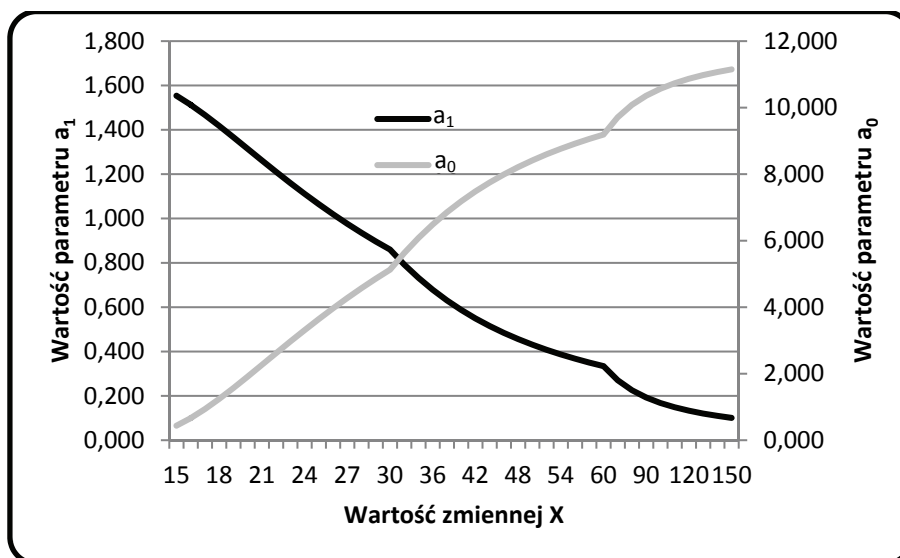
Rys. 5. Wpływ efektu odległości na wartości parametrów modelu MNOB przy zmianie pozycji obserwacji $y_i = 33$ $x_i = 15$

Przypadek 3

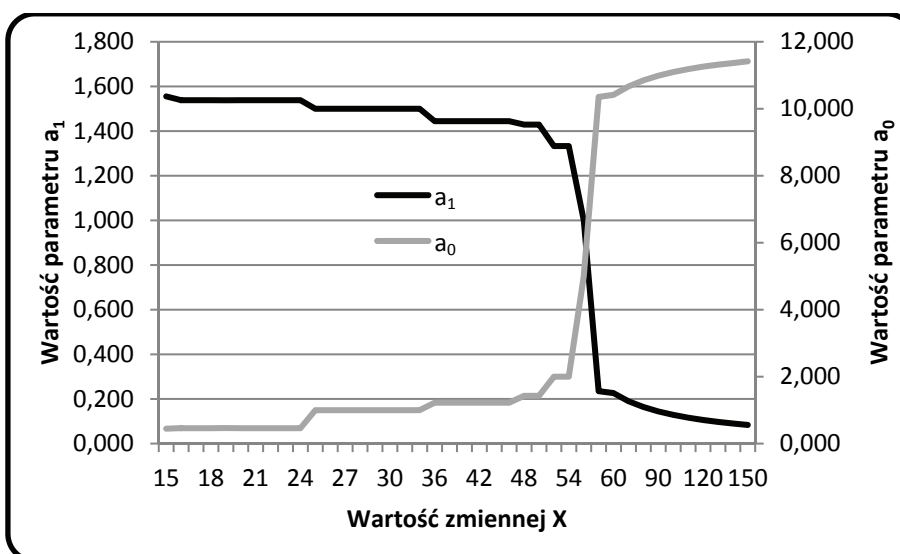
W przypadku zmiany dźwigni, wartości parametrów uzyskane KMNK systematycznie zmieniają się. Współczynnik kierunkowy a_1 maleje z wartości 1,554 do 0,101. Ze względu na zmianę pochylenia linii regresji wyraz wolny rośnie z wartości 0,438 do 11,149. Wartość statystyki Durbina-Watsona maleje z 1,8 do 0,349, otrzymując w efekcie istotną autokorelację rzędu pierwszego. Stosując metodę najmniejszych absolutnych odchyleń (MNOB) z każdą zmianą zmiennej X (na ostatnim miejscu) wartości wykazują tendencję do niewielkich zmian. Wzrost wartości ostatniej obserwacji zmiennej x z 15 do 50 powoduje spadek wartości parametru a_1 z 1,556 do 1,429 (spadek „schodkowy” – rys. 8). Dopiero przekroczenie wartości 58 powoduje spadek wartości parametru a_1 do wartości 0,235.



Rys. 6. Przykładowy efekt dźwigni dla modelu KMNK



Rys. 7. Wpływ efektu dźwigni na wartości parametrów modelu KMNK przy zmianie ostatniej wartości zmiennej X



Rys. 8. Wpływ efektu dźwigni na wartości parametrów modelu MNOB przy zmianie ostatniej wartości zmiennej X

Tabela 4

Efekt dźwigni na wartości parametrów modeli KMNK i MNOB

Lp.	Dane		KMNK					MNOB			
	Y	X	a_0	a_1	Su^2	d	r_1	a_0	a_1	Su^2	$\Sigma u $
1	24	15	0,438	1,554	0,148	1,779	0,093	0,444	1,556	0,149	4,333
2	24	16	0,665	1,513	0,222	1,487	0,121	0,462	1,538	0,237	5,154
3	24	17	0,936	1,467	0,538	1,296	0,090	0,462	1,538	0,674	6,693
4	24	18	1,242	1,418	1,053	1,234	0,089	0,462	1,538	1,475	8,231
5	24	19	1,571	1,366	1,729	1,200	0,103	0,466	1,538	2,639	9,771
6	24	20	1,914	1,314	2,527	1,173	0,122	0,462	1,538	4,170	11,308
7	24	21	2,265	1,262	3,417	1,147	0,145	0,462	1,538	6,063	12,846
8	24	22	2,618	1,211	4,371	1,121	0,168	0,462	1,538	8,321	14,385
9	24	23	2,967	1,160	5,365	1,095	0,191	0,461	1,538	10,943	15,924
10	24	24	3,310	1,111	6,382	1,068	0,215	0,461	1,538	13,929	17,462
11	24	25	3,643	1,064	7,406	1,043	0,238	1,000	1,500	16,385	19,000
12	24	26	3,965	1,019	8,425	1,017	0,260	1,000	1,500	19,904	20,500
13	24	27	4,275	0,976	9,431	0,992	0,281	1,000	1,500	23,770	22,000
14	24	28	4,572	0,935	10,417	0,968	0,302	1,000	1,500	27,981	23,500
15	24	29	4,856	0,897	11,377	0,945	0,321	1,000	1,500	32,539	25,000
16	24	30	5,127	0,860	12,309	0,922	0,339	1,000	1,500	37,443	26,500
17	24	32	5,629	0,792	14,078	0,879	0,374	1,000	1,500	48,290	29,500
18	24	34	6,081	0,732	15,716	0,840	0,404	1,000	1,500	60,519	32,500
19	24	36	6,488	0,679	17,223	0,804	0,432	1,222	1,444	66,007	35,444
20	24	38	6,854	0,631	18,607	0,771	0,456	1,222	1,444	79,636	38,333
21	24	40	7,184	0,588	19,874	0,741	0,478	1,222	1,444	94,550	41,222
22	24	42	7,480	0,550	21,034	0,714	0,498	1,222	1,444	110,747	44,111
23	24	44	7,749	0,515	22,097	0,689	0,515	1,222	1,444	128,229	47,000
24	24	46	7,992	0,484	23,072	0,666	0,531	1,222	1,444	146,994	49,889
25	24	48	8,212	0,456	23,968	0,645	0,546	1,429	1,429	163,301	52,728
26	24	50	8,413	0,431	24,792	0,626	0,559	1,429	1,429	184,165	55,586
27	24	52	8,596	0,408	25,552	0,609	0,571	2,000	1,333	173,150	58,341
28	24	54	8,764	0,387	26,253	0,593	0,582	2,000	1,333	193,104	61,007
29	24	56	8,918	0,368	26,903	0,578	0,592	5,000	1,000	110,846	63,000
30	24	58	9,059	0,350	27,505	0,564	0,601	10,353	0,235	30,178	63,506
31	24	60	9,190	0,334	28,065	0,551	0,609	10,415	0,226	30,573	63,906
32	24	70	9,712	0,270	30,349	0,499	0,642	10,667	0,190	32,275	65,729
33	24	80	10,083	0,226	32,016	0,461	0,666	10,849	0,164	33,520	67,001
34	24	90	10,358	0,193	33,278	0,433	0,683	10,988	0,145	34,465	67,916
35	24	100	10,568	0,168	34,263	0,411	0,696	11,097	0,129	35,233	68,682
36	24	110	10,734	0,149	35,051	0,393	0,706	11,184	0,117	35,855	69,292
37	24	120	10,868	0,133	35,696	0,379	0,714	11,258	0,106	36,373	69,797
38	24	130	10,979	0,121	36,232	0,367	0,721	11,317	0,098	36,809	70,220
39	24	140	11,071	0,110	36,684	0,357	0,727	11,364	0,090	37,180	70,587
40	24	150	11,149	0,101	37,070	0,349	0,731	11,417	0,084	37,505	70,890

Źródło: Obliczenia własne.

Przypadek 4

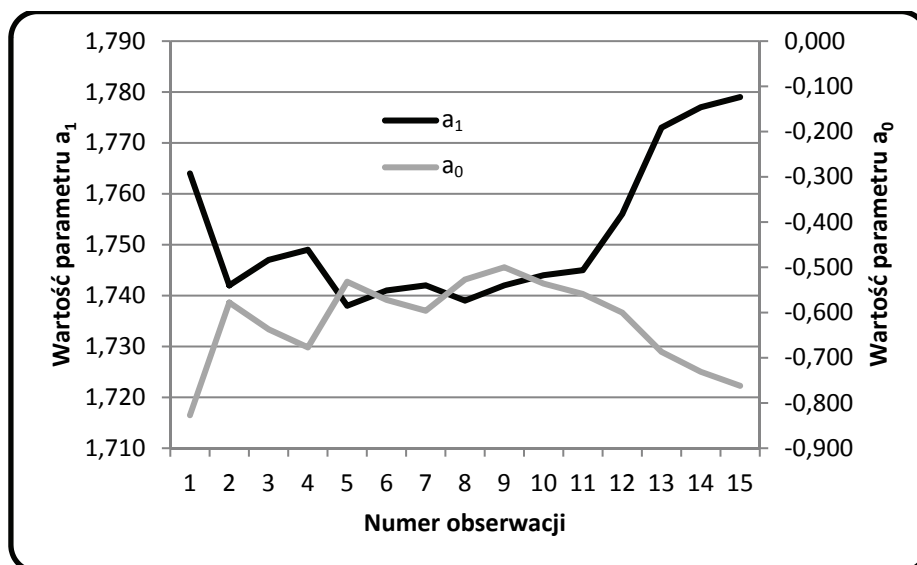
Tabela 5

Efekt dźwigni przy zmianie obserwacji $y_i = 24$ $x_i = 27$ jako obserwacja od numeru 1 do 15

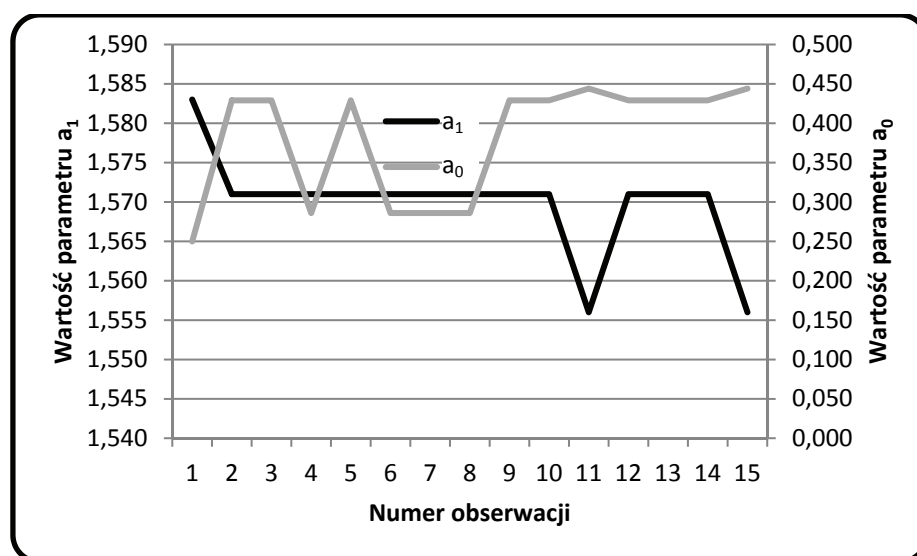
Numer miejsca obserwacji	KMNK					MNOB			
	a_0	a_1	Su^2	d	r_1	a_0	a_1	Su^2	$\Sigma u $
1	-0,827	1,764	5,392	0,147	0,658	0,250	1,583	23,769	22,000
2	-0,578	1,742	5,458	0,300	0,721	0,429	1,571	23,712	21,500
3	-0,637	1,747	5,448	0,410	0,678	0,429	1,571	23,769	22,000
4	-0,677	1,749	5,428	0,517	0,633	0,286	1,571	25,065	22,157
5	-0,532	1,738	5,457	0,698	0,543	0,429	1,571	23,769	22,000
6	-0,572	1,741	5,458	0,821	0,485	0,286	1,571	25,080	22,231
7	-0,596	1,742	5,447	0,939	0,426	0,286	1,571	25,042	21,769
8	-0,527	1,739	5,448	1,045	0,373	0,286	1,571	25,083	22,308
9	-0,500	1,742	5,359	1,151	0,320	0,429	1,571	23,769	22,000
10	-0,536	1,744	5,400	1,285	0,250	0,429	1,571	25,085	22,385
11	-0,559	1,745	5,430	1,429	0,171	0,444	1,556	25,058	21,923
12	-0,600	1,756	5,309	1,553	0,108	0,429	1,571	25,087	22,462
13	-0,687	1,773	5,084	1,677	0,044	0,429	1,571	23,769	22,000
14	-0,731	1,777	5,162	1,872	-0,066	0,429	1,571	25,580	22,455
15	-0,762	1,779	5,231	0,992	0,281	0,444	1,556	23,769	22,000

Źródło: Obliczenia własne.

Zmiana położenia obserwacji powodująca efekt dźwigni ma wpływ zarówno na oszacowanie wartości parametrów metodą KMNK, jak i MNOB. W przypadku KMNK zmiany te są większe niż w przypadku MNOB. Podobnie jak w przypadku efektu odległości, zmiana położenia obserwacji powoduje zmiany otrzymywanych wartości współczynnika autokorelacji rzędu pierwszego od 0,7 do wartości oscylujących wokół zera (wartości statystyki Durbin-Watsona od 0,15 do 1,8). W przypadku MNOB wartość parametru a_1 zmienia się w przedziale od 1,556 do 1,583, a a_0 od 0,250 do 0,444 (por. rys. 10).



Rys. 9. Wpływ efektu dźwigni na wartości parametrów modelu KMNK przy zmianie pozycji obserwacji $y_i = 24$ $x_i = 27$



Rys. 10. Wpływ efektu dźwigni na wartości parametrów modelu MNOB przy zmianie pozycji obserwacji $y_i = 24$ $x_i = 27$

Przypadek 5

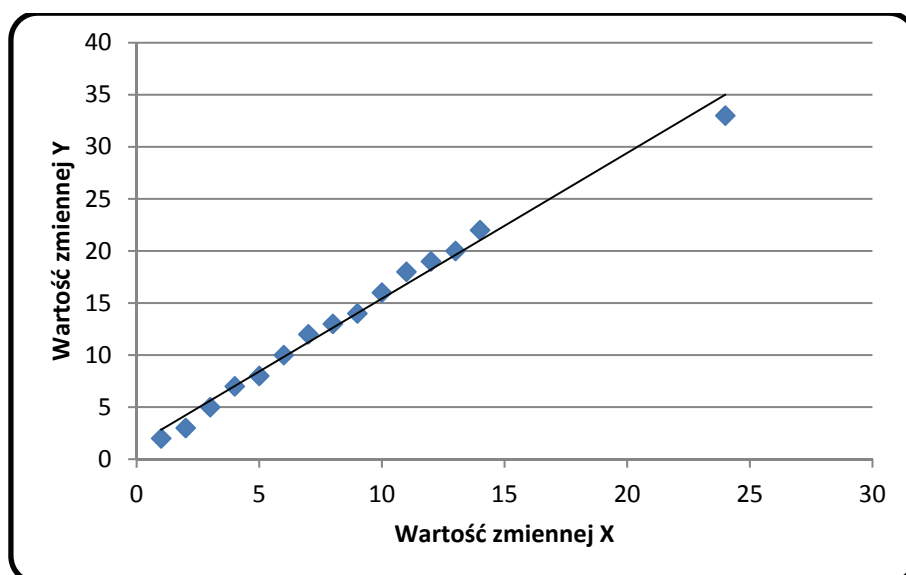
Tabela 6

Efekt obserwacji wpływowych na wartości parametrów modeli KMNK i MNOB

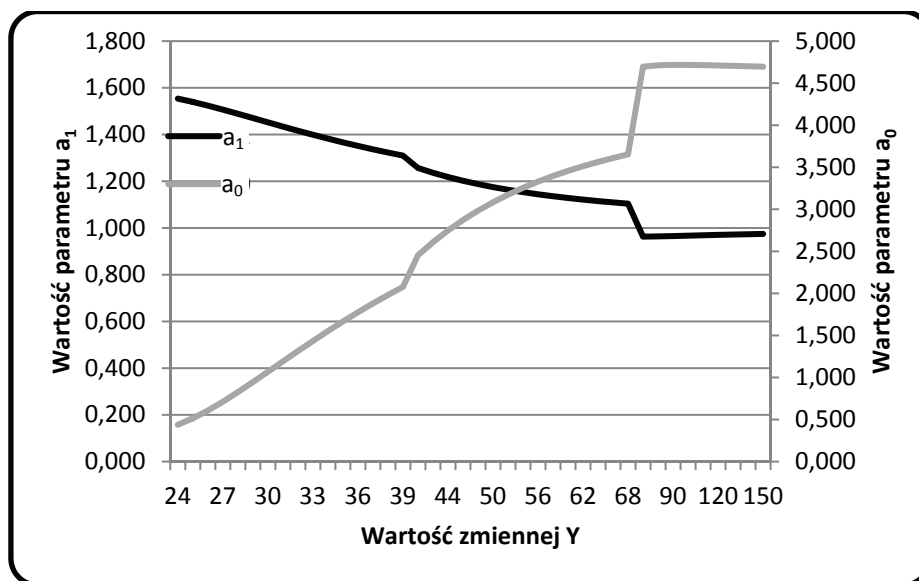
Lp.	Dane		KMNK					MNOB			
	Y	X	a_0	a_1	Su^2	d	r_1	a_0	a_1	Su^2	$\Sigma u $
1	24	15	0,438	1,554	0,148	1,779	0,093	0,444	1,556	0,149	4,333
2	25	16	0,514	1,540	0,144	1,729	0,129	0,462	1,538	0,148	4,154
3	26	17	0,607	1,524	0,171	1,600	0,137	0,462	1,538	0,177	4,692
4	27	18	0,712	1,507	0,225	1,473	0,137	0,462	1,538	0,250	5,231
5	28	19	0,826	1,489	0,299	1,375	0,140	0,462	1,538	0,368	5,769
6	29	20	0,946	1,471	0,390	1,303	0,150	0,462	1,538	0,531	6,308
7	30	21	1,068	1,452	0,494	1,248	0,165	0,462	1,538	0,738	6,846
8	31	22	1,191	1,434	0,607	1,202	0,182	0,462	1,538	0,989	7,385
9	32	23	1,314	1,416	0,726	1,162	0,201	0,462	1,538	1,286	7,923
10	33	24	1,435	1,399	0,848	1,127	0,221	0,462	1,538	1,627	8,462
11	34	25	1,552	1,382	0,972	1,094	0,242	1,000	1,500	1,769	9,000
12	35	26	1,666	1,367	1,097	1,064	0,262	1,000	1,500	2,135	9,500
13	36	27	1,775	1,351	1,220	1,035	0,281	1,000	1,500	2,538	10,000
14	37	28	1,880	1,337	1,341	1,008	0,300	1,000	1,500	2,981	10,500
15	38	29	1,981	1,323	1,459	0,982	0,319	1,000	1,500	3,461	11,000
16	39	30	2,077	1,310	1,574	0,957	0,336	1,000	1,500	3,981	11,500
17	40	32	2,453	1,257	2,184	0,903	0,371	1,000	1,500	6,442	13,500
18	42	34	2,609	1,236	2,386	0,863	0,400	1,000	1,500	7,903	14,500
19	44	36	2,748	1,218	2,570	0,827	0,427	1,222	1,444	6,862	15,444
20	46	38	2,872	1,202	2,737	0,794	0,451	1,222	1,444	8,184	16,333
21	48	40	2,984	1,188	2,889	0,764	0,472	1,222	1,444	9,627	17,222
22	50	42	3,084	1,175	3,027	0,737	0,491	1,222	1,444	11,192	18,111
23	52	44	3,174	1,164	3,152	0,712	0,508	1,222	1,444	12,879	19,000
24	54	46	3,255	1,153	3,267	0,689	0,524	1,423	1,423	13,166	19,924
25	56	48	3,329	1,144	3,371	0,668	0,538	1,423	1,423	14,898	20,770
26	58	50	3,396	1,136	3,467	0,649	0,551	1,423	1,423	16,739	21,616
27	60	52	3,457	1,128	3,555	0,632	0,563	2,000	1,333	10,815	22,333
28	62	54	3,512	1,121	3,635	0,616	0,573	2,000	1,333	12,012	23,000
29	64	56	3,563	1,115	3,710	0,601	0,583	4,426	1,064	4,312	23,130
30	66	58	3,610	1,110	3,779	0,587	0,592	4,449	1,061	4,360	23,245
31	68	60	3,653	1,104	3,842	0,574	0,600	4,472	1,059	4,405	23,354
32	70	70	4,696	0,963	6,437	0,511	0,638	5,556	0,921	7,128	29,889
33	80	80	4,712	0,964	6,326	0,475	0,660	5,479	0,932	6,897	29,356
34	90	90	4,717	0,965	6,233	0,448	0,677	5,422	0,940	6,724	28,952
35	100	100	4,717	0,967	6,155	0,427	0,689	5,376	0,946	6,591	28,634
36	110	110	4,714	0,969	6,088	0,410	0,699	5,340	0,951	6,484	28,379
37	120	120	4,710	0,970	6,031	0,397	0,707	5,310	0,956	6,397	28,168
38	130	130	4,705	0,972	5,982	0,385	0,713	5,285	0,959	6,325	27,992
39	140	140	4,701	0,973	5,939	0,376	0,718	5,263	0,962	6,264	27,854
40	150	150	4,696	0,975	5,902	0,368	0,723	5,245	0,965	6,214	27,750

Źródło: Obliczenia własne.

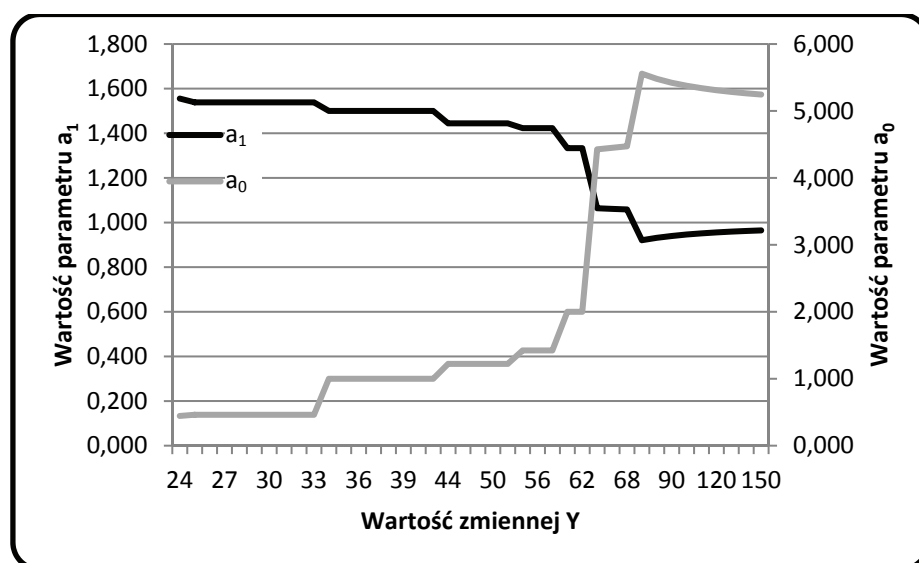
W przypadku zmiany obserwacji wpływowych wartości parametrów uzyskane za pomocą MW KMNK systematycznie zmieniają się. Współczynnik kierunkowy a_1 maleje z wartości 1,554 do 0,975. Ze względu na zmianę nachylenia linii regresji wyraz wolny rośnie z wartości 0,438 do 4,7. Wartość statystyki Durбина-Watsona maleje z 1,80 do 0,37, otrzymując w efekcie istotną autokorelację rzędu pierwszego. Stosując metodę najmniejszych absolutnych odchyłeń (MNOB) z każdą zmianą zmiennej X i Y (na ostatnim miejscu) wartości wykazują tendencję do umiarkowanych zmian. Wzrost wartości ostatniej obserwacji zmiennej X z 15 do 50 oraz wzrost wartości zmiennej Y z wartości 24 do 60 powoduje spadek wartości parametru a_1 z 1,556 do 1,429 (spadek „schodkowy” – rys. 13). Dalsze zwiększanie efektu obserwacji wpływowych powoduje spadek wartości parametru a_1 do wartości 0,960.



Rys. 11. Przykładowy efekt obserwacji wpływowych dla modelu KMNK



Rys. 12. Wpływ efektu obserwacji wpływowych na wartości parametrów modelu KMNK przy zmianie ostatniej wartości zmiennej X i Y



Rys. 13. Wpływ efektu obserwacji wpływowych na wartości parametrów modelu MNOB przy zmianie ostatniej wartości zmiennej X i Y

Przypadek 6

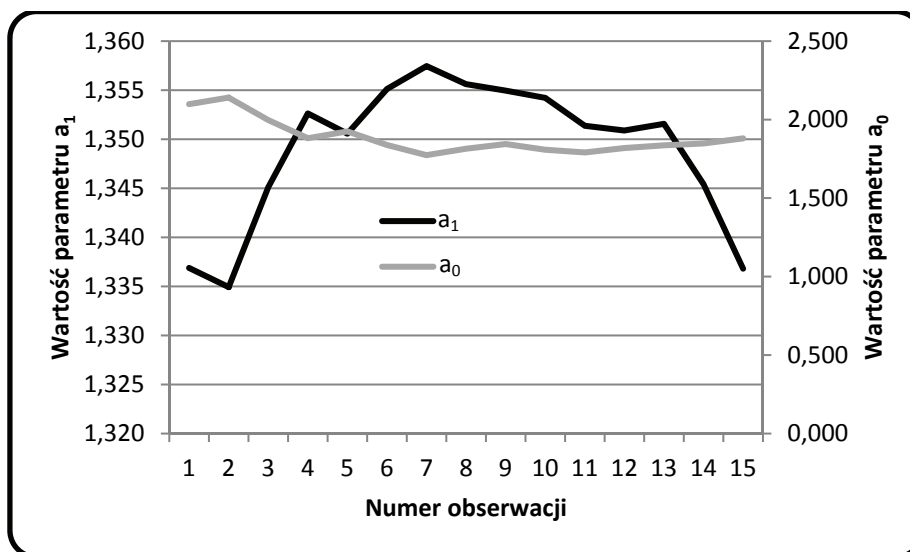
Tabela 7

Efekt obserwacji wpływowych przy zmianie obserwacji
 $y_i = 37$ $x_i = 28$ jako obserwacja od numeru 1 do 15

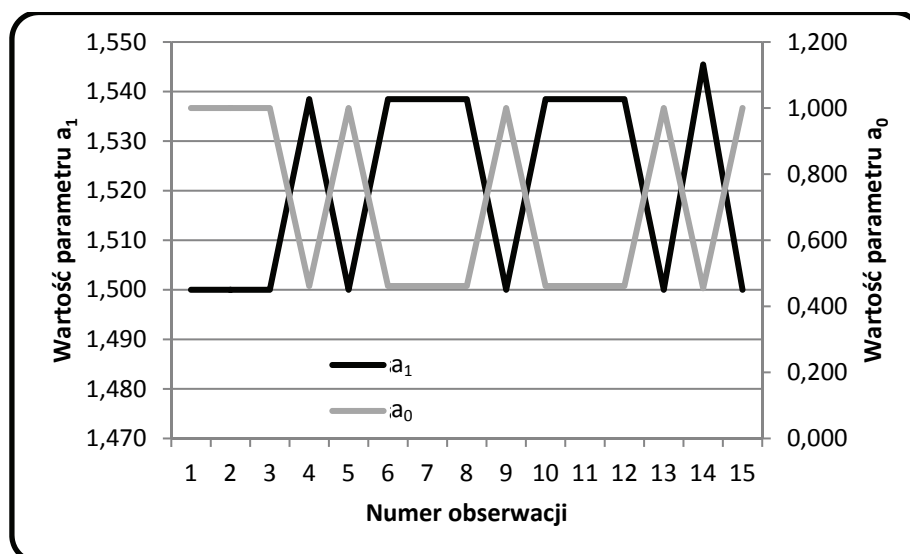
Numer miejsca obserwacji	KMNK					MNOB			
	a_0	a_1	Su^2	d	r_1	a_0	a_1	Su^2	$\Sigma u $
1	2,099	1,337	1,500	0,239	0,629	1,000	1,500	2,981	10,500
2	2,140	1,335	1,416	0,360	0,669	1,000	1,500	2,923	10,000
3	1,997	1,345	1,560	0,466	0,641	1,000	1,500	2,981	10,500
4	1,882	1,353	1,627	0,535	0,618	0,462	1,538	3,441	10,692
5	1,925	1,351	1,600	0,805	0,479	1,000	1,500	2,981	10,500
6	1,838	1,355	1,632	0,938	0,418	0,462	1,538	3,446	10,769
7	1,773	1,357	1,595	1,044	0,363	0,462	1,538	3,407	10,308
8	1,814	1,356	1,624	1,111	0,331	0,462	1,538	3,449	10,846
9	1,844	1,355	1,632	1,161	0,307	1,000	1,500	2,981	10,500
10	1,808	1,354	1,602	1,291	0,237	0,462	1,538	3,451	10,923
11	1,791	1,351	1,503	1,420	0,161	0,462	1,538	3,424	10,462
12	1,819	1,351	1,565	1,486	0,133	0,462	1,538	3,452	11,000
13	1,836	1,352	1,608	1,535	0,113	1,000	1,500	2,981	10,500
14	1,848	1,345	1,512	1,708	0,011	0,455	1,545	3,633	11,000
15	1,880	1,337	1,341	1,008	0,300	1,000	1,500	2,981	10,500

Źródło: Obliczenia własne.

Zmiana położenia obserwacji wpływowej ma oddziaływać zarówno na oszacowanie wartości parametrów metodą KMNK, jak i MNOB. W przypadku obu metod zmiany w wartościach parametrów są zbliżone. Podobnie jak w przypadku efektu odległości, zmiana położenia obserwacji powoduje zmiany otrzymywanych wartości współczynnika autokorelacji rzędu pierwszego od 0,7 do wartości oscylujących wokół zera (wartości statystyki Durбина-Watsona od 0,24 do 1,7).



Rys. 14. Wpływ efektu obserwacji wpływowych na wartości parametrów modelu KMNK przy zmianie pozycji obserwacji $y_i = 37$ $x_i = 28$



Rys. 15. Wpływ efektu obserwacji wpływowych na wartości parametrów modelu MNOB przy zmianie pozycji obserwacji $y_i = 37$ $x_i = 28$

Podsumowanie

Wybór odpowiedniej metody estymacji ma kluczowe znaczenie zarówno w przypadku budowy prognoz, jak i badaniu zależności pomiędzy zmiennymi. W przypadku uchylenia niektórych założeń KMNK można poprawić efektywność estymatorów UMNK. Kiedy w zbiorze danych występują obserwacje nietypowe lub wpływowe estymator KMNK dalej jest zgodny, nieobciążony i asymptotycznie efektywny, ale jego wartości mogą odchyłać się od wartości parametrów w populacji. Zastosowanie MNOB częściowo rozwiązuje ten problem. Przeprowadzona analiza wskazuje, że w przypadku KMNK obserwacja o efekcie odległości powoduje systematyczną zmianę wartości parametru a_1 wraz ze wzrostem odległości, gdy estymator MNOB jest stały (wartości parametrów nie zmieniają się). W przypadku dźwigni wartości parametrów uzyskanych obiema metodami zmieniają się, przy czym względne zmiany dla metody MNOB są mniejsze. Dopiero znaczne odchylenie wartości zmiennej X od środka ciężkości powoduje znaczne zmiany w wartościach parametrów. Estymacja modeli liniowych metodą MNOB jest dobrą alternatywą regresji KMNK, zwłaszcza w sytuacji, gdy błędy są generowane przez rozkłady zawierające wartości ekstremalne (tzw. gruboogonowe). Regresja KMNK nadaje nieproporcjonalną wagę tym wartościom. Choć efekt wyboru metryki, oddziaływania obserwacji dźwigniowych i wpływowych jest ilustrowany jedynie poprzez uproszczony przykład liniowej regresji z jedną zmienną, wyniki rozszerzają się do bardziej ogólnych modeli regresji. W przypadku gdy rozkład składnika losowego nie jest rozkładem normalnym, można dokonać weryfikacji modelu stosując metody permutacyjne.

Literatura

- Barczak A.S., Biolik J. (2002): Podstawy ekonometrii. Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Katowice.
- Berry K.J., Mielke P.W. (1998): Least Absolute Regression Residuals: Analyses of Block Designs. „Psychological Reports”, Part 1, Vol. 83, Iss. 3.
- Cade B.S., Richards J.D., Mielke P.W. (2006): Rankscore and Permutation Testing Alternatives for Regression Quantile Estimates. „Journal of Statistical Computation and Simulation”, 76(4).
- Dielman (1986): A Comparison of Forecast from Least Absolute Value and Least Squares Model. „Journal of Forecasting”, Vol. 5, Iss. 3.
- Dziechciarz J. red. (2002): Ekonometria – Metody, przykłady, zadania. Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Wrocław.

- Osińska M. red. (2007): *Ekonometria współczesna*. Wydawnictwo Dom Organizatora, Toruń.
- Gajda J. (2004): *Ekonometria*. Wydawnictwo C.H. Beck, Warszawa.
- Kufel T. (2007): *Ekonometria. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem programu Gretl*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Maddala G.S. (2006): *Ekonometria*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Mielke P.W., Kenneth J.B., Johnson E.S. (1976): Multi-Response Permutation Procedures for a Priori Classifications. „Communications in Statistics – Theory and Methods”, Vol. 5, No. 14.
- Mielke P.W., Kenneth J.B., Brockwell P.J., Williams J.S. (1981): A Class of Nonparametric Tests Based on Multiresponse Permutation Procedures. „Biometrika”, 68, No. 3.
- Zieliński Z. (1991): *Liniowe modele ekonometryczne jako narzędzie opisu i analizy przyczynowych zależności zjawisk ekonomicznych*. UMK, Toruń.

NONPARAMETRIC METHODS AS THE BASIS FOR THE ESTIMATION OF ECONOMETRIC MODELS WITH OUTLIERS OBSERVATIONS

Summary

In this paper the authors present a nonparametric method of estimating the parameters of the linear econometric model, which is the method of least absolute deviations (LAD). The aim of this article is to examine the extent to which the parameter estimation method of least absolute deviations is resistant to changes in parameter values in case of outliers. In this paper, a hypothetical example examines the impact of the so-called outliers on the model parameters estimated by OLS methods and LAD respectively. In addition, the work raises the problem of the use of permutation methods MRPP in testing certain statistical hypotheses when the distributions of examined random variables distributions are not normal.