

## Jakość estymacji stanu z ciągłymi pomiarami dla modelu zanieczyszczonej rzeki

### 1. Parametryczne badania symulacji jakości estymacji

Zagadnienie estymacji stanu  $x(t)$  sprowadza się do wyznaczenia estymaty  $\hat{x}(t)$  aktualnego stanu, z uwzględnieniem warunku minimalizującego odległość między  $x(t)$  a jego estymatą  $\hat{x}(t)$ . W przypadku filtru Kalmana-Bucy otrzymuje się równanie różniczkowe:

$$\frac{d}{dt} \hat{x}(z, t) = A\hat{x}(z, t) + K_F(z, t)[y(t) - C\hat{x}(z, t)] \quad (1)$$

z warunkami granicznymi:  $\hat{x}(z, t_0) = \hat{x}_0(z)$ ,  $\hat{x}(z_0, t) = \hat{x}_B(t)$

W rozważaniach przyjęto, iż obiektem badań jest rzeka zanieczyszczona biochemicznie, w której wektor stanu  $x(z, t)$  reprezentuje odpowiednio wskaźniki biochemicznego zapotrzebowania tlenu BZT oraz poziom deficytu rozpuszczonego tlenu RT. Jakość przybliżenia estymacji określano wprowadzając funkcjonal  $Q_{Est}$  w postaci:

$$Q_{Est} = \frac{1}{\Omega} \iint \varepsilon^2 dt dz, \text{ dla domeny rozwiązań } \Omega = Z \times T \quad (2)$$

w którym:  $\varepsilon(z, t) = x(z, t) - \hat{x}(z, t)$ , a zmienne  $x(z, t)$ ,  $\hat{x}(z, t)$  oznaczają odpowiednio wektor stanu obiektu oraz jego estymatę.

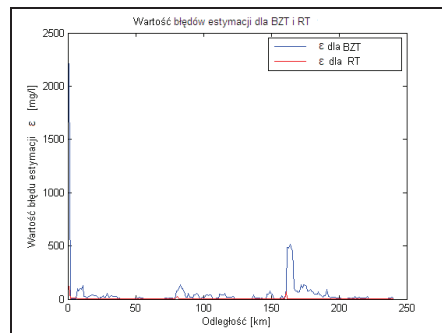
Funkcjonal jakości dany wzorem (2) reprezentuje liczbę zawierającą informację o błędach w domenie rozwiązań, tj. dla całej długości obiektu  $Z$  oraz czasu  $T$ . Równanie (2) w zapisie numerycznym jest następujące:

$$Q_{Est} = \frac{1}{\Omega} \sum_{t_p}^{t_k} \sum_{z_p}^{z_k} \varepsilon(t_i, z_i)^2 dz dt \quad (3)$$

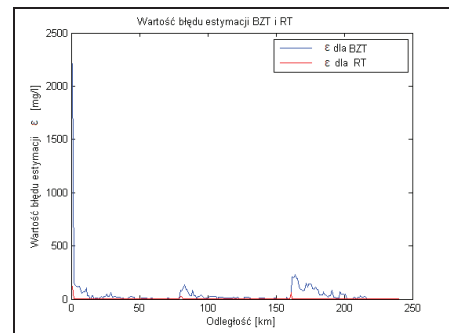
gdzie:  $t_i = \{t_p, t_{p+1}, \dots, t_k\}$ ,  $z_i = \{z_p, z_{p+1}, \dots, z_k\}$  – zbiory dyskretnych wartości w węzłach obliczeń oraz  $dz$ ,  $dt$  – kroki dyskretyzacji dla domeny rozwiązań [Korbicz, Mazurkiewicz, Janczak 1987].

O poprawie jakości estymacji odwzorowującej wartość BZT i deficytu RT mówimy, gdy wartość wskaźnika  $Q_{Est}$  jest coraz mniejsza. Należy zauważyć, iż wartość współczynnika wzmocnienia filtru  $K_F(z, t)$  w równaniu (1) ma istotny

wpływ na przebieg estymat  $\hat{x}(z, t)$  [Kwater, Gomółka, Krutys 2010: 170–172]. Rys. 1 i rys. 2 przedstawia wartości błędów estymacji dla różnych współczynników wzmocnienia filtru Kalmana  $K_{F1}$  i  $K_{F2}$ .



Rys. 1. Wartości błęd estymacji dla  $K_{F1}=-4.2, K_{F2}=1.25$



Rys. 2. Wartości błęd estymacji dla  $K_{F1}=-3.2, K_{F2}=0.95$

Dysponując graficzną reprezentacją wartości błędów, trudno ocenić i porównać skalę błędów estymacji. Na podstawie przebiegu błędów estymacji dla BZT i RT (zob. rys. 1 i 2) można za pomocą równania (3) obliczyć wartości funkcjonału jakości estymacji  $Q_{Est}$ . Wyniki zestawiono w tabeli 1.

Tabela 1  
Wartości funkcjonału jakości dla różnych współczynników wzmocnienia filtru  $K_{F1}$  i  $K_{F2}$

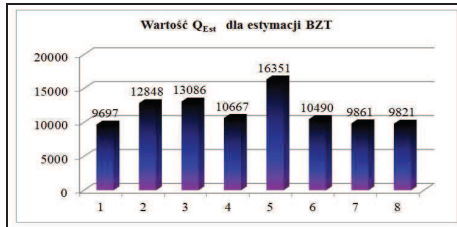
Lp.	Współczynnik wzmocnienia filtru Kalmana	$Q_{Est}$ BZT	$Q_{Est}$ RT
1	$K_{F1}=-4.2, K_{F2}=1.25$	11102	400
2	$K_{F1}=-3.2, K_{F2}=0.95$	10149	322
3	$K_{F1}=-3.2, K_{F2}=0.8$	11431	347

Przeprowadzając wiele eksperymentów symulacyjnych, najlepsze rezultaty estymacji otrzymano dla współczynnika wzmocnienia filtru  $K_{F1}=-3.2$  i  $K_{F2}=0.95$ .

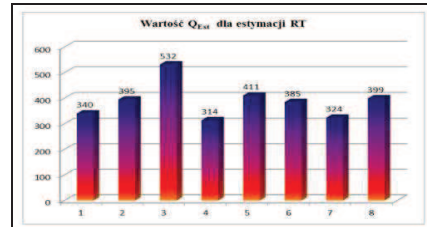
## 2. Dobór współczynnika wzmocnienia filtru Kalmana-Bucy i jego wpływ na dokładność procesu estymacji

Należy podkreślić, że na przebieg wektora stanu istotny wpływ mają sygnały wymuszające, których wartości są stochastyczne, ponadto pomiar  $y(t) = C \cdot x(z^*, t) + v(t)$  również jest zakłócany szumem  $v(t)$  (w którym  $z^*$  jest punktem pomiarowym wzdłuż długości). Zakładając brak informacji o wymuszeniach zakłócających wartość współczynnika wzmocnienia  $K_F$ , należy „do-

brać”, aby funkcjonal jakości  $Q_{Est}$  podany wzorem (3) był jak najmniejszy. Wartość współczynnika wzmocnienia filtra Kalmana ma wielki wpływ na jakość procesu estymacji [Palczewski 2004]. Dysponując wskaźnikiem jakości estymacji, można określić miarę dokładności estymacji. Przeprowadzono szereg eksperymentów, których rezultaty  $Q_{Est}$  zamieszczono na rys. 3 i 4. Najlepsze wyniki estymat BZT otrzymano dla współczynnika wzmocnienia filtra  $K_{F1}=-4.2$  i  $K_{F1}=-3.69$ , natomiast deficyt RT najlepsze rezultaty otrzymał dla wzmocnienia  $K_{F2}=1.25$  i  $K_{F2}=1.05$ .



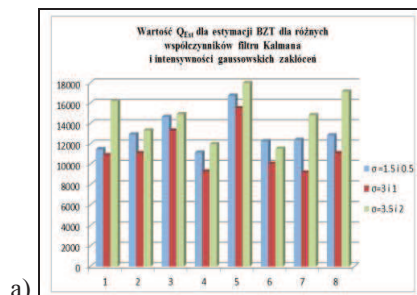
Rys. 3. Wykres wartości funkcjonalu jakości estymacji  $Q_{Est}$  dla BZT z różnymi współczynnikami wzmocnienia filtra



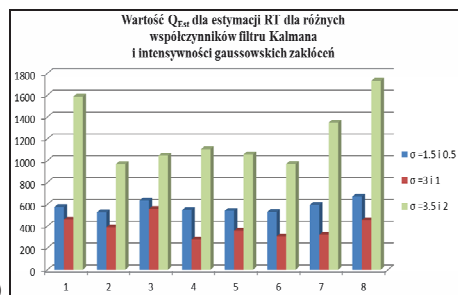
Rys. 4. Wykres wartości funkcjonalu jakości estymacji  $Q_{Est}$  dla RT z różnymi współczynnikami wzmocnienia filtra

### 3. Wpływ wartości zakłóceń pomiarowych na wartość błędów powstających w procesie estymacji

Wykorzystując różne intensywności gaussowskich zakłóceń oddziałujących na obiekt, uzyskano interesujące wyniki. Przyjęto m.in. odchylenie standardowe zakłóceń  $\sigma=1.5$  dla BZT i  $\sigma=0.5$  dla RT;  $\sigma=3$  dla BZT i  $\sigma=1$  dla RT oraz  $\sigma=3.5$  dla BZT i  $\sigma=2$  dla RT. Otrzymane rezultaty zamieszczono na rys. 5a, b.



a)



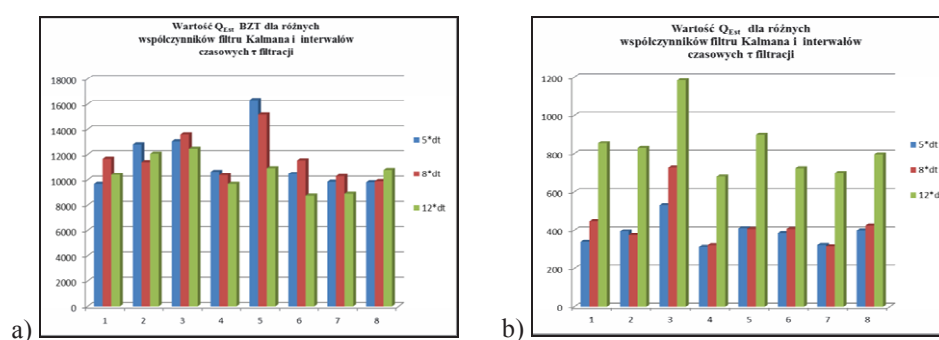
b)

Rys. 5. Wykres wartości funkcjonalu jakości estymacji BZT i RT dla różnych wartości współczynnika wzmocnienia filtra Kalmana i odchyłeń standardowych o sygnale gaussowskim

Najlepsze odwzorowanie dla estymacja deficytu RT obserwujemy przy średnim zaszumieniu, gdyż funkcjonal jakości przyjmuje najmniejsze wartości.

#### 4. Wpływ gęstości pomiarów stanu wskaźników jakości rzeki na błędy estymacji

Proces estymacji realizowany jest na podstawie pomiarów deficytu RT. Przeprowadzono szereg eksperymentów symulacyjnych dla różnych wartości stałych interwałów czasowych pomiędzy pomiarami, tj.  $\tau = 5dt$ ,  $8dt$  i  $12dt$ . Zmiana częstości dokonywania pomiarów i filtracji istotnie wpływa na rezultat końcowy estymacji [Szymkiewicz, Gąsiorowski 2010]. Badano, jak ilość pomiarów w czasie wpływa na funkcjonalność jakości  $Q_{Est}$ . Na rys. 6a przedstawiono wartości BZT dla różnych współczynników filtra Kalmana. Dla drugiej, czwartej i piątej serii pomiarowej estymacja z najkrótszym interwałem pomiędzy filtracjami, tj.  $\tau = 5dt$ , uzyskuje najwyższą wartość funkcjonalności jakości estymacji  $Q_{Est}$ , co oznacza, że najgorzej odwzorowuje stan obiektu. Tymczasem w sześciu przypadkach estymacja wykonywana z zadaniem interwału  $\tau=12dt$  pomiędzy filtracjami uzyskuje najlepsze rezultaty.



Rys. 6. Wykres wartości funkcjonalności jakości estymacji BZT i RT dla różnych współczynników filtra Kalmana i interwałów czasowych  $\tau$ , po których następuje filtracja

W przypadku estymacji charakterystyki RT zestawienie wartości funkcjonalności jakości dla trzech interwałów czasowych pomiędzy filtracjami wygląda bardziej przewidywalnie [Cieśla 2014]. Wartości sumy kwadratów błęd estymacji dla interwału  $\tau=5dt$  są najniższe, a najwyższe dla  $\tau=12dt$  (rys. 6b). W większości przypadków estymacji dla RT przy różnych współczynnikach wzmocnienia filtra można wychwycić prawidłowość, iż im mniejszy jest krok czasowy do kolejnej filtracji, tym lepsze uzyskujemy przybliżenie.

#### Podsumowanie

W artykule przedstawiono rezultaty badań związanych z matematycznym modelowaniem biochemicznych zanieczyszczeń w rzece. Rozważano zagadnienia estymacji z wykorzystaniem filtra typu Kalmana-Bucy o różnych współ-

czynnikach wzmocnienia. Wskaźniki jakości wody zanieczyszczonej biochemicznie reprezentowane były przez Biochemiczne Zapotrzebowanie Tlenu (BZT) oraz Rozpuszczony Tlen (RT). Jakość estymacji została opisana za pomocą funkcjonału jakości  $Q_{Est}$ , rozumianego jako suma kwadratów błędów estymacji. W rezultacie badań otrzymano zróżnicowaną jakość estymacji podczas przeprowadzania eksperymentów symulacyjnych. Możliwy jest odpowiedni dobór parametrów w procesie symulacji, który powoduje zmniejszenie wartości błędu procesu estymacji poprzez dobór odpowiednich współczynników wzmocnienia filtru bez znajomości zakłóceń pomiarowych i systemowych.

## Literatura

- Cieśla M. (2014), *Eksperymenty symulacyjne estymacji stanu z nieciągłymi pomiarami dla modelu matematycznego opisanego równaniami różniczkowymi typu hiperbolicznego*, praca inżynierska, Uniwersytet Rzeszowski, Wydział Matematyczno-Przyrodniczy, Rzeszów.
- Korbicz K., Mazurkiewicz Z., Janczak A. (1987), *Wybrane zagadnienia z teorii identyfikacji i estymacji*, Zielona Góra.
- Kwater T., Gomółka Z., Krutys P. (2010), *Adaptacyjne podejście do wyznaczania wzmocnienia filtru Kalmana*, „Technical News”, 1(31), 2(32).
- Palczewski A. (2004), *Równania różniczkowe zwyczajne, teoria i metody numeryczne z wykorzystaniem komputerowego systemu obliczeń symbolicznych*, Warszawa.
- Szymkiewicz R., Gąsiorowski D. (2010), *Podstawy hydrologii dynamicznej*, Warszawa

## Streszczenie

W artykule przedstawiono zagadnienia związane z badaniami symulacyjnymi jakości estymacji stanu filtrem typu Kalman-Bucy. Badany obiekt stanowiła rzeka zanieczyszczona biochemicznie opisana równaniami różniczkowymi cząstkowymi typu hiperbolicznego. Jakość estymacji określano przy pomocy funkcjonału reprezentującego sumę kwadratu błędu w rozważanej przestrzeni rozwiązań. Na symulowany obiekt oddziaływano stochastycznymi zakłóceniami o rozkładzie gaussowskim dla różnych parametrów. Omówiono także problematykę doboru współczynnika wzmocnienia filtru, wartości początkowej estymacji, intensywności zakłóceń pomiarowych i ich wpływu na dokładność odwzorowania. Uzyskano zróżnicowaną jakość estymacji stanu, dobierając różne wartości parametrów podczas symulacji.

**Słowa kluczowe:** modelowanie matematyczne, równania różniczkowe cząstkowe, jakość estymacji, filtr Kalmana-Bucy.

## **The quality of state estimation of measurements for model polluted river**

### **Abstract**

The article presents the problems of the simulation study the quality of state estimation by filter Kalman-Bucy type. The test object was a river polluted biochemically described partial differential equations of hyperbolic type. Quality estimation determined using the sum square errors of estimation representing a functional of the solutions under consideration. On the simulated object interaction of stochastic interference of Gaussian distributions for various parameters. Also discussed the issue of selection of the filter gain, the initial estimation, the intensity of interference and measuring their impact on the accuracy of the mapping. Obtained varied quality of state estimation by choosing different values of parameters during the simulation.

**Key words:** mathematical modeling, partial differential equations, simulation experiments, Kalman-Bucy filter, quality estimation.