



Rafał Kucharski

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach
Wydział Zarządzania
Katedra Statystyki
rafal.kucharski@ue.katowice.pl

ZBIEŻNOŚĆ STRATEGII OPTYMALNYCH NA RYNKACH FINANSOWYCH Z OGRANICZENIAMI PŁYNNOŚCI

Streszczenie: W pracy rozważamy model rynku finansowego opisanego przez Çetina i Rogersa [2007], w którym ściśle wypukłe koszty transakcyjne służą do modelowania efektów związanych z ograniczeniami płynności. Udaje się wzmocnić rezultaty tej pracy, dowodząc jedyności strategii optymalnych, oraz wykazać ich ciągłość względem preferencji inwestorów.

Słowa kluczowe: koszty transakcyjne, strategie optymalne, ryzyko płynności, wycena instrumentów.

Wprowadzenie

Ryzyko płynności jest jednym z najważniejszych typów ryzyka, z jakim mamy do czynienia na rynkach finansowych. Dotychczasowe badania związane z modelowaniem ryzyka płynności i jego wpływu na zachowanie się inwestorów i rynków finansowych nie są jednak zbyt zaawansowane, być może z powodu braku zgody w sprawie definicji płynności, nawet w kategoriach jakościowych. Efekty związane z płynnością można najprościej opisać jako trudności lub konieczność poniesienia dodatkowych kosztów w sytuacji, gdy chcemy w krótkim czasie sprzedać lub kupić większą ilość pewnych aktywów.

Występują dwa podejścia do modelowania efektów związanych z płynnością. Według pierwszego z nich transakcje dużego inwestora mają wpływ na cenę rynkową. Znane są udokumentowane przypadki, gdy duży inwestor (lub grupa inwestorów) wpływał na rynek, co zwykle objawiało się znacznym wzro-

stem cen, po którym następował krach. Przykładem jest działalność braci Hunt na rynku srebra w latach 1979-1980, która spowodowała wzrost ceny z 9 do 48,70 dolara za uncję [Rogers i Singh, 2004]. Schemat postępowania jest wówczas następujący: należy zająć długą pozycję w kontraktach terminowych na dany walor, a następnie dokonać dużych zakupów na rynku pierwotnym. Inwestorzy, którzy zajęli krótkie pozycje, wraz z wygasaniem kontraktów zmuszeni są do zakupów, co na rynku z obniżoną podażą skutkuje wzrostem cen. Podobne działania z użyciem opcji można podjąć na rynku akcji.

Istnieją wady tego podejścia. Po pierwsze, jeśli pojedynczy inwestor wpływa na cenę, to cena powinna uwzględniać działania wszystkich inwestorów, co czyni model niemal bezużytecznym. Drugi argument to tzw. *free round trip*: inwestor może wystawić opcje typu *down-and-out*, a następnie sprzedać aktywa, na jakie zostały wystawione opcje, co spowoduje spadek ich kursu, czyniąc wystawione opcje bezwartościowymi. Po odkupieniu aktywów inwestor jest bogatszy o premię, za jaką sprzedał opcje, więc osiąga zysk bez ryzyka.

Çetin i Rogers [2007] stosują inne podejście: opisują model rynku, na którym efekt działalności dużego inwestora w obliczu ograniczonej płynności owego rynku ma jedynie krótkookresowy, „lokalny” wpływ na cenę: w tym ujęciu cena płacona przez tego inwestora różni się od rynkowej o koszt transakcyjny opisany funkcją wypukłą. Autorom udaje się dowieść m.in. istnienia strategii optymalnych dla problemu maksymalizacji użyteczności na takim rynku. W tej pracy prowadzimy rozważania w tym samym modelu rynku finansowego. Udaje się nam wzmocnić zawarte w cytowanej pracy rezultaty, dowodząc jedyności strategii optymalnych oraz wykazać ich zbieżność.

Opis strategii inwestycyjnych, które powinny być wybierane przez inwestorów obecnych na niepewnych rynkach finansowych, a pragnących pomnażać swoje bogactwo w sposób optymalny, jest typowym problemem rozważanym w matematyce finansowej. Optymalność ta może dotyczyć zarówno najkorzystniejszej wyceny instrumentów finansowych, jak i maksymalizacji pewnego funkcjonu określającego preferencje inwestora. Naturalne jest również pytanie, jak zachowanie inwestora i jego optymalność zależą od tych preferencji oraz innych parametrów rynku finansowego. Pytanie to ma szczególne znaczenie przy próbie praktycznej implementacji modelu, gdyż stabilność rozwiązań odgrywa fundamentalną rolę przy obliczeniach numerycznych.

Problem stabilności strategii optymalnych i cen względem zmian preferencji badali jako pierwsi Jouini i Napp [2004], którzy rozważali model rynku zupełnego z czasem ciągłym, na którym ceny akcji opisane są przez geometryczny ruch Browna. Dowiedli oni zbieżność prawie na pewno oraz w L^p , $p \geq 1$, procesów optymalnego bogactwa i konsumpcji oraz zbieżność optymalnych strate-

gii w L^1 w ogólnym przypadku i ich prawie pewną zbieżność przy pewnych dodatkowych założeniach na proces cen i funkcje użyteczności. Larsen [2009] rozszerzył te rozważania na klasę modeli, w których ceny są ciągłymi semimartynałami, obejmując w ten sposób również rynki niezupełne. Problemem stabilności dla modeli finansowych z czasem ciągłym zajmują się również prace [Kardaras i Žitković, 2011] i [Larsen i Žitković, 2007].

W czasie dyskretnym problemem ciągłej zależności strategii od preferencji inwestorów zajmowali się Carassus i Rásonyi [2007], którzy pod pewnymi założeniami dotyczącymi regularności dowiedli zbieżności prawie na pewno strategii optymalnych na rynku, na którym inwestorzy posługują się funkcjami użyteczności określonymi na całej prostej. Dla problemu z funkcjami użyteczności ograniczonymi do półosi podobne rozważania dla rynków bez kosztów transakcyjnych i z kosztami zawierają odpowiednio prace [Kucharski, 2006, 2008].

1. Model rynku

Rozpoczniemy od omówienia najbardziej istotnych elementów modelu Çetina i Rogersa [2007], który będzie podstawą naszych dalszych rozważań. Modelem rynku finansowego jest tu przestrzeń probabilistyczna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ z dyskretną filtracją $(\mathcal{F}_t)_{t=0}^{T+1}$. Inwestorzy obecni na rynku mają możliwość inwestowania w obciążoną ryzykiem akcję oraz lokowania gotówki na pozbawionym ryzyka koncie bankowym, którego stopa procentowa jest, dla uproszczenia, równa 0. Ceny akcji opisuje ściśle dodatni, adaptowany proces $(S_t)_{t=0}^T$ o własności $S_t \in L^1$, $t = 0, \dots, T$. Pomiedzy momentami t i $t+1$ zmiana liczby akcji w portfelu z X_t do X_{t+1} powoduje zmianę ilości gotówki z Y_t do

$$Y_{t+1} = Y_t - \varphi(\Delta X_{t+1})S_t,$$

gdzie $\Delta X_{t+1} = X_{t+1} - X_t$. Zakładamy, że wielkość ΔX_{t+1} jest wyznaczana przez inwestora w chwili t , więc proces $(\Delta X_t)_{t=1}^T$ jest prognozowalny, natomiast procesy X i Y są adaptowane. O funkcji opisującej koszty płynności $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow (-\infty, \infty]$ zakładamy, że jest ściśle rosnąca i ściśle wypukła na zbiorze, na którym jest skończona, oraz spełnia warunki:

$$\inf_x \varphi'(x) = 0, \quad \sup_x \varphi'(x) = \infty, \quad \varphi(0) = 0.$$

Potrzebny nam będzie również techniczny warunek:

$$S_t \tilde{\varphi}(-x/S_t) \in L^1, \quad t = 0, \dots, T, \quad x > 0,$$

gdzie funkcja $\tilde{\varphi}(w) = \inf\{\varphi(x) + wx\}$ określona dla $w \leq 0$ (dla $w > 0$ mamy tu $\tilde{\varphi}(w) = -\infty$) jest wypukłym sprzężeniem funkcji φ .

Celem inwestora jest maksymalizacja użyteczności końcowego zasobu gotówki $\mathbb{E}U(Y_{T+1})$, przy czym w chwili T inwestor likwiduje pozycję w akcjach, tak aby w chwili $T + 1$ posiadać jedynie gotówkę. Zakładamy, że funkcja użyteczności $U: \mathbb{R} \rightarrow (-\infty, 0]$ opisująca preferencje inwestora jest niedodatnia, ściśle rosnąca, ściśle wklęsła oraz spełnia warunki Inady:

$$\sup_x U'(x) = +\infty, \quad \inf_x U'(x) = 0.$$

Ponadto zakładamy, że $U(a + bS_T) \in L^1$, dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$, oraz dla pewnego $\gamma > 0$ funkcja $x \mapsto e^{\gamma x}|U(x)|$ jest rosnąca.

2. Istnienie i jedyność strategii optymalnych

Inwestor, który w chwili t posiada kwotę y gotówki i x sztuk akcji oraz będzie odtąd stosował strategię $(\Delta X_j)_{j=t+1}^T$, zakończy inwestycje w chwili $T + 1$ z gotówką

$$Y_{T+1} = y - \sum_{j=t+1}^T \varphi(\Delta X_j) S_{j-1} - \varphi\left(-x - \sum_{j=t+1}^T \Delta X_j\right) S_T.$$

Definiujemy funkcje wartości

$$v_t(x, y) = \text{ess. sup}_{\mathcal{C}_t} \mathbb{E}[U(Y_{T+1}) | \mathcal{F}_t], \quad (1)$$

gdzie \mathcal{C}_t oznacza rodzinę tych procesów, dla których $X_t = x$, $Y_t = y$ oraz proces $(\Delta X_j)_{j=t+1}^T$ jest prognozowalny, dla $t = 0, \dots, T$. Funkcje te są niedodatnie i całkowalne dla wszystkich $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Zauważmy, że

$$v_T(x, y) = U(y - \varphi(-x)S_T).$$

Za pracą [Çetin i Rogers, 2007] przytaczamy następujące wyniki.

Lemat 2.1. Funkcje v_t są wklęsłe i rosnące ze względu na x i y prawie na pewno.

Lemat 2.2. Dla $t = 0, \dots, T$ funkcje wartości spełniają równanie Bellmana

$$v_t(x, y) = \text{ess. sup}_{\Delta x} \mathbb{E}[v_{t+1}(x + \Delta x, y - \varphi(\Delta x)S_t) | \mathcal{F}_t]. \quad (2)$$

Lemat 2.3. Dla $t = 0, \dots, T$ oraz $\eta = (\eta_1, \eta_2)$, $\eta_1 > 0$, $\eta_2 > 0$, mamy

$$\tilde{v}_t(\eta) \leq -\eta_2 S_t \tilde{\varphi}(-\eta_1 / \eta_2 S_t) + \mathbb{E}[\tilde{v}_{t+1}(\eta) | \mathcal{F}_t],$$

gdzie \tilde{v}_t są wypukłymi sprzężeniami v_t zdefiniowanymi jako

$$\tilde{v}_t(\eta) = \sup_{x,y} \{v_t(x, y) - \eta_1 x - \eta_2 y\}.$$

W szczególności, $\tilde{v}_t(\eta) \in L^1$.

Lemat 2.4. Dla dowolnych $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ istnieją prognozowalne strategie optymalne dla problemu (1).

Musimy wzmocnić nieco powyższe wyniki, ponieważ dowodząc zbieżności strategii optymalnych, potrzebujemy ich jedyności. Najpierw pokażemy, że funkcje wartości są ściśle rosnące i ściśle wklęsłe, co następnie pomoże nam w dowodzie jedyności strategii optymalnych.

Lemat 2.5. Dla $t = 0, \dots, T$, funkcje wartości v_t są prawie na pewno ściśle wklęsłe i ściśle rosnące ze względu na obie współrzędne.

Dowód. Ścisła monotoniczność jest oczywista. W dowodzie ścisłej wklęsłości skorzystamy z indukcji wstecznej. Funkcja $v_T(x, y) = U(y - \varphi(-x)S_T)$ jest ściśle wklęsła dzięki ścisłej wklęsłości i monotoniczności U oraz ścisłej wypukłości φ : dla $p \in (0, 1)$, $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ mamy:

$$\begin{aligned} &pv_T(x_1, y_1) + (1-p)v_T(x_2, y_2) = \\ &= pU(y_1 - \varphi(-x_1)S_T) + (1-p)U(y_2 - \varphi(-x_2)S_T) \\ &< U(p(y_1 - \varphi(-x_1)S_T) + (1-p)(y_2 - \varphi(-x_2)S_T)) \\ &= U((py_1 + (1-p)y_2) - (p\varphi(-x_1) + (1-p)\varphi(-x_2))S_T) \\ &< U((py_1 + (1-p)y_2) - (\varphi(-(px_1 + (1-p)x_2)))S_T)) \\ &= v_T(px_1 + (1-p)x_2, py_1 + (1-p)y_2). \end{aligned}$$

Ustalmy teraz $t = 0, \dots, T-1$, $p \in (0, 1)$, $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ oraz założmy, że zdołaliśmy już wykazać ścisłą wklęsłość v_{t+1} . Oznaczając przez $x = px_1 + (1-p)x_2$, $y = py_1 + (1-p)y_2$ oraz $\Delta x = p\Delta x^1 + (1-p)\Delta x^2$, gdzie Δx^i są prognozowalnymi zmiennymi losowymi, dla których osiągnięte jest supremum w (2) dla (x_i, y_i) , $i = 1, 2$, mamy:

$$\begin{aligned} &pv_t(x_1, y_1) + (1-p)v_t(x_2, y_2) = \\ &= p\mathbb{E}[v_{t+1}(x_1 + \Delta x^1, y_1 - \varphi(\Delta x^1)S_t)|\mathcal{F}_t] + \\ &\quad + (1-p)\mathbb{E}[v_{t+1}(x_2 + \Delta x^2, y_2 - \varphi(\Delta x^2)S_t)|\mathcal{F}_t] < \\ &< \mathbb{E}[v_{t+1}(x + \Delta x, y - (p\varphi(\Delta x^1) + (1-p)\varphi(\Delta x^2))S_t)|\mathcal{F}_t] < \\ &< \mathbb{E}[v_{t+1}(x + \Delta x, y - \varphi(\Delta x)S_t)|\mathcal{F}_t] \leq \\ &\leq \text{ess. sup}_\xi \mathbb{E}[v_{t+1}(x + \xi, y - \varphi(\xi)S_t)|\mathcal{F}_t] = v_t(x, y) \text{ p.n.} \end{aligned}$$

co oznacza ścisłą wklęsłość v_t i na mocy indukcji kończy dowód.

Lemat 2.6. Dla każdego $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ optymalna strategia dla problemu (1) jest wyznaczona jednoznacznie.

Dowód. Wystarczy pokazać jedyność optymalnej strategii Δx w równaniu (2). Przypuśćmy więc, iż dla pewnego $t = 0, \dots, T$ oraz $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mamy takie dwie strategie optymalne (Δx^i) , $i = 1, 2$, że $\mathbf{P}(\Delta x^1 \neq \Delta x^2) > 0$. Ponieważ φ jest ściśle wklęsła, dla każdego $p \in (0, 1)$ mamy:

$$\mathbf{P} \left(\varphi(\Delta x) < p\varphi(\Delta x^1) + (1-p)\varphi(\Delta x^2) \right) > 0,$$

gdzie $\Delta x = p\Delta x^1 + (1-p)\Delta x^2$. Stąd, oraz korzystając z faktu, że v_{t+1} jest ściśle rosnąca ze względu na y , otrzymujemy:

$$\begin{aligned} v_t(x, y) &= pv_t(x, y) + (1-p)v_t(x, y) = \\ &= \mathbb{E} \left[pv_{t+1}(x + \Delta x^1, y - \varphi(\Delta x^1)S_t) + \right. \\ &\quad \left. + (1-p)v_{t+1}(x + \Delta x^2, y - \varphi(\Delta x^2)S_t) | \mathcal{F}_t \right] < \\ &< \mathbb{E} \left[v_{t+1}(x + \Delta x, y - (p\varphi(\Delta x^1) + (1-p)\varphi(\Delta x^2))S_t) | \mathcal{F}_t \right] < \\ &< \mathbb{E} \left[v_{t+1}(x + \Delta x, y - \varphi(\Delta x)S_t) | \mathcal{F}_t \right] \leq v_t(x, y), \end{aligned}$$

na zbiorze o dodatnim prawdopodobieństwie. Ta sprzeczność dowodzi jedyności strategii optymalnych.

3. Zbieżność strategii optymalnych

Chcąc rozważać zbieżność strategii optymalnych, zamiast jednego inwestora będziemy rozważać ciąg inwestorów, których preferencje będą opisane funkcjami użyteczności U^k , $k \in \bar{\mathbb{N}}$, spełniającymi te same założenia, które wcześniej nałożyliśmy na U . Używamy tu jako indeksów elementów zbioru $\bar{\mathbb{N}} := \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ liczb naturalnych z dodaną nieskończonością. Stąd, dla każdego $k \in \bar{\mathbb{N}}$, poprawnie zdefiniowane są funkcje wartości v_t^k , $t = 0, \dots, T$, o opisanych w poprzedniej części własnościach, jak również istnieją wyznaczone jednoznacznie strategie optymalne maksymalizujące wyrażenie $\mathbb{E}(U^k(Y_{T+1}))$. Pytamy, jak strategie optymalne zachowują się przy zbieżnych preferencjach, a zatem zakładamy warunek:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} U^k(x) = U^\infty(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Rozpocznijmy od następującego technicznego lematu.

Lemat 3.1. Niech $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \bar{\mathbb{N}}$, będą takimi funkcjami ściśle wklęsłymi, że $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f_\infty(x)$, $x \in \mathbb{R}$ oraz $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f_\infty(x) = -\infty$ dla $n \in \bar{\mathbb{N}}$. Niech ponadto \tilde{x}_n , $n \in \bar{\mathbb{N}}$, będą takimi punktami, że

$$f_n(\tilde{x}_n) = \max_{x \in \mathbb{R}} f_n(x), \quad n \in \bar{\mathbb{N}}.$$

Wówczas istnieje taki przedział zwarty K , że $\tilde{x}_n \in K$ dla dostatecznie dużych n . Dowód. Ustalmy $\varepsilon > 0$ i niech $K = \{x \in \mathbb{R} : f_\infty(x) \geq f_\infty(\infty) - 2\varepsilon\}$. Zbiór K jest przedziałem zwartym. Niech F będzie przedziałem zwartym zawierającym K . Ponieważ ciąg f_n , jako ciąg ciągłych funkcji wklęsłych, zbiega do f niemal jednostajnie [Rockafellar i Wets, 1998; Corollary 7.18, s. 254], więc dla dostatecznie dużych n warunek $|f_n(x) - f_\infty(x)| < \varepsilon$ spełniony jest dla wszystkich $x \in F$. Stąd, dla takich n oraz $x \in F \setminus K$ mamy

$$f_n(x) < f_\infty(x) + \varepsilon < f_\infty(\infty) - \varepsilon < f_n(\infty),$$

więc $\tilde{x}_n \notin (F \setminus K)$. Biorąc pod uwagę wklęsłość, mamy także $\tilde{x}_n \notin \mathbb{R} \setminus F$, zatem $\tilde{x}_n \in K$.

W dowodzie głównego twierdzenia wykorzystamy także słynny rezultat z pracy Kabanova i Strickera [2001], mówiący o możliwości mierzalnego wyboru zbieżnego podciągu zmiennych losowych, który cytujemy poniżej. Przez $L^0(\mathbb{R}^d)$ rozumiemy zbiór wszystkich zmiennych losowych o wartościach w \mathbb{R}^d .

Lemat 3.2. [Kabanov i Stricker, 2001]. Niech $\eta_n \in L^0(\mathbb{R}^d)$ będzie takim ciągiem zmiennych losowych, że $\bar{\eta} := \liminf_n |\eta_n| < \infty$. Wówczas istnieje taki ciąg $\tilde{\eta}_k \in L^0(\mathbb{R}^d)$, że dla wszystkich ω ciąg $\tilde{\eta}_k(\omega)$ jest zbieżnym podciągiem ciągu $\eta_n(\omega)$.

Oto główny wynik pracy.

Lemat 3.3. Niech $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ oraz $(\Delta_n^k)_{t=1}^T$ oznaczają strategie optymalne dla problemu (1) z funkcjami użyteczności U^k , $k \in \bar{\mathbb{N}}$. Wówczas

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} v_t^k(x, y) &= v_t^\infty(x, y) \text{ p.n., dla } t = 0, \dots, T, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \Delta_t^k &= \Delta_t^\infty \text{ p.n., dla } t = 1, \dots, T. \end{aligned}$$

Dowód. Zaczniemy od wykazania zbieżności funkcji wartości. Posłużymy się indukcją wsteczną ze względu na $t = T, \dots, 0$. Dla $t = T$ jest oczywiste, że:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} v_T^k(x, y) &= \lim_{k \rightarrow \infty} U^k(y - \varphi(-x)S_T) = \\ &= U^\infty(y - \varphi(-x)S_T) = v_T^\infty(x, y). \end{aligned}$$

Dla uproszczenia zapisu definiujemy losowe, \mathcal{F}_t -mieralne funkcje:

$$F_{t+1}^k(z) = \mathbb{E}[v_{t+1}^k(x+z, y - \varphi(z)S_t) | \mathcal{F}_t], \quad z \in \mathbb{R}, \quad k \in \bar{\mathbb{N}}, \quad t = 0, \dots, T.$$

Zauważmy, że funkcje te posiadają ściśle wklęsłe wersje. Dla $t < T$ z jednej strony mamy:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} v_t^k(x, y) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \text{ess. sup}_{\Delta x} F_{t+1}^k(\Delta x) \geq \\ &\geq \lim_{k \rightarrow \infty} F_{t+1}^k(\Delta_{t+1}^\infty) = F_{t+1}^\infty(\Delta_{t+1}^\infty) = v_t^\infty(x, y) \text{ p.n.} \end{aligned}$$

Przeciwna nierówność będzie wymagała więcej pracy. Przypuśćmy nie wprost, że $\lim_{k \rightarrow \infty} v_t^k(x, y) > v_t^\infty(x, y)$ na zbiorze $A \in \mathcal{F}_t$ o dodatnim prawdopodobieństwie. Określmy nieujemną zmienną losową $\varepsilon := (\lim_{k \rightarrow \infty} v_t^k(x, y) - v_t^\infty(x, y))/2$, która jest dodatnia na A . Dla każdego $k \in \mathbb{N}$ definiujemy zdarzenia:

$$A_k := \{v_t^k(x, y) > v_t^\infty(x, y) + \varepsilon, F_{t+1}^\infty(\Delta^k) > F_{t+1}^k(\Delta^k) - \varepsilon/2\}.$$

Z naszego przypuszczenia oraz założenia indukcyjnego mamy $A \subseteq \bigcup_{k=1}^\infty A_k$ natomiast na zbiorach A_k , dla $k \in \mathbb{N}$ mamy:

$$v_t^\infty(x, y) \geq F_{t+1}^\infty(\Delta^k) > F_{t+1}^k(\Delta^k) - \varepsilon/2 = v_t^k(x, y) - \varepsilon/2 > v_t^\infty(x, y) + \varepsilon/2.$$

Ta sprzeczność pokazuje, że $\lim_{k \rightarrow \infty} v_t^k(x, y) \leq v_t^\infty(x, y)$ p.n., więc wraz z poprzednio wykazaną nierównością mamy $\lim_{k \rightarrow \infty} v_t^k(x, y) = v_t^\infty(x, y)$ p.n. Indukcja dowodzi zbieżności funkcji wartości dla $t = 0, \dots, T$.

Przejdziemy teraz do dowodu zbieżności strategii optymalnych. Ustalmy $t = 0, \dots, T$ oraz zauważmy, że skoro zmienne Δ_{t+1}^k maksymalizują ściśle wklęsłe funkcje F_{t+1}^k , zatem na mocy lematu 3.1. dla prawie wszystkich $\omega \in \Omega$ prawdziwy jest warunek

$$\bigvee_{r>0} \bigvee_{N \in \mathbb{N}} \bigwedge_{k>N} |\Delta_{t+1}^k(\omega)| < r.$$

Zdefiniujmy \mathcal{F}_t -mieralne zdarzenia $B_r = \bigcup_{N=1}^\infty \bigcap_{k=N}^\infty \{|\Delta_{t+1}^k| < r\}$ dla $r \in \mathbb{N}$. Zauważmy, że $\mathbf{P}(\bigcup_{r=1}^\infty B_r) = 1$ oraz $B_r \subseteq B_{r+1}$, $r \in \mathbb{N}$.

Pokażemy, że z dowolnego podciągu ciągu Δ_{t+1}^k można wybrać podciąg zbieżny do Δ_{t+1}^∞ . Niech ξ^k będzie dowolnym podciągami Δ_{t+1}^k . Na zbiorze B_1 mamy $|\xi^k| < 1$ dla dostatecznie dużych k , więc z lematu 3.2. możemy wybrać taki losowy podciąg $(k_l : l \in \mathbb{N})$, że ciąg $\xi_1^l = \xi^{k_l}$ jest zbieżny na B_1 do pewnej zmiennej losowej $\tilde{\xi}$. Z pierwszej części twierdzenia, tego, że strategia ξ_1^l jest optymalna dla inwestora k_l oraz z niemal jednostajnej zbieżności otrzymujemy:

$$v_t^\infty(x, y) \mathbb{1}_{B_1} = \lim_{l \rightarrow \infty} v_t^{k_l}(x, y) \mathbb{1}_{B_1} = \lim_{l \rightarrow \infty} F_{t+1}^{k_l}(\xi_1^l) \mathbb{1}_{B_1} = F_{t+1}^\infty(\tilde{\xi}) \mathbb{1}_{B_1}.$$

Ponieważ strategia optymalna jest wyznaczona jednoznacznie, oznacza to, że $\tilde{\xi} \mathbb{1}_{B_1} = \Delta_{t+1}^\infty \mathbb{1}_{B_1}$. Powtarzając powyższe rozumowanie, możemy kolejno z ciągu ξ_1^l wybrać podciąg ξ_2^l zbieżny do Δ_{t+1}^∞ na B_2 , z niego podciąg ξ_3^l zbieżny do Δ_{t+1}^∞ na B_3 itd. Jako rezultat otrzymamy pewien podciąg ξ_∞^l zbież-

ny prawie na pewno do Δ_{t+1}^∞ na zbiorze $\bigcup_{r=1}^\infty B_r$ pełnej miary. Skoro z dowolnego podciągu ciągu Δ_{t+1}^k możemy wybrać podciąg zbieżny prawie na pewno do Δ_{t+1}^∞ , oznacza to, że:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta_{t+1}^k = \Delta_{t+1}^\infty \text{ p.n.}$$

i kończy dowód twierdzenia.

4. Wyniki numeryczne

W tej części zilustrujemy powyższe rozważania rezultatami obliczeń numerycznych. W dalszym ciągu, wzorując się na pracy [Çetin i Rogers, 2007], rozważamy trzyokresowy ($T = 2$) model dwumianowy. Zakładamy, że $S_0 = 1$ oraz cena akcji S_n w chwilach $n = 1, 2, 3$ może wzrosnąć do uS_{n-1} z prawdopodobieństwem (statystycznym) p lub spaść do dS_{n-1} z prawdopodobieństwem $1 - p$. Zakładamy, że rachunek pieniężny rośnie w każdym okresie o czynnik r . Przyjmujemy parametry $p = 0.3$, $u = \exp(0.1)$, $d = 1/u$, $r = 1.05$. Zaważmy, że $d < r < u$, a więc model nie dopuszcza arbitrażu nawet przy braku kosztów transakcyjnych. Przyjmujemy funkcję kosztów transakcyjnych postaci:

$$\varphi(x) = \frac{e^{\alpha x} - 1}{\alpha},$$

gdzie $\alpha > 0$ jest parametrem, a im większa jego wartość, tym wyższe są koszty. Przypadek graniczny $\alpha = 0$ odpowiada rynkowi bez kosztów transakcyjnych ($\varphi(x) = x$). Rozpoczynamy nasze rozważania od jednoparametrowej rodziny funkcji użyteczności typu CARA (*constant absolute risk aversion* – stała bezwzględna awersja do ryzyka) [Föllmer i Schied, 2004], gdzie $\gamma > 0$ wyznacza wartość bezwzględnej awersji do ryzyka:

$$U(x) = -\exp(-\gamma x).$$

W tabelach 1 i 2 przedstawiono wartości optymalnej ilości akcji w portfelu inwestora chcącego zabezpieczyć w sposób optymalny krótką pozycję w europejskiej opcji sprzedaży (*put*) z ceną wykonania $K = 1$ i terminem wykonania $T = 3$. Zwracamy uwagę, iż wartości te różnią się od tych podanych w pracy [Çetin i Rogers, 2007]. Zawarte tam wartości są niepoprawne, o czym świadczą choćby różne wartości w kolumnach du oraz ud dla $\alpha = 0$, podczas gdy na rynku bez kosztów transakcyjnych zabezpieczenie opcji nie powinno zależeć od trajektorii cen.

Tabela 1. Optymalne zabezpieczenie dla $\gamma = 5$

α	$t=0$	u	d	uu	ud	du	dd
0,05	-0,200	-0,186	-0,415	-0,095	-0,239	-0,319	-0,450
$5 \cdot 10^{-5}$	-0,337	-0,216	-0,725	-0,098	-0,594	-0,594	-1,144
0	-0,337	-0,216	-0,726	-0,098	-0,595	-0,595	-1,146

Tabela 2. Optymalne zabezpieczenie dla $\gamma = 1$

α	$t=0$	u	d	uu	ud	du	dd
0,05	-0,160	-0,190	-0,258	-0,129	-0,167	-0,198	-0,228
$5 \cdot 10^{-5}$	-0,768	-0,630	-1,228	-0,489	-1,065	-1,069	-1,715
0	-0,772	-0,629	-1,231	-0,491	-1,075	-1,075	-1,732

Użyteczność typu CARA zastąpimy teraz nieco bardziej skomplikowaną funkcją użyteczności postaci:

$$U(x) = \beta \cdot (-e^{-\gamma x}) + (1 - \beta) \cdot (x - \sqrt{x^2 + \rho^2})$$

dla $\gamma, \rho > 0, \beta \in (0, 1]$. Jest to kombinacja wypukła funkcji typu CARA z inną, niedodatnią funkcją użyteczności. Mając do dyspozycji trzy parametry, możemy modelować dużo szerszy wachlarz zachowań inwestora, przy czym dla $\beta = 1$ otrzymujemy model ze stałą awersją do ryzyka. Tabele 3 i 4 przedstawiają liczbę akcji w optymalnym portfelu zabezpieczającym krótką pozycję w europejskiej opcji sprzedaży z ceną wykonania $K = 1$ i terminem wykonania $T = 3$ dla nowej funkcji użyteczności, na rynku z kosztami transakcyjnymi określonymi przez $\alpha = 0.05$.

Tabela 3. Optymalne zabezpieczenie dla $\gamma = 5, \rho = 0.005$

β	$t=0$	u	d	uu	ud	du	dd
0,1	-0,165	-0,163	-0,295	-0,111	-0,174	-0,224	-0,280
0,5	-0,194	-0,184	-0,386	-0,102	-0,222	-0,297	-0,410
0,9	-0,200	-0,186	-0,411	-0,096	-0,237	-0,316	-0,445
0,99	-0,200	-0,186	-0,414	-0,095	-0,239	-0,318	-0,450
1	-0,200	-0,186	-0,415	-0,095	-0,239	-0,319	-0,450

Tabela 4. Optymalne zabezpieczenie dla $\gamma = 1, \rho = 5$

β	$t=0$	u	d	uu	ud	du	dd
0,1	-0,147	-0,189	-0,210	-0,138	-0,149	-0,159	-0,168
0,5	-0,153	-0,190	-0,233	-0,134	-0,158	-0,178	-0,197
0,9	-0,158	-0,190	-0,253	-0,130	-0,165	-0,195	-0,222
0,99	-0,159	-0,190	-0,258	-0,130	-0,167	-0,198	-0,228
1	-0,160	-0,190	-0,258	-0,129	-0,167	-0,199	-0,228

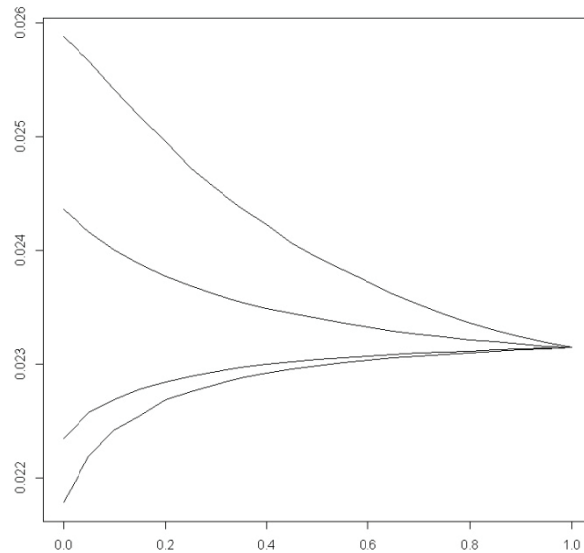
Niech C oznacza wypłatę losową związaną z wycenianym instrumentem finansowym. Definiując:

$$v^C(x, y) = \text{ess. sup } \mathbb{E}[(U(Y_{N+1} - C))],$$

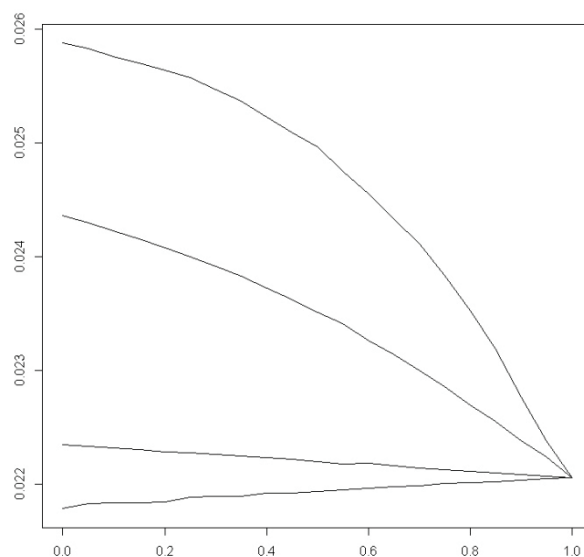
za cenę instrumentu finansowego C (*utility indifference price*) przyjmujemy liczbę rzeczywistą $p(x, y)$, która spełnia warunek:

$$v^C(x, y + p) = v(x, y).$$

Rys. 1 i 2 przedstawiają wykresy cen $p(0, 0)$ europejskiej opcji sprzedaży w funkcji parametru β , przy $K = 1$, $\alpha = 0.05$ oraz odpowiednio $\gamma = 5$ i $\gamma = 1$. Kolejne krzywe odpowiadają $\rho = 0.005, 0.05, 0.5, 5$, przy czym wyższa wartość ρ , odpowiadająca mniejszej awersji do ryzyka, odpowiada niższej cenie opcji. Zauważmy, że w przypadku granicznym $\beta = 0$ otrzymana funkcja nie spełnia wymaganych przez nas warunków Inady, jednakże przy przyjętych parametrach rynku nawet wówczas zachowanie cen opcji pozostaje regularne.



Rys. 1. Cena opcji put jako funkcja parametru β : $\gamma = 5$



Rys. 2. Cena opcji put jako funkcja parametru β : $\gamma = 1$

Podsumowanie

Wykorzystanie wypukłej funkcji kosztów transakcyjnych, zaproponowane przez Çetina i Rogersa [2007], jest interesującym i efektywnym sposobem modelowania efektów związanych z ograniczeniami płynności. Głównym wynikiem niniejszej pracy jest twierdzenie 3.3 pokazujące, że w modelu tym strategie optymalne zmieniają się w sposób ciągły wraz z preferencjami inwestorów. Wynik ten uzasadnia możliwość stosowania technik aproksymacji numerycznej w wyznaczaniu strategii optymalnych oraz wycenie instrumentów finansowych opartej na funkcji użyteczności.

Literatura

- Carassus L., Rásonyi M. (2007), *Optimal strategies and utility-based prices converge when agents' preferences do*, „Mathematics of Operations Research”, Vol. 32 (1).
- Çetin U., Rogers L.C.G. (2007), *Modeling liquidity effects in discrete time*, „Mathematical Finance”, Vol. 17 (1).
- Föllmer H., Schied A. (2004), *Stochastic Finance. An Introduction in Discrete Time, 2nd edition*, „De Gruyter Studies in Mathematics”, No. 27, Walter de Gruyter & Co., Berlin.
- Jouini E., Napp C. (2004), *Convergence of utility functions and convergence of optimal strategies*, „Finance and Stochastics”, Vol. 8 (1).

-
- Kabanov Y., Stricker C. (2001), *A teachers' note on no-arbitrage criteria*, [w:] Séminaire de Probabilités, XXXV, „Lecture Notes in Math”, Vol. 1755, Springer, Berlin.
- Kardaras C., Žitković G. (2011), *Stability of the utility maximization problem with random endowment in incomplete markets*, „Mathematical Finance”, Vol. 21 (2).
- Kucharski R. (2006), *Convergence of optimal strategies in a discrete time market with finite horizon*, „Applicationes Mathematicae”, Vol. 33 (1).
- Kucharski R. (2008), *Convergence of optimal strategies under proportional transaction costs* [w:] Ł. Stettner (ed.), *Advances in mathematics of finance*, No. 83 in Banach Center Publications, Polish Academy of Sciences, Institute of Mathematics, Warsaw.
- Larsen K. (2009), *Continuity of utility-maximization with respect to preferences*, „Mathematical Finance”, Vol. 19 (2).
- Larsen K., Žitković G. (2007), *Stability of utility-maximization in incomplete markets*, „Stochastic Processes and their Applications”, Vol. 117 (11).
- Rockafellar R.T., Wets, R.J.-B. (1998), *Variational analysis*, Vol. 317 of „Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften” [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], Springer-Verlag, Berlin.
- Rogers L.C.G., Singh S. (2004), *Modelling liquidity and its effects on price*, Technical Report, Cambridge University.

CONVERGENCE OF OPTIMAL STRATEGIES ON FINANCIAL MARKETS WITH LIQUIDITY CONSTRAINTS

Summary: In this paper we consider the model of financial market described by Çetin and Rogers [2007], where strictly convex transaction costs are used to model the effects of liquidity constraints. We were able to improve results of that paper, proving uniqueness of optimal strategies and their continuity with respect to investors' preferences.

Keywords: transaction costs, optimal strategies, liquidity, pricing.