

AGNIESZKA KIEDROWSKA

STRUKTURA TERMINOWA STÓP PROCENTOWYCH W POLSCE – ESTYMACJA I IDENTYFIKACJA KSZTAŁTUJĄCYCH JĄ CZYNNIKÓW

1. WSTĘP

Efektywne zarządzanie portfelami dłużnych papierów wartościowych, pozwalające na osiągnięcie założonej przez inwestora rentowności przy akceptowalnym poziomie ryzyka, wymaga znajomości struktury terminowej stóp procentowych opisującej zależność stóp procentowych od terminu do wykupu. Umożliwia ona prawidłową wycenę instrumentów dłużnych, a co za tym idzie, wskazanie instrumentów przeszacowanych i niedoszacowanych.

Narodowy Bank Polski na potrzeby prowadzonej polityki pieniężnej przeprowadza estymację struktury terminowej stóp procentowych odzwierciedlającej oczekiwania inflacyjne. W odróżnieniu od niektórych banków centralnych, nie publikuje on jednak swoich oszacowań, mimo tego że ich znajomością może być zainteresowanych wiele innych podmiotów rynku finansowego (banki komercyjne, fundusze inwestycyjne, towarzystwa ubezpieczeniowe itd.). W rezultacie podmioty te zmuszone są do prowadzenia własnych estymacji struktury terminowej stóp procentowych.

Zagadnienia struktury terminowej oraz jej estymacji są szeroko opisywane w literaturze zagranicznej, jednakże polskie opracowania są tutaj stosunkowo nieliczne.

Celem niniejszego artykułu jest oszacowanie struktury terminowej stóp procentowych w Polsce oraz zidentyfikowanie jej determinantów, co jest niezbędne w skutecznym zarządzaniu ryzykiem stóp procentowych.

2. STRUKTURA TERMINOWA STÓP PROCENTOWYCH

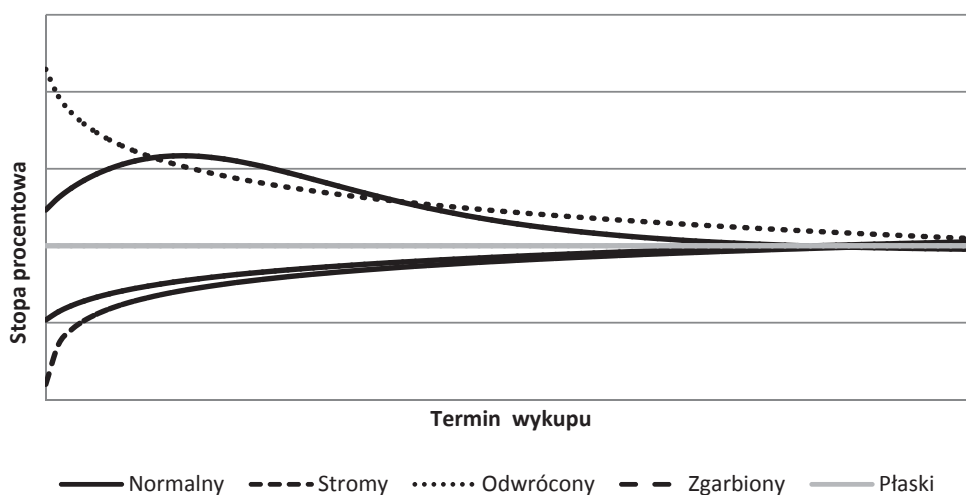
Zróżnicowane czasy trwania inwestycji implikują różne poziomy stóp procentowych zobrazowane określoną strukturą terminową stóp procentowych (ang. *term structure of interest rates*). W zależności od rodzaju stopy, dla której określana jest struktura terminowa, wyróżnia się różne jej rodzaje. Podstawowym rodzajem struktury stóp procentowych jest, wyznaczana na podstawie stóp zerokuponowych, struktura terminowa stóp *spot*. Innym rodzajem struktury stóp procentowych jest, otrzymywana na podstawie stóp *forward*¹, struktura stóp *forward*. Z tej racji, że stopy *forward*

¹ Szerzej o rodzajach struktury terminowej pisze m.in. Jajuga (2005).

otrzymywane są na podstawie stóp *spot*, staje się możliwe określenie struktury stóp *forward* na podstawie struktury stóp *spot*.

2.1. KSZTAŁTY KRZYWEJ DOCHODOWOŚCI

Graficzną reprezentacją struktury terminowej jest krzywa dochodowości. W zależności od danej sytuacji gospodarczej może ona przyjmować różne kształty. Najczęściej spotykanymi kształtami są: normalny, odwrócony, zgarbiony i płaski. Niekiedy wyróżnia się również kształt stromy (por. Nawalkha, Soto, Beliaeva, 2005; Świętoń, 2002; Jajuga, Jajuga, 2007; Fabozzi, Modigliani, Ferri, 1998). Typowe kształty krzywej dochodowości przedstawia rysunek 1.



Rysunek 1. Podstawowe kształty krzywej dochodowości

Źródło: opracowanie własne.

Najczęściej spotykanym kształtem krzywej dochodowości jest kształt normalny (ang. *normal yield curve*). Charakteryzuje się on rosnącymi stopami procentowymi wraz z wydłużeniem terminu wykupu. Kształt taki jest wskaźnikiem, że gospodarka rozwija się prawidłowo (por. Nawalkha, Soto, Beliaeva, 2005).

Odwrócony kształt krzywej dochodowości (ang. *inverted yield curve*) występuje najczęściej w fazie rozkwitu, a więc wtedy, gdy stopy procentowe utrzymują się na znacznym poziomie. Po fazie tej może nastąpić recesja, a zatem stopy procentowe o dłuższym okresie do wykupu są niższe od stóp krótkookresowych (Nawalkha, Soto, Beliaeva, 2005).

Zgarbiony kształt krzywej dochodowości (ang. *humped yield curve*) występuje, gdy spodziewana jest krótkotrwała poprawa sytuacji gospodarczej, a po niej kolejna

recesja. W sytuacji odwrotnej krzywa dochodowości przyjmuje odwrócony kształt łukowaty (ang. *inverted humped yield curve*) (por. Nawalkha, Soto, Beliaeva, 2005; Dziwok, 2008).

W przypadku, gdy stopa procentowa nie zależy od terminu do wykupu (jest stała) krzywa dochodowości jest płaska (ang. *flat yield curve*). Jest to najprostsza w analizie struktura terminowa. Świętoń (2002) zwraca jednak uwagę na fakt, że idealny kształt płaski jest kształtem czysto teoretycznym, gdyż nie zaobserwowano jego występowania w praktyce.

Kształt stromy krzywej dochodowości (ang. *steep yield curve*), traktowany czasem jako odmiana kształtu normalnego, występuje najczęściej w gospodarkach będących w fazie wychodzenia z kryzysu, kiedy to spodziewana jest poprawa sytuacji gospodarczej, a co za tym idzie, stopy procentowe o dłuższym terminie do wykupu stają się dostrzegalnie wyższe od stóp krótkookresowych.

2.2. MODELOWANIE KRZYWEJ DOCHODOWOŚCI

Jak wcześniej zasygnalizowano, na podstawie stóp *spot* można wyznaczyć inne rodzaje stóp procentowych. Stąd też zaleca się, aby określać strukturę terminową właśnie na podstawie stóp *spot* (Fabozzi, 2000). Stopy te można wyznaczyć na podstawie cen i parametrów obligacji zerokuponowych, jednak z powodu zazwyczaj niewielkiej liczby tych obligacji na rynku nie jest możliwe zbudowanie na ich podstawie ciągłej struktury terminowej stóp procentowych. Sprawia to, iż zachodzi konieczność jej estymacji na podstawie powszechnie występujących odsetkowych dłużnych papierów wartościowych.

Modele struktury terminowej można podzielić na dwie klasy, a mianowicie: modele aproksymacji krzywej dochodowości oraz modele dynamiki stóp procentowych. Modele aproksymacji krzywej dochodowości mają na celu wyjaśnianie obecnej struktury terminowej stóp procentowych. Do najpopularniejszych modeli tej klasy należą modele regresyjne, krzywych sklejanyań (por. McCulloch, 1971; McCulloch, 1975) oraz modele oszczędne takie jak model Nelsona-Sieglę (1987) czy też model Svenssona (1994). Natomiast modele dynamiki stóp procentowych mają na celu wyjaśnienie zmian struktury terminowej stóp procentowych. Do tej klasy modeli zalicza się między innymi modele klasy ARIMA-GARCH, modele drzew dwumianowych oraz modele stochastycznych równań różniczkowych².

2.3. METODA KRZYWYCH SKLEJANYCH TRZECIEGO STOPNIA

W ramach przeprowadzonego badania dokonano estymacji struktury terminowej korzystając z metody krzywych sklejanyań trzeciego stopnia. Wybór tej metody

² Szerzej o modelach tej klasy pisze Jajuga (2005).

podyktowany był chęcią uzyskania możliwie dobrego dopasowania krzywej do danych empirycznych, które umożliwiłoby przeprowadzenie analizy głównych składowych struktury terminowej.

Przed omówieniem metody krzywych sklejanym niezbędne jest zaprezentowanie sposobu wyceny obligacji. Wartość obligacji określana jest jako suma zdyskontowanych przepływów pieniężnych przysługujących posiadaczowi obligacji do terminu jej wykupu. Przepływy pieniężne związane są z otrzymywaniem kuponów, a ostatni z przepływów zawiera ponadto wartość nominalną obligacji. Zależność tę, przy założeniu kapitalizacji ciągłej, przedstawia poniższy wzór (por. Jajuga, Jajuga, 2007; Nawalkha, Soto, Beliaeva, 2005):

$$P = \sum_{t=1}^n CF_t e^{-y(t)t}, \quad (1)$$

gdzie:

P – wartość obligacji,

CF_t – przepływ pieniężny w chwili t ,

n – liczba przepływów pieniężnych otrzymywanych przez posiadacza obligacji,

$y(t)$ – ciągła stopa procentowa.

Ponieważ obligacje notowane są na rynku, to znana jest ich wartość rynkowa. Ponadto, dla obligacji o stałym oprocentowaniu znane są przepływy pieniężne przysługujące jej posiadaczowi. Na podstawie tych danych wyznaczane są stopy procentowe $y(t)$.

Wyrażenie $e^{-y(t)t}$ ze wzoru (1) określane jest mianem funkcji dyskontowej $d(t)$:

$$d(t) = e^{-y(t)t}. \quad (2)$$

Aby zaprezentować ideę metody krzywych sklejanym rozważmy zbiór K obligacji o terminach do wykupu wynoszących odpowiednio t_1, t_2, \dots, t_K lat. Na rynku występuje zdecydowanie więcej obligacji o krótkich terminach zapadalności niż o długich. W tej sytuacji, aby uzyskać jak najlepsze dopasowanie krzywej dochodowości do danych rynkowych, warto jest podzielić przedział czasowy, dla którego szacuje się strukturę terminową, w taki sposób, aby liczba obligacji w każdym z podprzedziałów była do siebie zbliżona. Powstające miejsca podziału nazywane są punktami węzłowymi.

W celu uzyskania jak najlepszego dopasowania krzywej dochodowości do rzeczywistych danych, funkcja dyskontowa opisywana jest jako kombinacja liniowa s ciągłych i różniczkowalnych funkcji $g_i(t)$ (por. Nawalkha, Soto, Beliaeva, 2005). Aby ją otrzymać przedział czasowy dzieli się na $s - 2$ przedziały rozdzielone $s - 1$ punktami węzłowymi T_1, T_2, \dots, T_{s-1} , gdzie $T_1 = 0$ i $T_{s-1} = t_k$. Funkcja dyskontowa dana jest zatem wzorem:

$$d(t) = 1 + \sum_{i=1}^s \alpha_i g_i(t). \quad (3)$$

Ponieważ czynnik dyskontowy dla chwili 0 wynosi 1, funkcje $g_i(t)$ muszą spełniać warunek:

$$g_i(0) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s). \quad (4)$$

Zarówno postać funkcji $g_i(t)$, jak i wartość s mają kluczowe znaczenie dla jakości oszacowania funkcji dyskontowej.

W modelu krzywych sklejanych trzeciego stopnia McCulloch (1975) przyjął następującą postać rodziny funkcji $g_1(t)$, $g_2(t)$, ..., $g_s(t)$:

Jeżeli $i < s$:

$$g_i(t) = \begin{cases} 0 & t < T_{i-1}, \\ \frac{(t - T_{i-1})^3}{6(T_i - T_{i-1})} & T_{i-1} \leq t < T_i, \\ \frac{(T_i - T_{i-1})^2}{6} + \frac{(T_i - T_{i-1})(t - T_i)}{2} + \frac{(t - T_i)^2}{2} - \frac{(t - T_i)^3}{6(T_{i+1} - T_i)} & T_i \leq t < T_{i+1}, \\ (T_{i+1} - T_{i-1}) \left(\frac{2T_{i+1} - T_i - T_{i-1}}{6} + \frac{t - T_{i+1}}{2} \right) & t \geq T_{i+1}. \end{cases} \quad (5)$$

Jeżeli $i = s$, to

$$g_i(t) = t.$$

Zastosowanie powyższej rodziny funkcji zapewnia ciągłość i gładkość krzywej nie tylko w poszczególnych przedziałach, ale również w punktach węzłowych. Jest to zagwarantowane tym, że funkcje zdefiniowane na sąsiednich przedziałach (T_{i-1}, T_i) oraz (T_i, T_{i+1}) mają równe wartości, a także równe pierwsze i drugie pochodne w punkcie T_i .

Na podstawie równań (1)-(3) otrzymujemy:

$$P(t_m) - \sum_{j=1}^m CF_j = \sum_{i=1}^s \alpha_i \sum_{j=1}^m CF_j g_i(t_j). \quad (6)$$

Estymacja funkcji dyskontowej (6) sprowadza się do oszacowania nieznanymi parametrów $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ dążąc do minimalizacji sumy kwadratów odchyłeń danych modelowych od danych empirycznych. Następnie strukturę terminową stóp *spot* wyznacza się w oparciu o odpowiednio przekształcone równanie (2).

Na jakość dopasowania wpływa również liczba zastosowanych przedziałów. McCulloch (1975) proponuje, aby liczba segmentów (s) była równa liczbie całkowitej najbliższej pierwiastkowi z liczby obserwacji. Ponadto, sugeruje, że liczba instrumen-

tów wykorzystywanych w poszczególnych przedziałach powinna być jak najbardziej do siebie zbliżona. W ten sposób możliwe jest lepsze dopasowanie struktury terminowej na krótkim odcinku krzywej, a więc na obszarze z wyższą koncentracją danych.

McCulloch (1975) zaleca następujący sposób wyznaczania punktów węzłowych:

$$T_i = \begin{cases} 0 & i = 1, \\ t_h + \theta(t_{h+1} - t_h) & 2 \leq i \leq s - 2, \\ t_K & i = s - 1, \end{cases} \quad (7)$$

gdzie h jest wyznaczone jako:

$$h = \left\lceil \frac{(i-1)K}{s-2} \right\rceil, \quad (8)$$

natomiast parametr θ obliczany jest ze wzoru:

$$\theta = \frac{(i-1)K}{s-2} - h. \quad (9)$$

Tak dobrana liczba segmentów i przypadających na nie danych sprawia, że zarówno liczba s , jak również stosunek K/s rosną wraz ze wzrostem liczby obligacji. Zapewnia to tym większą dokładność modelu, im większą liczbą danych dysponujemy.

3. METODA GŁÓWNYCH SKŁADOWYCH

W zarządzaniu ryzykiem stopy procentowej coraz większą popularność zdobywa analiza głównych składowych³ przedstawiona przez Hotellinga (1933). Polega ona na ortogonalnym przekształceniu zbioru obserwacji wielowymiarowych na zbiór nieskorelowanych zmiennych, nazywanych głównymi składowymi i będących kombinacjami liniowymi wyjściowych obserwacji. Jeżeli obserwowane zmienne są silnie skorelowane, wówczas zbiór p zmiennych można przekształcić na wyraźnie mniejszy zbiór k głównych składowych, który zawiera znaczącą większość informacji niesionej przez zbiór początkowych zmiennych.

Założmy, że $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_p]^T$ jest wektorem skorelowanych zmiennych obserwowalnych o zerowej średniej, a więc $E[\mathbf{X}] = \mathbf{0}$. Wykorzystując metodę głównych składowych można wyznaczyć wektor nieskorelowanych zmiennych $\mathbf{Y} = [Y_1, Y_2, \dots, Y_p]^T$ będący liniową transformacją wektora \mathbf{X} opisaną równaniem (por. Ostasiewicz, 1999)

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}^T \mathbf{X}, \quad (10)$$

³ Rosnące zainteresowanie analizą głównych składowych potwierdzają m.in. prace: Barber, Cooper (1996), Bliss (1997), Falkenstein, Hanweck (1997), Singh (1997), Wadhwa (1999), Golub, Tilman (2000).

gdzie A jest macierzą przekształcenia ortogonalnego, a więc spełniającą warunek następującej postaci:

$$A^T A = I. \quad (11)$$

Przekształcenia dokonuje się tak, aby suma wariancji wszystkich głównych składowych była równa całkowitej wariancji wszystkich początkowych zmiennych oraz aby wariancje kolejnych składowych były coraz mniejsze. Zmienne Y_i muszą zatem spełniać następujące warunki:

$$\text{var}(Y_1) > \text{var}(Y_2) > \dots > \text{var}(Y_p) \quad (12)$$

oraz

$$\sum_{i=1}^p \text{var}(Y_i) = \sum_{i=1}^p \text{var}(X_i). \quad (13)$$

Aby znaleźć macierz A , w pierwszym kroku wyznacza się taki wektor $[a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1p}]$, będący wierszem macierzy A , który maksymalizuje wariancję pierwszej składowej Y_1 . Następnie wyznacza się wektor $[a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2p}]$, w taki sposób, by wariancja Y_2 była maksymalna przy spełnionym warunku, że Y_1 i Y_2 są nieskorelowane. Pozostałe wektory wierszowe macierzy wyznacza się w analogiczny sposób.

Oznaczmy przez \mathbf{a}_i i -tą kolumnę poszukiwanej macierzy A . Wówczas i -tym wierszem macierzy A^T będzie \mathbf{a}_i^T . Zatem równanie (10) można przedstawić następująco:

$$Y_i = \mathbf{a}_i^T \mathbf{X} \quad (i = 1, \dots, p). \quad (14)$$

Korzystając z własności wariancji, wariancję wyrażenia $\mathbf{a}_i^T \mathbf{X}$ można wyznaczyć jako:

$$\text{var}(\mathbf{a}_i^T \mathbf{X}) = \text{var}\left(\sum_{j=1}^p a_{ij} X_j\right) = \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^p a_{ij} a_{ik} \text{cov}(X_i, X_j) = \mathbf{a}_i^T \mathbf{C} \mathbf{a}_i, \quad (15)$$

gdzie \mathbf{C} jest macierzą wariancji-kowariancji zmiennych X_i .

Wariancję zmiennej Y_i oznaczmy przez λ_i . Korzystając z równań (14) oraz (15) otrzymujemy:

$$\text{var}(Y_i) = \lambda_i = \mathbf{a}_i^T \mathbf{C} \mathbf{a}_i. \quad (16)$$

Zakłada się, że główne składowe mają być nieskorelowane, zatem:

$$\text{cov}(Y_i, Y_j) = \mathbf{a}_i^T \mathbf{C} \mathbf{a}_j = 0 \quad \text{dla } i \neq j. \quad (17)$$

Oznaczmy przez $\mathbf{\Lambda}$ macierz wariancji-kowariancji zmiennych Y_i . Z równań (16) i (17) wynika, że ma ona następującą postać:

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{A} \quad (18)$$

oraz że jest macierzą diagonalną o elementach na głównej przekątnej $\lambda_1, \dots, \lambda_p$. Macierz symetryczna dodatnio określona ma wszystkie wartości własne dodatnie, więc $\text{var}(Y_i) \geq 0$ dla $i = 1, \dots, p$.

Ponieważ macierz $\mathbf{\Lambda}$ jest macierzą diagonalną, to elementy $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ są jednocześnie jej wartościami własnymi. Równanie (18) można utożsamiać z przekształceniem prowadzącym macierz \mathbf{C} do postaci diagonalnej, a wówczas elementy $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ są również wartościami własnymi macierzy \mathbf{C} .

Elementy diagonalne macierzy $\mathbf{\Lambda}$ można uporządkować malejąco, a więc

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_p. \quad (19)$$

Ponieważ prawdziwe jest twierdzenie mówiące, że jeżeli wektory własne macierzy symetrycznej odpowiadające różnym wartościom własnym są ortogonalne, to wektory własne macierzy \mathbf{C} odpowiadające różnym wartościom własnym są ortogonalne. Poszukiwaną ortogonalną macierz \mathbf{A} tworzą unormowane wektory własne odpowiadające kolejnym malejącym wartościom własnym.

Niech \mathbf{U}_i oznacza wektor własny odpowiadający wartości własnej λ_i . Wektory \mathbf{a}_i oblicza się wówczas w następujący sposób:

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{U}_i \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \quad \text{dla } i = 1, \dots, p. \quad (20)$$

Unormowane wektory własne, \mathbf{a}_i , są nazywane ładunkami czynników, a interpretuje się je jako współczynniki korelacji pomiędzy zmiennymi a czynnikami. Ponieważ $\text{var}(Y_i) = \lambda_i$, więc udział wariancji i -tej głównej składowej w całkowitej wariancji zmiennych obserwowalnych wynosi:

$$\frac{\lambda_i}{\sum_{j=1}^p \lambda_j}. \quad (21)$$

W ogólności można wyznaczyć p głównych składowych. Należy jednak pamiętać, że celem analizy głównych składowych jest redukcja liczby zmiennych. Z tego względu wyznacza się jedynie kilka składowych, których udział w wyjaśnianiu zmienności zmiennych obserwowalnych jest największy. Wybór liczby składowych uzależniony jest od celu, w którym dokonuje się analizy.

Powyższe rozważania są oparte na wykorzystaniu macierzy kowariancji \mathbf{C} . Często jednak zdarza się, że obserwowalne zmienne wyrażone są w różnych jednostkach lub ich wariancje zdecydowanie się od siebie różnią. Zastosowanie w takim przypadku

macierzy kowariancji skutkuje tym, że zmienne o wysokich wariancjach uzyskują wyższe wartości w macierzy A , a zmienne o niskich wariancjach – niewielkie wartości. Aby wyeliminować tę niedogodność, zamiast macierzą C , można posłużyć się macierzą korelacji R , będącą zarazem macierzą kowariancji zestandaryzowanych zmiennych.

Metoda głównych składowych wykorzystywana jest między innymi w zarządzaniu ryzykiem stopy procentowej. Aby wyjaśnić zmienność zmian stóp procentowych często przyjmuje się (por. Soto, 2004), że wystarczają trzy główne składowe (związane z wysokością, nachyleniem i krzywizną krzywej dochodowości). Następnie wrażliwość wartości portfela inwestycyjnego na czynniki ryzyka mierzona jest przez wskaźniki trwałości i wypukłości głównych składowych. Inną zaletą metody głównych składowych, poza redukcją liczby zmiennych, jest uzyskiwanie ortogonalnych czynników ryzyka. Ułatwia to zdecydowanie zarządzanie ryzykiem stopy procentowej, bowiem każdy z czynników może być analizowany niezależnie od pozostałych (Nawalkha, Soto, Beliaeva, 2005). Załóżmy, że każdy ruch struktury terminowej stóp procentowych (ang. *term structure of interest rates shift – TSIR shift*) może być opisany m -wymiarowym wektorem zmian stóp *spot* (por. Nawalkha, Soto, Beliaeva, 2005; Trzpiot, 2010):

$$TSIR\ shift = (\Delta y(t_1), \Delta y(t_2), \dots, \Delta y(t_m)). \quad (22)$$

Metoda głównych składowych umożliwia analizę ruchów struktury terminowej za pomocą głównych składowych. Wektor z równania (22) przyjmuje wówczas postać:

$$TSIR\ shift = (c_1, c_2, \dots, c_m), \quad (23)$$

gdzie c_1, c_2, \dots, c_m oznaczają kolejne główne składowe, które są kombinacjami liniowymi stóp *spot*. Zatem otrzymujemy zależność postaci:

$$c_j = \sum_{i=1}^m u_{ij} \Delta y(t_i) \quad (j = 1, \dots, m), \quad (24)$$

gdzie u_{ij} są współczynnikami głównej składowej. Macierz współczynników u_{ij} jest ortogonalna, więc żeby wyznaczyć zmiany stóp procentowych równanie (24) można przekształcić do postaci:

$$\Delta y(t_i) = \sum_{j=1}^m u_{ij} c_j \quad (i = 1, \dots, m). \quad (25)$$

Zmniejszenia wymiaru przestrzeni zmiennych dokonuje się poprzez pominięcie tych głównych składowych, które w najmniejszym stopniu wyjaśniają zmiany stóp procentowych (tzn. mają najniższe wartości własne). Liczbę zmiennych redukuje

się przede wszystkim z dwóch powodów, a mianowicie w celu dążenia do prostoty i oszczędności modelu oraz minimalizacji szumów w danych.

Wyrażenie zmian stóp *spot* jako kombinacji liniowej k ($k < m$) początkowych składowych umożliwia uzyskanie, poprzez pomiar wrażliwości portfela jedynie na te składniki, profilu ryzyka stopy procentowej, na jakie narażony jest portfel.

Aby uniezależnić ruchy struktury terminowej od wariacji poszczególnych głównych składowych, model modyfikuje się tak, aby każdy czynnik miał jednostkową wariację. Cel ten osiąga się poprzez zastosowanie przekształcenia postaci:

$$\Delta y(t_i) = \sum_{j=1}^k (u_{ij} \sqrt{\lambda_j}) \frac{c_j}{\sqrt{\lambda_j}} + \varepsilon_i \quad (i = 1, \dots, m), \quad (26)$$

gdzie ε_i – zmienna losowa.

Jak już zaznaczono, w praktyce, do analizy głównych składowych struktury terminowej wykorzystywane są trzy pierwsze składowe. Każda z tych składowych ma swoją interpretację⁴.

Pierwsza główna składowa związana jest z przesunięciami równoległymi krzywej dochodowości. Z tego względu jest ona często nazywana czynnikiem wysokości lub poziomu (ang. *height/level factor*). Przesunięcie to występuje gdy wszystkie stopy procentowe zmieniają się o stałą wartość.

Druga główna składowa wyjaśnia natomiast zmiany nachylenia krzywej dochodowości, dlatego też nazywana jest czynnikiem nachylenia (ang. *slope factor*). Poziom nachylenia jest zazwyczaj wyrażony *spreadem* pomiędzy rentownością instrumentów krótko- i długoterminowych.

Trzecia główna składowa, nazywana jest czynnikiem krzywizny (ang. *curvature factor*) ponieważ jest ona związana ze zmianami krzywizny krzywej dochodowości. Przyczyną tych zmian jest przesunięcie motyla (ang. *butterfly shift*) polegające na przesunięciu stóp krótko- i długoterminowych zdecydowanie powyżej lub poniżej poziomu stóp średnioterminowych.

Wykorzystując jedynie trzy, opisane powyżej, główne składowe, równanie (26) można zapisać w uproszczonej postaci, danej następująco:

$$\Delta y(t_i) \approx l_{ih}c_h + l_{is}c_s + l_{ic}c_c, \quad (27)$$

gdzie czynniki wyrażone są jako:

$$c_h = \frac{c_1}{\sqrt{\lambda_1}}, \quad c_s = \frac{c_2}{\sqrt{\lambda_2}}, \quad c_c = \frac{c_3}{\sqrt{\lambda_3}}, \quad (28)$$

⁴ Interpretacje głównych składowych przedstawiają Nawalkha, Soto, Beliaeva (2005), Trzpiot (2010).

a ładunki czynników zdefiniowane są w następujący sposób:

$$l_{ih} = u_{1i}\sqrt{\lambda_1}, \quad l_{is} = u_{2i}\sqrt{\lambda_2}, \quad l_{ic} = u_{3i}\sqrt{\lambda_3}. \quad (29)$$

Poszczególne składowe wyznacza się zgodnie z procedurą analizy głównych składowych.

4. ANALIZA EMPIRYCZNA

Do przeprowadzenia estymacji krzywej dochodowości zostały wykorzystane ceny i parametry polskich obligacji skarbowych. Wybór ten podyktowany był przede wszystkim możliwością traktowania obligacji Skarbu Państwa jako instrumentów pozbawionych ryzyka niewypłacalności emitenta, w związku z czym różnice w cenach związane są wyłącznie ze zróżnicowaniem stóp procentowych. Instrumenty te notowane są na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie, dzięki czemu dostępna jest ich wycena rynkowa.

Ze względu na konieczność wyznaczenia wszystkich przyszłych przepływów pieniężnych przysługujących posiadaczowi obligacji, wybrane zostały wyłącznie instrumenty o oprocentowaniu stałym i zerokuponowe.

Krzywa dochodowości szacowana była na podstawie kursów zamknięcia obligacji w okresie od 1 lipca 2009 r. do 2 października 2009 r. Aby struktura terminowa w całym przedziale estymowana była na podstawie tych samych danych, do badania wybrano obligacje wyemitowane przed 1.07.2009 r. i o terminie wykupu późniejszym niż 2.10.2009 r. W celu minimalizacji ewentualnych błędów związanych z ograniczoną płynnością rynku obligacji, wykorzystano te instrumenty, dla których w analizowanym okresie wyznaczone było co najmniej 10 kursów zamknięcia. Ponadto, brane pod uwagę były tylko te obligacje, których pierwsze notowanie w przyjętym przedziale czasowym przypadło nie później niż 10.07.2009 r. Tym sposobem liczbę instrumentów wykorzystaną do badania ograniczono do 15 obligacji, których parametry zestawiono w tabeli 1.

Można zauważyć, że terminy zapadalności obligacji wybranych do estymacji są dość równomiernie rozłożone w czasie. Cecha ta jest niezmiernie ważna dla prawidłowego oszacowania krzywej dochodowości.

W badanym okresie pojawiały się dni, w które dla niektórych obligacji nie dochodziło do transakcji. W takim przypadku za cenę z tego dnia przyjęto poprzednio zarejestrowaną cenę.

Warto zwrócić uwagę na fakt, iż nie należy utożsamiać kursu zamknięcia z wartością obligacji. Po pierwsze, w celu zapewnienia porównywalności instrumentów, obligacje notowane są jako procent wartości nominalnej. Po drugie, cena uzyskana na podstawie notowań jest to tak zwana cena „czysta”⁵, a więc niezawierająca naro-

⁵ Zagadnienie ceny „czystej” i ceny „brudnej” omawiają Jajuga, Jajuga (2007).

Tabela 1.

Parametry obligacji wykorzystanych w badaniu oraz ich terminy wykupu na dzień 1.07.2009 r.

Symbol	Oprocentowanie [%]	Wartość nominalna [PLN]	Okres zapadalności	Data wykupu	Termin wykupu
OK0112	0,00	1 000,00	2 lata	2012-01-25	2,57
OK0710	0,00	1 000,00	2 lata	2010-07-25	1,07
OK0711	0,00	1 000,00	2 lata	2011-07-25	2,07
PS0310	5,75	1 000,00	5 lat	2010-03-24	0,73
PS0412	4,75	1 000,00	5 lat	2012-04-25	2,82
PS0413	5,25	1 000,00	5 lat	2013-04-25	3,82
PS0414	5,75	1 000,00	5 lat	2014-04-25	4,82
PS0511	4,75	1 000,00	5 lat	2011-05-24	1,90
SP0610	5,00	100,00	5 lat	2010-06-01	0,92
SP1210	4,50	100,00	5 lat	2010-12-01	1,42
DS1013	5,00	1 000,00	10 lat	2013-10-24	4,32
DS1015	6,25	1 000,00	10 lat	2015-10-24	6,32
DS1017	5,25	1 000,00	10 lat	2017-10-25	8,32
DS1019	5,50	1 000,00	10 lat	2019-10-25	10,32
WS0922	5,75	1 000,00	20 lat	2022-09-23	13,24

Źródło: opracowanie własne.

słych odsetek. Narosłe odsetki (ang. *accrued interest* – *AI*) wyliczane są na podstawie wzoru:

$$AI = C \left(\frac{t_0 - t_p}{t_q - t_p} \right), \quad (30)$$

gdzie: C – kupon, t_0 – chwila obecna, t_p – data poprzedniej płatności kuponu, t_q – data następnej płatności kuponu.

W przypadku obligacji Skarbu Państwa o stałym oprocentowaniu wysokość kuponu nalicza się w oparciu o konwencję *actual/actual*⁶. Oznacza to, że do obliczenia $t_0 - t_p$ oraz $t_q - t_p$ wykorzystywana jest rzeczywista liczba dni pomiędzy datami.

⁶ Innymi stosowanymi konwencjami są *actual/360*, *30/360*. Sposoby ich wykorzystania przedstawiają Nawalkha, Soto, Beliaeva (2005).

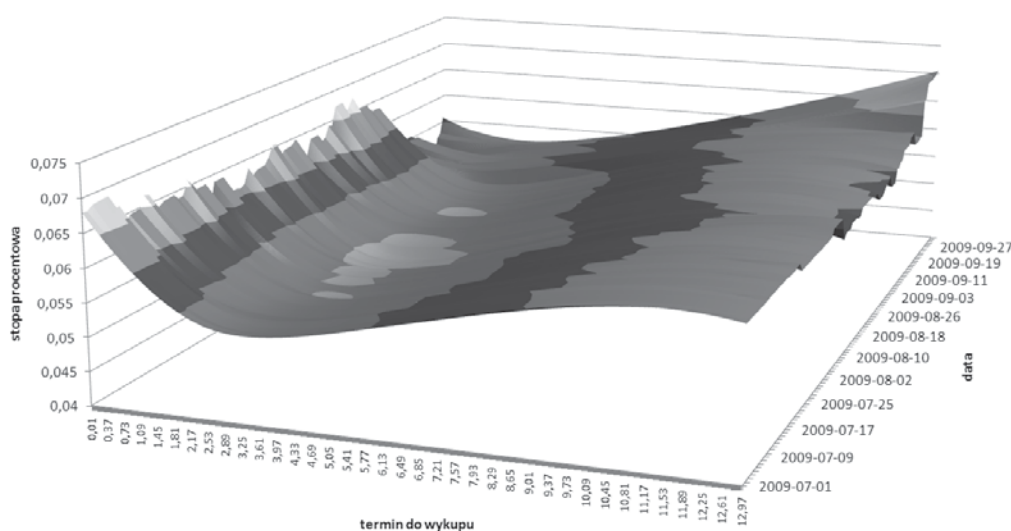
Do estymacji krzywej dochodowości wykorzystywana jest wartość obligacji wyznaczana w następujący sposób:

$$P = \text{Cena notowana} + AI. \quad (31)$$

W związku z powyższym konieczne okazało się wyznaczenie wielkości narosłych odsetek dla każdego dnia z badanego przedziału.

4.1. WYNIKI ESTYMACJI STRUKTURY TERMINOWEJ

Wyniki estymacji struktury terminowej stóp procentowych w Polsce w okresie 1.07.2009–2.10.2009 r. ilustruje graficznie rysunek 2.



Rysunek 2. Struktura terminowa stóp procentowych w okresie 1.07.2009–2.10.2009

Źródło: opracowanie własne.

Na rysunku 2 widoczny jest wyraźny podział rynku dłużnych papierów wartościowych. Można wydzielić na nim rynek instrumentów krótkoterminowych, o terminach do wykupu do ok. 3 lat, oraz rynek instrumentów długoterminowych, o terminach do wykupu powyżej 3 lat. Ponadto, krzywa przyjmuje we wrześniu nieco odmienny kształt niż w lipcu i sierpniu. W lipcu i sierpniu 2009 r. w początkowej części krzywej dochodowości, odpowiadającej instrumentom o okresie zapadalności do 3 lat, stopy procentowe gwałtownie malały. Wynika stąd, że na rynku instrumentów krótkoterminowych występował wyższy popyt na instrumenty o najkrótszym terminie do wykupu. Świadczy to zarazem o potrzebie zwiększonej płynności instytucji finansowych inwe-

stujących w obligacje. Pozostała część krzywej dochodowości ma kształt normalny. Wynika stąd, że rynek oczekiwał wzrostu stóp procentowych lub wymagał rosnącej premii za utratę płynności. Na rynku występowała stosunkowo niska płynność po stronie inwestorów długoterminowych. Niewielki spadek stóp procentowych dla terminu zapadalności powyżej 10 lat prawdopodobnie związany jest z błędami wynikającymi z ograniczonej płynności rynku i niewielkiej liczby obligacji o tak długim okresie do wykupu.

We wrześniu 2009 r. spadek stóp procentowych w początkowej części struktury terminowej nie był już tak gwałtowny, a krzywa dochodowości na obszarze odpowiadającym instrumentom długoterminowym osiągała wyższe wartości niż w miesiącach poprzednich. Przypuszczalnie, zmiany te mają związek z ogłoszonym na początku września 2009 r. planowanym deficytem budżetowym na rok 2010. Według obecnego ministra finansów, Rostowskiego (Komentarz rynkowy, 2009), deficyt budżetowy miał przekroczyć poziom 50 mld PLN. Wówczas w reakcji na tę informację inwestorzy zaczęli wyprzedawać papiery. W rezultacie stopy procentowe dla krótkich terminów zapadalności zdecydowanie spadły. Na kształt długiego odcinka krzywej dochodowości zapewne miały wpływ także ogłoszone dane makroekonomiczne, informujące o inflacji przekraczającej oczekiwania rynkowe, wysokim poziomie sprzedaży detalicznej oraz wyhamowaniu spadków produkcji przemysłowej.

4.2. WYNIKI ANALIZY GŁÓWNYCH SKŁADOWYCH STRUKTURY TERMINOWEJ

Oszacowaną strukturą terminową stóp *spot* posłużono się do przeprowadzenia analizy głównych składowych struktury terminowej stóp procentowych w Polsce. Spośród oszacowanych tu stóp w dalszej analizie pozostawiono stopy o zapadalnościach jedno- i dwutygodniowych, jedno-, trzy- i sześciomiesięcznych, roczne i dalej co rok, aż do 13-letnich. Uzyskane wartości własne poszczególnych czynników i ich udziały w wariancji przedstawione zostały w tabeli 2.

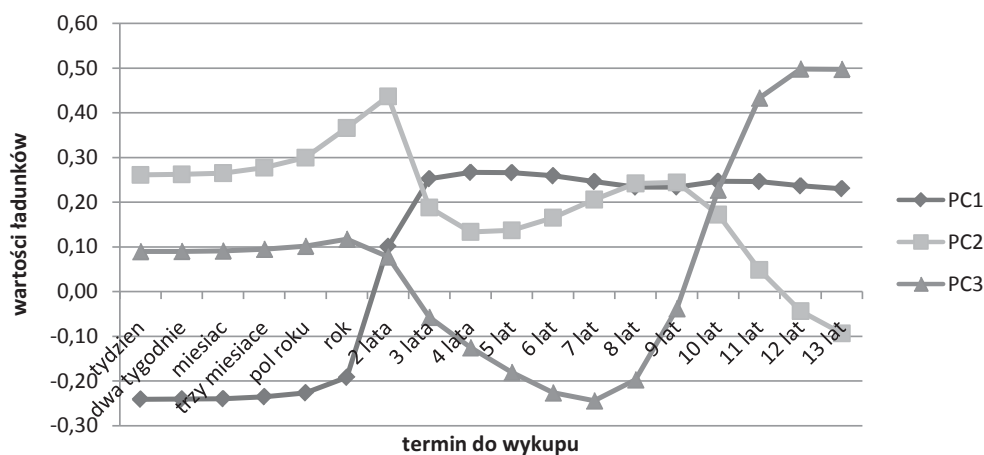
Pierwsza główna składowa wyjaśnia ok. 69% wariancji zmian stóp procentowych. Drugi czynnik wyjaśnia ok. 21,6% wariancji, trzeci ok. 6,7%, a czwarty niecałe 3%. Udział pozostałych czternastu składowych w wariancji jest niewielki i wynosi od 0 do 0,02%. Zatem trzy pierwsze składowe wyjaśniają ponad 97% zmienności stóp procentowych, podczas gdy wszystkie pozostałe czynniki wyjaśniają ok. 3%, a więc można przyjąć, zgodnie ze wskazaniami literaturowymi, że do wyjaśnienia zmienności struktury terminowej stóp procentowych wystarczają trzy pierwsze główne składowe. Ładunki tych trzech głównych składowych zostały przedstawione na rysunku 3. Widoczna jest na nim wyraźna segmentacja rynku. Można wyróżnić rynek papierów krótkoterminowych, odpowiadający instrumentom o terminach do wykupu do dwóch lat, oraz rynek papierów długoterminowych, odpowiadający instrumentom o terminach do wykupu powyżej dwóch lat. Tak scharakteryzowaną segmentację potwierdza przebieg oszacowanej krzywej dochodowości.

Tabela 2.

Wartości własne i ich udział w wariancji zmian stóp procentowych

Czynnik	Wartość własna	Udział w wariancji	Skumulowany udział w wariancji
1	12,4266	69,0367%	69,0367%
2	3,8870	21,5944%	90,6311%
3	1,2013	6,6739%	97,3050%
4	0,4820	2,6778%	99,9828%
5	0,0030	0,0167%	99,9994%
6	0,0001	0,0006%	100,0000%
7–18	0,0000	0,0000%	100,0000%

Źródło: opracowanie własne.



Rysunek 3. Ładunki trzech pierwszych głównych składowych

Źródło: opracowanie własne.

Ładunki pierwszej głównej składowej (na wykresie PC1), reprezentującej równoległe przesunięcia krzywej dochodowości, przyjmują inne wartości dla terminów zapadalności do 1 roku, a inne dla terminów od 2 lat. Jednocześnie w każdym z tych podokresów wartości ładunków są w miarę stałe. Z faktu, że ładunki czynników dla krótkich terminów są ujemne, a dla dłuższych dodatnie, wynika, że w badanym okresie ogólny poziom krótkoterminowych stóp procentowych zmieniał się w przeciwnym kierunku niż poziom stóp długoterminowych.

Wartości ładunków drugiej głównej składowej (na wykresie PC2), odpowiadającej zmianom nachylenia krzywej dochodowości, świadczą o zróżnicowanym przebiegu

krzywej dochodowości. W krótkim okresie (do dwóch lat) kąt nachylenia krzywej był wysoki, a w długim okresie wyraźnie zmalał.

Ładunki trzeciej głównej składowej (na wykresie PC3), odpowiadającej zmianom krzywizny krzywej dochodowości, mają charakter dodatniego przesunięcia motyla. Czynniki dla terminów do wykupu od 3 do 9 lat przyjmują wartości ujemne, podczas gdy czynniki dla terminów do wykupu poniżej 3 lat i powyżej 9 lat – dodatnie. Wynika stąd że stopy procentowe w średnim okresie były niższe niż stopy w okresie krótkim i długim.

Uzyskane wyniki świadczą o tym, że na strukturę terminową stóp procentowych w Polsce wpływają zasadniczo trzy znaczące rodzaje czynników opisanych powyżej. Zatem, aby skutecznie zarządzać ryzykiem stopy procentowej stosując strategię krzywej dochodowości należy prognozować nie tylko kierunek, lecz również rodzaj przesunięcia krzywej.

5. PODSUMOWANIE

Przeprowadzone badanie empiryczne wykazało, że estymacja krzywej dochodowości w oparciu dane z polskiego rynku instrumentów dłużnych jest zagadnieniem przysparzającym wiele trudności. Głównym problemem jest niska płynność rynku obligacji. Nie są niestety dostępne notowania cen dla każdego dnia analizowanego okresu. Na potrzeby prowadzonego badania za cenę z dnia, w którym nie dochodziło do transakcji przyjęto ostatnią wcześniej notowaną cenę. Kolejnym problemem są stosunkowo krótkie terminy do wykupu obligacji skarbowych. W związku z tym strukturę terminową można oszacować tylko dla terminów zapadalności do 10 lat. Zdecydowanie ogranicza to możliwość zastosowania takiej struktury terminowej do zarządzania portfelem inwestycji długoterminowych.

Przeprowadzona estymacja krzywej dochodowości dla okresu 1.7–2.10.2009 r. wykazała znaczną segmentację rynku dłużnych papierów wartościowych na rynki instrumentów krótko- i długoterminowych. Krzywa dochodowości na obszarze odpowiadającym terminom zapadalności do 3 lat gwałtownie maleje. Świadczy to o wysokiej potrzebie płynności instytucji finansowych inwestujących w obligacje. Na pozostałym obszarze krzywa dochodowości ma kształt normalny. Wynika stąd, że rynek oczekuje wzrostu stóp procentowych w długim okresie. Badanie wykazało również znaczny wpływ danych makroekonomicznych na strukturę terminową stóp procentowych w Polsce, przejawiający się zmianą kształtu krzywej dochodowości po komunikatach z września 2009 r.

Przeprowadzona analiza głównych składowych struktury terminowej stóp procentowych pozwoliła na wyodrębnienie czynników ryzyka. Uzyskane wyniki wykazały, że do wyjaśnienia zmienności struktury terminowej stóp procentowych w Polsce wystarczą trzy główne składowe, związane z wysokością, nachyleniem i krzywizną krzywej dochodowości. Różnice w wartościach składowych dla krótkich i długich

terminów do wykupu potwierdzają zaobserwowaną segmentację rynku dłużnych papierów wartościowych. Zatem z badania wynika, że aby skutecznie zarządzać ryzykiem stopy procentowej należy prognozować zarówno kierunek, jak również rodzaj przesunięcia krzywej dochodowości.

Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu

LITERATURA

- [1] Barber J. R., Cooper M. L., (1996), *Immunitization Using Principal Component Analysis*, Journal of Portfolio Management, Fall, 23, (1), 99–105.
- [2] Bliss R. R., (1997), *Movements in the Term Structure of Interest Rates*, Economic Review, Federal Reserve Bank of Atlanta, 4th quarter, 16–33.
- [3] Dziwok E., (2008), *Krzywa dochodowości: Metody konstrukcji i zastosowanie*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Katowice.
- [4] Fabozzi F. J., (2000), *Bond markets, analysis and strategies*, Prentice-Hall International, Inc., Upper Saddle River, New Jersey.
- [5] Fabozzi F. J., Modigliani F., Ferri M. G., (1998), *Foundations of Financial Markets and Institutions*, Prentice-Hall International, Inc., Upper Saddle River, New Jersey.
- [6] Falkenstein E., Henweck J., (1997), *Minimizing Basis Risk from Non-Parallel Shifts in the Yield Curve. Part II: Principal Components*, Journal of Fixed Income, 7, 85–90.
- [7] Golub B. W., Tilman L. M., (2000), *Risk Management. Approaches for Fixed Income Markets*, John Wiley & Sons, Inc., New York.
- [8] Hotelling H., (1933), *Analysis of a Complex of Statistical Variables Into Principal Components*, Journal of Educational Psychology, 24, 417–441.
- [9] Jajuga K., (2005), *Modelowanie struktury terminowej stop procentowych – wyzwanie dla ekonometrii*, [w:] M. Szreder (red.), *Ekonometryczne modelowanie i prognozowanie wzrostu gospodarczego*, Prace i Materiały Wydziału Zarządzania Uniwersytetu Gdańskiego, Sopot, 25–38.
- [10] Jajuga K., Jajuga T., (2007), *Inwestycje. Instrumenty finansowe, aktywa finansowe, ryzyko finansowe, inżynieria finansowa*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- [11] Komentarz rynkowy, (2009), opracowanie Novo fundusze inwestycyjne, dostępny na: <http://www.mbank.pl/indywidualny/inwestycje/sfi/komentarze/2009/pazdziernik/Raport-analityczny-Novo-pax-dziernik-2009.pdf> [dostęp 5.05.2010]
- [12] McCulloch J. R., (1971), *Measuring the Term Structure of Interest Rates*, Journal of Business, 44, 19–31.
- [13] McCulloch J. R., (1975), *The Tax-Adjusted Yield Curve*, The Journal of Finance, 30, 811–830.
- [14] Nawalkha S. K., Soto G.M., Beliaeva N.A., (2005), *Interest Rate Risk Modeling. The fixed income valuation course*, John Wiley & Sons, Inc., New Jersey.
- [15] Nelson C. R., Siegel, A.F., (1987), *Parsimonious Modeling of Yield Curves*, Journal of Business, 60, 473–489.
- [16] Ostasiewicz W., (red.) (1999), *Statystyczne metody analizy danych*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej im. Oskara Langego we Wrocławiu, Wrocław.
- [17] Singh M. K., (1997), *Value at Risk Using Principal Component Analysis*, Journal of Portfolio Management, 24, 101–112.
- [18] Soto G. M., (2004), *Using principal component analysis to explain term structure movements: Performance and stability*, [w:] A. Tavidze (red.), *Progress in Economics Research*, 8, Nova Science Publishers, New York, 203–226.

- [19] Svensson, L. E. O., (1994), *Estimating and Interpreting Forward Interest Rates: Sweden 1992–1994*, NBER Working Papers Series, 4871.
- [20] Świętoń M., (2002), *Terminowa struktura dochodowości skarbowych papierów wartościowych w Polsce w latach 1998–2001*, NBP, Materiały i studia, Zeszyt 150, Warszawa.
- [21] Trzpiot G., (red.) (2010), *Wielowymiarowe metody statystyczne w analizie ryzyka rynkowego*, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa.
- [22] Wadwa P., (1999), *An Empirical Analysis of the Common Factors Governing U.S. Dollar-LIBOR Implied Volatility Movements*, *Journal of Fixed Income*, 9, (3), 61–68.

STRUKTURA TERMINOWA STÓP PROCENTOWYCH W POLSCE
– ESTYMACJA I IDENTYFIKACJA KSZTAŁTUJĄCYCH JĄ CZYNNIKÓW

Streszczenie

Celem artykułu była estymacja struktury terminowej stóp procentowych w Polsce oraz identyfikacja czynników wpływających na jej kształt, co jest niezbędne dla efektywnego zarządzania ryzykiem stóp procentowych. Przeprowadzona aproksymacja krzywej dochodowości wykazała znaczną segmentację rynku dłużnych papierów wartościowych na rynki instrumentów krótko- i długoterminowych. Analiza głównych składowych struktury terminowej stóp procentowych pozwoliła na wyodrębnienie czynników ryzyka. Uzyskane wyniki wykazały, że do wyjaśnienia zmienności struktury terminowej stóp procentowych w Polsce wystarczą trzy główne składowe, związane z wysokością, nachyleniem i krzywizną krzywej dochodowości, których wartości potwierdzają zaobserwowaną segmentację rynku.

Słowa kluczowe: stopa procentowa, struktura terminowa stóp procentowych, krzywa dochodowości, krzywe sklejące trzeciego stopnia, analiza głównych składowych

TERM STRUCTURE OF INTEREST RATES IN POLAND
– ESTIMATION AND IDENTIFICATION OF THE FACTORS DETERMINING ITS SHAPE

Abstract

The aim of the article was to estimate the term structure of interest rates in Poland, as well as to identify factors affecting its shape, which is essential in effective interest rate risk management. The approximation of the yield curve presented in the article shows a significant segmentation of the debt securities market into markets of short-term and long-term instruments. The principal component analysis of the term structure of interest rates made it possible to separate out risk factors. The results obtained indicate that the volatility of the term structure of interest rates in Poland can be explained by only three principal components related to the level, the steepness and the curvature of the yield curve, which values confirm the observed market segmentation.

Key words: interest rate, term structure of interest rates, yield curve, cubic splines, principal component analysis