Maciej Nowak

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach
Wydział Informatyki i Komunikacji
Katedra Badań Operacyjnych
maciej.nowak@ue.katowice.pl

WYKORZYSTANIE PODEJŚCIA QUASI-HIERARCHICZNEGO W WIELOKRYTERIALNYM DRZEWIE DECYZYJNYM*

Streszczenie: Drzewo decyzyjne jest efektywnym narzędziem opisu dynamicznych procesów decyzyjnych w warunkach ryzyka. Korzystając z niego dąży się zwykle do wyznaczenia rozwiązania optymalizującego wartość oczekiwaną rozważanego kryterium decyzyjnego. Stosunkowo rzadko narzędzie to jest wykorzystywane do rozwiązywania problemu wielokryterialnego, w którym decydent jest zainteresowany realizacją kilku wzajemnie konfliktowych celów. W pracy przedstawiono metodę pozwalającą na rozwiązanie problemu opisanego wielokryterialnym drzewem decyzyjnym za pomocą podejścia quasi-hierarchicznego. Zakładamy, że decydent jest w stanie określić hierarchię kryteriów oraz określić, w jakim stopniu można pogorszyć optymalną wartość kryterium o wyższym priorytecie w celu poprawy wartości kryterium o niższej wadze. Sposób działania metody zilustrowano przykładem opartym na danych umownych.

Słowa kluczowe: podejmowanie decyzji w warunkach ryzyka, drzewo decyzyjne, analiza wielokryterialna, podejście quasi-hierarchiczne.

Wprowadzenie

Decyzja zwykle rozumiana jest jako konieczność dokonania wyboru jednego z wielu możliwych sposobów postępowania. W warunkach rzeczywistych, zwłaszcza gdy waga problemu jest duża, jest ona wynikiem wieloetapowego procesu, w trakcie którego wypracowywane są fragmenty decyzji [Roy, 1990]. Co więcej, wiele problemów decyzyjnych z samej swej natury ma charakter

* Projekt został sfinansowany ze środków Narodowego Centrum Nauki przyznanych na podstawie decyzji numer DEC-2013/11/B/HS4/01471.

dynamiczny. W ich wypadku decyzja nie jest podejmowana jednorazowo, lecz wielokrotnie. Cząstkowe wybory są ze sobą wzajemnie powiązane, gdyż wcześniejsze decyzje wpływają na to, jakie warianty będą mogły być rozważane w kolejnych fazach procesu.

Konsekwencje decyzji ujawniają się w bliższej lub dalszej przyszłości, która z samej swej natury jest niepewna. Precyzyjne oszacowanie skutków dokonywanych wyborów zwykle nie jest możliwe. O wiele częściej informacje, którymi dysponuje decydent, są niepełne, fragmentaryczne. W takiej sytuacji powinien on, na ile to możliwe, postarać się poszerzyć swoją wiedzę na temat analizowanego problemu. O ile uzyskanie danych pozwalających na zastosowanie modelu deterministycznego zazwyczaj nie jest możliwe, o tyle wysiłki te mogą zaowocować uzyskaniem częściowej wiedzy pozwalającej na oszacowanie rozkładów prawdopodobieństwa reprezentujących oceny rozważanych kryteriów ze względu na analizowane kryteria. Mamy wówczas do czynienia z problemem określanym w literaturze jako zagadnienie podejmowania decyzji w warunkach ryzyka.

Wygodnym narzędziem modelowania i rozwiązywania dynamicznych problemów podejmowania decyzji w warunkach ryzyka jest drzewo decyzyjne. Dzięki graficznemu zilustrowaniu problemu nawet skomplikowane zagadnienie może być w przedstawione w czytelny sposób. W klasycznym ujęciu zadanie polega na wyznaczeniu rozwiązania, dla którego wartość oczekiwana analizowanego kryterium jest optymalna. Stosunkowo rzadko jest ono natomiast wykorzystywane w problemach wielokryterialnych. Jako pierwsi tematykę tę podjęli Haimes, Li i Tulsiani [1990], którzy zaproponowali algorytm wyznaczania rozwiązań sprawnych. Wielokryterialne drzewo decyzyjne analizował również Lootsma [1997], który przedstawił sposób rozwiązania problemu przy wykorzystaniu dwóch metod wielokryterialnych: AHP oraz SMART. Z kolei Frini, Guitouni i Martel [2012] przedstawili algorytm, który nie wymaga wyznaczania rozwiązań sprawnych. Zgodnie z ich propozycją, w celu wyznaczenia rozwiązania końcowego należy w każdym węźle decyzyjnym wykorzystać jedną z wielokryterialnych metod wspomagania decyzji.

W niniejszej pracy przedstawiono metodę opartą na podejściu quasi-hierarchicznym. Zakłada się, że decydent jest w stanie zdefiniować hierarchię kryteriów oraz określić, w jakim stopniu można pogorszyć optymalną wartość kryterium o wyższym priorytecie w celu poprawy wartości kryteriów o priorytecie niższym. Poszukując rozwiązania końcowego problemu zaczynamy od wyznaczenia rozwiązań, dla których kryteria przyjmują wartości nie niższe niż wartości progowe określone przez decydenta. Następnie wykorzystujemy hierarchię kryteriów do wyznaczenia optymalnego rozwiązania problemu.

1. Wielokryterialne drzewo decyzyjne

Rozważamy proces decyzyjny składający się z T etapów. W drzewie decyzyjnym wykorzystujemy dwa typy węzłów: decyzyjne (reprezentowane przez kwadraty) oraz losowe (przedstawiane w formie kółek). Krawędzie wychodzące z węzłów decyzyjnych reprezentują warianty decyzyjne, zaś krawędzie zaczynające się w węzłach losowych odpowiadają stanom natury, czyli takim wariantom rozwoju sytuacji, które pozostają poza kontrolą decydenta, a które oddziałują na przebieg procesu. Zakładamy, że znany jest rozkład prawdopodobieństwa zajścia poszczególnych stanów natury. Każda ścieżka w drzewie, zakończona określonym węzłem końcowym, reprezentuje jedną z możliwych realizacji procesu, na który składa się ciąg decyzji podejmowanych przez decydenta oraz stanów natury, które zrealizowały się w kolejnych węzłach losowych.

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

T – liczba etapów, z których składa się analizowany proces decyzyjny,

$\mathbf{Y}^t$ – zbiór węzłów decyzyjnych, w których proces może się znaleźć w etapie t:

$$\mathbf{Y}^t = \{y_1^t, \ldots, y_{n_t}^t\},$$

$\mathbf{Y}^{T+1}$ – zbiór węzłów końcowych:

$$\mathbf{Y}^{T+1} = \{y_1^{T+1}, \ldots, y_{n_{T+1}}^{T+1}\},$$

$\mathbf{X}^t\left(y_i^t\right)$ – zbiór decyzji, które mogą być podjęte w węźle decyzyjnym y_i^t:

$$\mathbf{X}^t\left(y_i^t\right) = \{x_{i1}^t, \ldots, x_{i\,m_{it}}^t\},$$

$\mathbf{\Xi}^t\left(x_{ij}^t\right)$ – zbiór stanów natury, które mogą zajść, gdy w węźle y_i^t została podjęta decyzja x_{ij}^t,

$$\mathbf{\Xi}^t\left(x_{ij}^t\right) = \{\xi_{ij1}^t, \ldots, \xi_{ijM_{ijt}}^t\},$$

$P(\xi_{ijk}^t)$ – prawdopodobieństwo zajścia stanu natury ξ_{ijk}^t, przy czym:

$$\forall_{t\in\overline{1,T},}\ \forall_{i\in\overline{1,n_t}}\ \forall_{j\in\overline{1,m_{it}}}\ \sum_{k=1}^{M_{ijt}} \xi_{ijk}^t = 1,$$

$\Omega\left(y_i^t, x_{ij}^t, \xi_{ijk}^t\right)$ – funkcja przejścia określająca węzeł decyzyjny lub końcowy, w którym znajdzie się proces, jeżeli w węźle y_i^t zostanie podjęta decyzja x_{ij}^t i zajdzie stan natury ξ_{ijk}^t, Strategią $\hat{\mathbf{x}}_p$ nazywamy wektor, którego składowe określają decyzje, jakie powinny być podjęte w poszczególnych węzłach decyzyjnych:

$$\hat{\mathbf{x}}_p = [\hat{x}_{p1}^1, \hat{x}_{p1}^2, ..., \hat{x}_{pn_2}^2, \ldots, \hat{x}_{pn_T}^T].$$

Z punktu widzenia decydenta istotne będą składowe odpowiadające tym węzłom decyzyjnym, które mogą być osiągnięte w wyniku zastosowania rozważanej strategii. Podjęcie decyzji w etapie t powoduje bowiem, że przejście do niektórych węzłów z etapu $t + 1$ oraz etapów następnych nie jest możliwe. Mogłoby się zatem wydawać, że informacja na temat decyzji przypisanych do takich węzłów jest zbędna. Wykorzystamy ją jednak do wyznaczenia kolejnych rozwiązań rozważanego problemu.

Przez $\mathbf{u}_p$ oznaczymy wektor określający, które z węzłów decyzyjnych są osiągalne w wyniku zastosowania strategii $\hat{\mathbf{x}}_p$:

$$\mathbf{u}_p = [u_{p1}^1, u_{p1}^2, ..., u_{pn_2}^2, \ldots, u_{pn_T}^T].$$

Przyjmujemy, że $u_{p1}^1 = 1$ (pierwszy węzeł decyzyjny jest zawsze osiągalny). Wartości pozostałych elementów wektora $\mathbf{u}_p$ wyznaczamy korzystając z następującej formuły:

$$u_{pl}^t = \begin{cases} 1 & \text{gdy } \exists_{\tau \in \overline{1,t-1}} \exists_{y_i^\tau \in \mathbf{Y}_\tau} \exists_{\xi_{ijk}^\tau \in \boldsymbol{\Xi}(\hat{x}_{pi}^\tau)} \; y_l^t = \Omega\left(y_i^\tau \hat{x}_{pi}^\tau, \xi_{ijk}^\tau\right) \\ 0 & \text{w pozostałych wypadkach} \end{cases}.$$

Rozwiązanie problemu powinno określać decyzje dla tych węzłów, które są osiągalne w wyniku zastosowania rozważanej strategii. Jest ono zatem definiowane przez te składowe wektora $\hat{\mathbf{x}}_p$, dla których odpowiednia składowa wektora $\mathbf{u}_p$ przyjmuje wartość 1. Oznacza to, że dwie różne strategie $\hat{\mathbf{x}}_p$ oraz $\hat{\mathbf{x}}_q$ mogą generować to samo rozwiązanie problemu. Będzie tak wówczas, gdy jednocześnie będą spełnione następujące warunki:

$$\forall_{t \in \overline{1,T}} \forall_{i \in \overline{1,n_t}} \; u_{pi}^t = u_{qi}^t$$

oraz

$$\forall_{t \in \overline{1,T}} \forall_{i \in \overline{1,n_t}} \; u_{pi}^t = 1 \Rightarrow \hat{x}_{pi}^t = \hat{x}_{qi}^t.$$

W pracy rozważamy problem wielokryterialny. Zakładamy zatem, że rozwiązania oceniane są ze względu na K kryteriów, przy czym oceny te są dokonywane na podstawie wartości oczekiwanej. Ponadto przyjmujemy, że decydent preferuje wyższe wartości kryteriów w stosunku do wartości niższych oraz, że dla każdego węzła końcowego określono wartości, jakie uzyskają poszczególne kryteria, gdy proces zakończy się w tym węźle. Przez $f_k\left(y_i^{T+1}\right)$ oznaczymy wartość kryterium k uzyskiwaną w węźle końcowym y_i^{T+1}.

Chcąc wyznaczyć wartość oczekiwaną kryterium k dla strategii $\hat{\mathbf{x}}_p$ należy obliczyć wartości oczekiwane tego kryterium dla każdego węzła decyzyjnego poczynając od węzłów z ostatniego etapu. Niech $G_{k\,p}\left(y_i^t\right)$ oznacza wartość oczekiwaną kryterium k uzyskiwaną w węźle y_i^t, gdy stosowana jest strategia $\hat{\mathbf{x}}_p$. Dla węzłów końcowych przyjmować będziemy, że $G_{k\,p}\left(y_i^{T+1}\right)=f_k\left(y_i^{T+1}\right)$. Do wyliczenia wartości $G_{k\,p}\left(y_i^t\right)$ dla węzłów decyzyjnych wykorzystamy następującą formułę:

$$G_{k\,p}\left(y_i^t\right)=\sum_{\xi_{i\,j\,k}^t\in\Xi^t\left(\hat{x}_{p\,i}^t\right)}P\left(\xi_{i\,j\,k}^t\right)G_{k\,p}\left(y_l^\tau\right),$$

gdzie: $y_l^\tau=\Omega\left(y_i^t,\hat{x}_{p\,i}^t,\xi_{i\,j\,k}^t\right)$. Jako wartość kryterium k dla strategii $\hat{\mathbf{x}}_p$ przyjmujemy $G_{k\,p}\left(y_1^1\right)$.

Rozwiązanie problemu polega na określeniu decyzji, które powinny być podjęte w tych węzłach decyzyjnych, w których proces może się znaleźć w kolejnych etapach. W przypadku jednokryterialnym jego wyznaczenie rozpoczyna się od ustalenia decyzji, jakie powinny być podejmowane w węzłach decyzyjnych z ostatniego etapu. Następnie cofamy się o jeden etap wstecz i dla każdego węzła decyzyjnego z przedostatniego etapu określamy decyzje, które pozwolą na uzyskanie wartości optymalnej, uwzględniając decyzje podejmowane w ostatnim etapie. Procedurę kontynuujemy do momentu wyznaczenia decyzji optymalnej dla węzła decyzyjnego z etapu pierwszego. W ten sposób otrzymujemy strategię optymalną, która dla każdego węzła decyzyjnego określa decyzję optymalną. Rozwiązanie optymalne określa decyzje optymalne dla tych węzłów decyzyjnych, które mogą być osiągnięte w rezultacie zastosowania strategii optymalnej. Opisany wyżej schemat postępowania, określany w literaturze angielskojęzycznej mianem *folding-back-and-averaging-out procedure*, może być wykorzystany, gdy kryterium spełnia warunki separowalności oraz monotoniczności [Trzaskalik, 1990].

Gdy rozwiązania oceniane są ze względu na wiele kryteriów, tylko wyjątkowo mamy do czynienia z rozwiązaniami dominującymi, czyli takimi, które optymalizują wartości wszystkich kryteriów. W typowym problemie wielokryterialnym musimy się zmierzyć z konfliktem kryteriów. Często proponuje się, by rozwiązanie problemu rozpocząć od wyznaczenia zbioru rozwiązań sprawnych, za które uznaje się takie, dla których nie jest możliwa poprawa wartości któregokolwiek kryterium bez pogorszenia wartości przynajmniej jednego z pozostałych. Algorytm wyznaczania rozwiązań sprawnych dla wielokryterialnego drzewa decyzyjnego, w którym wszystkie kryteria oceniane są za pomocą wartości oczekiwanej przedstawili Haimes, Li i Tulsiani [1990]. Metoda pozwalająca na wyznaczenie rozwiązań sprawnych, gdy kryteria definiowane są nie tylko jako wartość oczekiwana, ale również prawdopodobieństwo zajścia określonego zdarzenia lub warunkowa wartość oczekiwana została zaproponowana przez autora niniejszej pracy [Nowak, 2013].

Gdy liczba rozwiązań sprawnych jest niewielka, decydent nie powinien mieć większych problemów z wyborem jednego z nich. W wielu wypadkach jednak zbiór rozwiązań sprawnych jest na tyle liczny, że dla ustalenia rozwiązania końcowego problemu konieczne jest skorzystanie z określonej procedury obliczeniowej. Jednym z często stosowanych sposobów rozwiązania problemu wielokryterialnego jest metoda quasi-hierarchiczna. Może ona być wykorzystana, gdy decydent jest w stanie uporządkować kryteria zgodnie z ich malejącą wagą, a także określić, w jakim stopniu wartość kryterium umieszczonego na wyższym poziomie hierarchii może być pogorszona w celu poprawy wartości kryterium o niższym priorytecie. Podejście takie wykorzystujemy w niniejszej pracy.

2. Wyznaczanie rozwiązań prawie optymalnych

Aby skorzystanie z podejścia quasi-hierarchicznego było możliwe, dla każdego kryterium konieczne jest wyznaczenie nie tylko rozwiązania optymalnego, ale także innych rozwiązań spełniających minimalne wymagania sformułowane przez decydenta, które w dalszej części pracy nazywać będziemy rozwiązaniami prawie optymalnymi. Gdy rozmiary problemu są niewielkie, wyselekcjonowanie takich rozwiązań nie sprawia większego problemu. Jednak gdy rozważamy bardziej skomplikowane zagadnienie, analiza wszystkich możliwych rozwiązań może być kłopotliwa. W przypadku problemu przedstawionego w formie drzewa decyzyjnego, tego typu problem nie był jak dotąd szerzej rozważany. Z tego względu poniżej przedstawiamy algorytm pozwalający na zidentyfikowanie rozwiązań prawie optymalnych problemu opisanego drzewem decyzyjnym.

Przyjmijmy, że decydent określił minimalny poziom Z_k, jaki powinna przyjąć wartość oczekiwana kryterium k. Zakładamy, że Z_k ma wartość niższą niż wartość uzyskiwana dla strategii optymalnej. Aby wyznaczyć wszystkie strategie, dla których wartość oczekiwana jest nie niższa niż Z_k, w pierwszej kolejności należy wyznaczyć strategię optymalną $\hat{\mathbf{x}}_p$. W tym celu skorzystać można z następującego algorytmu:

1. Dla każdego węzła końcowego $y_i^{T+1} \in \mathbf{Y}^{T+1}$ przyjmij:
$$G_{kp}\left(y_i^{T+1}\right) = f_k\left(y_i^{T+1}\right).$$
2. Przyjmij: $t = T$.
3. Dla każdego węzła decyzyjnego $y_i^t \in \mathbf{Y}^t$ wykonaj kroki:
   a) dla każdej decyzji $x_{ij}^t \in \mathbf{X}^t\left(y_i^t\right)$ oblicz:
$$F_{kp}\left(x_{ij}^t\right) = \sum_{\xi_{ijk}^t \in \Xi^t\left(x_{ij}^t\right)} P\left(\xi_{ijk}^t\right) G_{kp}\left(y_l^\tau\right),$$
   gdzie: $y_l^\tau = \Omega\left(y_i^t, x_{ij}^t, \xi_{ijk}^t\right)$,
   b) przyjmij:
$$G_{kp}\left(y_i^t\right) = \max_{x_{ij}^t \in \mathbf{X}^t\left(y_i^t\right)} F_{kp}\left(x_{ij}^t\right),$$
   c) Jako $\hat{x}_{pi}^t$ przyjmij decyzję, dla której $F_{kp}\left(x_{ij}^t\right)$ osiąga wartość maksymalną.
4. Jeżeli $t > 1$, to przyjmij $t = t - 1$ i przejdź do kroku (2).
5. Koniec procedury.

Dysponując informacją na temat strategii optymalnej możemy przystąpić do wyznaczenia strategii prawie optymalnych. Algorytm, który przedstawiamy poniżej, oparty jest na dość prostej obserwacji. Zauważmy, że pomijając przypadek rozwiązań alternatywnych, modyfikacja strategii optymalnej poprzez zmianę decyzji w którymkolwiek z węzłów decyzyjnych osiągalnych prowadzi do pogorszenia wartości oczekiwanej analizowanego kryterium. Aby zatem wyznaczyć strategię, która jest gorsza jedynie od optymalnej, wystarczy przeanalizować tylko te strategie, które różnią się od strategii optymalnej decyzją przypisaną do jednego z tych węzłów decyzyjnych, które są osiągalne w wyniku jej zastosowania. W przedstawionym niżej algorytmie wykorzystujemy następujące zbiory:

LS – lista strategii prawie optymalnych,

LSB – lista strategii do przebadania, czyli takich, które mogą być modyfikowane w celu wyznaczenia kolejnych strategii prawie optymalnych.

Zbiór strategii prawie optymalnych wyznaczamy w następujących krokach:

1. Przyjmij: $\mathbf{LS} := \varnothing$, $\mathbf{LSB} := \varnothing$.
2. Wyznacz strategię $\hat{\mathbf{x}}_p$, dla której analizowane kryterium osiąga wartość optymalną.

3. Zapisz strategię $\hat{\mathbf{x}}_p$ do zbiorów **LS** oraz **LSB**:

$$\mathbf{LS} := \mathbf{LS} \cup \{\hat{\mathbf{x}}_p\}, \ \mathbf{LSB} := \mathbf{LSB} \cup \{\hat{\mathbf{x}}_p\}.$$

4. Jeżeli $\mathbf{LSB} = \varnothing$, to przejdź do kroku (7).
5. Wybierz dowolną strategię $\hat{\mathbf{x}}_p$ ze zbioru **LSB**; usuń tą strategię ze zbioru **LSB**:

$$\mathbf{LSB} := \mathbf{LSB} \setminus \{\hat{\mathbf{x}}_p\}.$$

6. Wyznacz wszystkie strategie, które różnią się od strategii $\hat{\mathbf{x}}_p$ decyzją podejmowaną w jednym węźle decyzyjnym, który jest osiągalny przy zastosowaniu strategii $\hat{\mathbf{x}}_p$. Dla każdej nowej strategii $\hat{\mathbf{x}}_q$ sprawdź, czy generuje ona rozwiązanie różne od rozwiązań generowanych przez strategie ze zbioru **LS**. Jeżeli tak, to oblicz wartość oczekiwaną analizowanego kryterium uzyskiwaną dzięki zastosowaniu strategii $\hat{\mathbf{x}}_q$. Jeżeli wartość ta nie jest niższa niż Z_k, to zapisz strategię $\hat{\mathbf{x}}_q$ do zbiorów **LS** oraz **LSB**:

$$\mathbf{LS} := \mathbf{LS} \cup \{\hat{\mathbf{x}}_q\}, \ \mathbf{LSB} := \mathbf{LSB} \cup \{\hat{\mathbf{x}}_q\}.$$

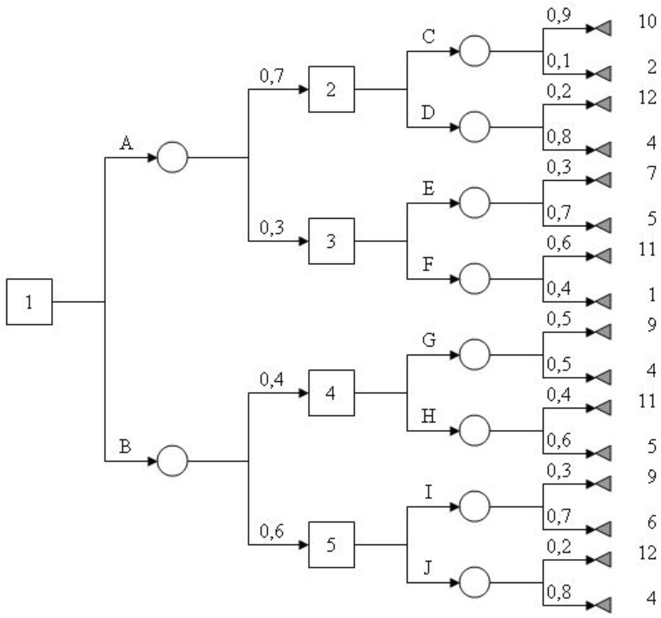
   Przejdź do kroku (4).
7. Koniec procedury.

Powyższy algorytm modyfikuje strategie zapisane w zbiorze **LSB** poprzez zmianę decyzji w tylko jednym węźle decyzyjnym i to takim, który jest osiągalny w wyniku zastosowania strategii podlegającej modyfikacji. Zauważmy, że zbiór węzłów, które są osiągalne, gdy stosowana jest zmodyfikowana strategia, może się różnić od zbioru węzłów, które są osiągalne, gdy stosowana jest strategia podlegająca modyfikacji. Nie pociąga to jednak za sobą żadnych negatywnych konsekwencji, gdyż zgodnie z przyjętą przez nas konwencją strategia określa decyzje, jakie powinny być podejmowane we wszystkich węzłach, czyli również tych, które nie mogą być osiągnięte w przypadku jej zastosowania.

Dla każdej nowej strategii sprawdzamy, czy generuje ona rozwiązanie odmienne od tych, które wcześniej zostały już wyznaczone. Jeżeli tak, to wyliczamy wartość oczekiwaną analizowanego kryterium i sprawdzamy, czy spełnia ona warunek sformułowany przez decydenta. Jeżeli tak nie jest, to strategia taka nie musi być dalej analizowana, gdyż dalsza jej modyfikacja nie może prowadzić do poprawy wartości kryterium. Procedurę kończymy, gdy zbiór LSB jest zbiorem pustym. Sposób działania algorytmu zilustrowano poniższym przykładem.

Przykład 1

Rozważamy dwuetapowy problem decyzyjny opisany drzewem decyzyjnym przedstawionym na rys. 1.



Rys. 1. Drzewo decyzyjne problemu rozważanego w przykładzie 1

Należy wyznaczyć wszystkie strategie, dla których wartość oczekiwana analizowanego kryterium jest równa co najmniej 6,5.

Dla czytelności opisu, podkreśleniem i pogrubieniem zaznaczać będziemy decyzje przypisane do tych węzłów, które mogą być osiągnięte w wyniku zastosowania rozważanej strategii. Wyznaczenie strategii prawie optymalnych przebiega następująco:

1. Przyjmujemy: $\mathbf{LS} := \varnothing$, $\mathbf{LSB} := \varnothing$.
2. Wyznaczamy strategię optymalną, która jest następująca: $\hat{\mathbf{x}}_1 = [\underline{\mathbf{A}}, \underline{\mathbf{C}}, \underline{\mathbf{F}}, \mathrm{H}, \mathrm{I}]$. Zgodnie z nią w węźle 1 należy podjąć decyzję A, po czym, w zależności od rozwoju sytuacji decyzję C (w węźle 2) lub F (w węźle 3). Wartość oczekiwana analizowanego kryterium wynosi 8,50. Dla węzłów 4 oraz 5, które nie mogą być osiągnięte w wyniku zastosowania strategii $\hat{\mathbf{x}}_1$ jako decyzje optymalne wyznaczono odpowiednio decyzje H oraz I.
3. Strategię $\hat{\mathbf{x}}_1$ zapisujemy do zbiorów **LS** oraz **LSB**:
$$\mathbf{LS} = \mathbf{LS} \cup \{\hat{\mathbf{x}}_1\},\ \mathbf{LSB} = \mathbf{LSB} \cup \{\hat{\mathbf{x}}_1\}.$$
4. Ponieważ zbiór **LSB** nie jest zbiorem pustym, przechodzimy do kroku (5).
5. Ze zbioru **LSB** pobieramy strategię $\hat{\mathbf{x}}_1$:
$$\mathbf{LSB} := \mathbf{LSB} \setminus \{\hat{\mathbf{x}}_1\} = \varnothing.$$

6. Wyznaczamy wszystkie strategie, które różnią się od strategii $\hat{\mathbf{x}}_1$ decyzją w jednym z węzłów 1, 2 lub 3:
   $\hat{\mathbf{x}}_2 = [\underline{\mathbf{A}}, \underline{\mathbf{C}}, \underline{\mathbf{E}}, \mathrm{H}, \mathrm{I}]$ – wartość oczekiwana kryterium: 8,12,
   $\hat{\mathbf{x}}_3 = [\underline{\mathbf{A}}, \underline{\mathbf{D}}, \underline{\mathbf{F}}, \mathrm{H}, \mathrm{I}]$ – wartość oczekiwana kryterium: 6,02,
   $\hat{\mathbf{x}}_4 = [\underline{\mathbf{B}}, \mathrm{C}, \mathrm{F}, \underline{\mathbf{H}}, \underline{\mathbf{I}}]$ – wartość oczekiwana kryterium: 7,10.
   Zbiory węzłów decyzyjnych, które mogą być osiągnięte w wyniku zastosowania strategii $\hat{\mathbf{x}}_2$ oraz $\hat{\mathbf{x}}_3$ są takie same jak zbiór węzłów osiągalnych w wyniku zastosowania strategii $\hat{\mathbf{x}}_1$. Natomiast zastosowanie strategii $\hat{\mathbf{x}}_4$ oznacza, że proces może osiągnąć węzły 1, 4 oraz 5. Wszystkie trzy strategie generują rozwiązania różne od rozwiązania generowanego przez strategię $\hat{\mathbf{x}}_1$. Strategie $\hat{\mathbf{x}}_2$ oraz $\hat{\mathbf{x}}_4$, które spełniają warunek sformułowany przez decydenta, zostają zapisane do zbiorów **LS** oraz **LSB**:
   $$\mathbf{LS} := \mathbf{LS} \cup \{\hat{\mathbf{x}}_2, \hat{\mathbf{x}}_4\} = \{\hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2, \hat{\mathbf{x}}_4\},\ \mathbf{LSB} := \mathbf{LSB} \cup \{\hat{\mathbf{x}}_2, \hat{\mathbf{x}}_4\} = \{\hat{\mathbf{x}}_2, \hat{\mathbf{x}}_4\}\ .$$
   Przechodzimy do kroku (4).
4. Ponieważ zbiór **LSB** nie jest zbiorem pustym, przechodzimy do kroku (5).
5. Ze zbioru **LSB** pobieramy strategię $\hat{\mathbf{x}}_2$:
   $$\mathbf{LSB} := \mathbf{LSB} \setminus \{\hat{\mathbf{x}}_2\} = \{\hat{\mathbf{x}}_4\}\ .$$
6. Wyznaczamy wszystkie strategie, które różnią się od strategii $\hat{\mathbf{x}}_2$ decyzją w jednym z węzłów 1, 2 lub 3:
   $\hat{\mathbf{x}}_5 = [\underline{\mathbf{A}}, \underline{\mathbf{C}}, \underline{\mathbf{F}}, \mathrm{H}, \mathrm{I}]$ – wartość oczekiwana kryterium: 8,50,
   $\hat{\mathbf{x}}_6 = [\underline{\mathbf{A}}, \underline{\mathbf{D}}, \underline{\mathbf{E}}, \mathrm{H}, \mathrm{I}]$ – wartość oczekiwana kryterium: 5,60,
   $\hat{\mathbf{x}}_7 = [\underline{\mathbf{B}}, \mathrm{C}, \mathrm{E}, \underline{\mathbf{H}}, \underline{\mathbf{I}}]$ – wartość oczekiwana kryterium: 7,10.
   Strategia $\hat{\mathbf{x}}_5$ jest identyczna jak strategia $\hat{\mathbf{x}}_1$, natomiast strategia $\hat{\mathbf{x}}_7$ chociaż jest różna od strategii $\hat{\mathbf{x}}_4$, to jednak generuje to samo rozwiązanie (różnica występuje jedynie dla węzła 3, który nie może być osiągnięty dzięki zastosowaniu tej strategii). Spośród trzech nowych strategii jedynie strategia $\hat{\mathbf{x}}_6$ generuje nowe rozwiązanie. Ponieważ jednak wartość oczekiwana analizowanego kryterium uzyskiwana przy tej strategii nie spełnia warunku określonego przez decydenta, również ona nie jest brana pod uwagę w dalszych obliczeniach. Wobec powyższego zbiory **LB** oraz **LBS** pozostają bez zmian. Przechodzimy do kroku (4).
4. Ponieważ zbiór **LSB** nie jest zbiorem pustym, przechodzimy do kroku (5).
5. Ze zbioru **LSB** pobieramy strategię $\hat{\mathbf{x}}_4$:

$$\mathbf{LSB} := \mathbf{LSB} \setminus \{\hat{\mathbf{x}}_4\} = \varnothing.$$

6. Wyznaczamy wszystkie strategie, które różnią się od strategii $\hat{\mathbf{x}}_4$ decyzją w jednym z węzłów 1, 4 lub 5. Są to następujące strategie:
$\hat{\mathbf{x}}_8 = [\underline{\mathbf{B}}, \mathrm{C}, \mathrm{F}, \underline{\mathbf{H}}, \underline{\mathbf{J}}]$ – wartość oczekiwana kryterium: 6,32,
$\hat{\mathbf{x}}_9 = [\underline{\mathbf{B}}, \mathrm{C}, \mathrm{F}, \underline{\mathbf{G}}, \underline{\mathbf{I}}]$ – wartość oczekiwana kryterium: 6,74,
$\hat{\mathbf{x}}_{10} = [\underline{\mathbf{A}}, \underline{\mathbf{C}}, \underline{\mathbf{F}}, \mathrm{H}, \mathrm{I}]$ – wartość oczekiwana kryterium: 8,50.
Strategia $\hat{\mathbf{x}}_{10}$ jest identyczna jak strategia $\hat{\mathbf{x}}_1$, natomiast strategie $\hat{\mathbf{x}}_8$ oraz $\hat{\mathbf{x}}_9$ generują rozwiązania, które nie są generowane przez żadną ze strategii ze zbioru **LS**. Spośród nich jedynie strategia $\hat{\mathbf{x}}_9$ spełnia warunek sformułowany przez decydenta. Strategię tę zapisujemy do zbiorów **LB** oraz **LBS**:
$$\mathbf{LS} := \mathbf{LS} \cup \{\hat{\mathbf{x}}_9\} = \{\hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2, \hat{\mathbf{x}}_4, \hat{\mathbf{x}}_9\},\ \mathbf{LSB} := \mathbf{LSB} \cup \{\hat{\mathbf{x}}_9\} = \{\hat{\mathbf{x}}_9\}.$$
Przechodzimy do kroku (4).
4. Ponieważ zbiór **LSB** nie jest zbiorem pustym, przechodzimy do kroku (5).
5. Ze zbioru **LSB** pobieramy strategię $\hat{\mathbf{x}}_9$:
$$\mathbf{LSB} := \mathbf{LSB} \setminus \{\hat{\mathbf{x}}_9\} = \varnothing.$$
6. Wyznaczamy wszystkie strategie, które różnią się od strategii $\hat{\mathbf{x}}_9$ decyzją w jednym z węzłów 1, 4 lub 5. Są to następujące strategie:
$\hat{\mathbf{x}}_{11} = [\underline{\mathbf{B}}, \mathrm{C}, \mathrm{F}, \underline{\mathbf{G}}, \underline{\mathbf{J}}]$ – wartość oczekiwana kryterium: 5,96,
$\hat{\mathbf{x}}_{12} = [\underline{\mathbf{B}}, \mathrm{C}, \mathrm{F}, \underline{\mathbf{H}}, \underline{\mathbf{I}}]$ – wartość oczekiwana kryterium: 7,10,
$\hat{\mathbf{x}}_{13} = [\underline{\mathbf{A}}, \underline{\mathbf{C}}, \underline{\mathbf{F}}, \mathrm{G}, \mathrm{I}]$ – wartość oczekiwana kryterium: 8,50.
Strategia $\hat{\mathbf{x}}_{12}$ jest identyczna jak strategia $\hat{\mathbf{x}}_4$, natomiast strategia $\hat{\mathbf{x}}_{13}$ chociaż jest różna od strategii $\hat{\mathbf{x}}_1$, to jednak generuje to samo rozwiązanie (różnica występuje jedynie dla węzła 4, który nie może być osiągnięty dzięki zastosowaniu tej strategii). Spośród trzech nowych strategii jedynie strategia $\hat{\mathbf{x}}_{11}$ generuje nowe rozwiązanie. Ponieważ jednak wartość oczekiwana analizowanego kryterium uzyskiwana przy tej strategii nie spełnia warunku określonego przez decydenta, również ona nie jest brana pod uwagę w dalszych obliczeniach. Wobec powyższego zbiory **LB** oraz **LBS** pozostają bez zmian. Przechodzimy do kroku (4).
4. Ponieważ zbiór **LSB** jest zbiorem pustym, przechodzimy do kroku (7).
7. Kończymy procedurę.

W wyniku procedury wyznaczyliśmy cztery strategie spełniające warunek sformułowany przez decydenta. Są one następujące:

– $\hat{\mathbf{x}}_1 = [\underline{\mathbf{A}}, \underline{\mathbf{C}}, \underline{\mathbf{F}}, \mathrm{H}, \mathrm{I}]$ – wartość oczekiwana kryterium: 8,50,
– $\hat{\mathbf{x}}_2 = [\underline{\mathbf{A}}, \underline{\mathbf{C}}, \underline{\mathbf{E}}, \mathrm{H}, \mathrm{I}]$ – wartość oczekiwana kryterium: 8,12,
– $\hat{\mathbf{x}}_4 = [\underline{\mathbf{B}}, \mathrm{C}, \mathrm{F}, \underline{\mathbf{H}}, \underline{\mathbf{I}}]$ – wartość oczekiwana kryterium: 7,10,
– $\hat{\mathbf{x}}_9 = [\underline{\mathbf{B}}, \mathrm{C}, \mathrm{F}, \underline{\mathbf{G}}, \underline{\mathbf{I}}]$ – wartość oczekiwana kryterium: 6,74.

3. Zastosowanie podejścia quasi-hierarchicznego do rozwiązania problemu wielokryterialnego

Przyjmijmy, że rozwiązania problemu opisanego drzewem decyzyjnym oceniane są ze względu na K kryteriów. Ocena każdego wariantu ze względu na każde kryterium jest dokonywana na podstawie wartości oczekiwanej. Zakładamy, że decydent uporządkował kryteria, poczynając od tego, które uznaje za najważniejsze. Uznajemy zatem, że w pierwszej kolejności jest on zainteresowany optymalizacją kryterium nr 1, następnie kryterium nr 2, itd. Wyznaczenie rozwiązania za pomocą podejścia quasi-hierarchicznego przebiega według następującego scenariusza:

1. Wyznacz rozwiązania optymalne problemu ze względu na każde z kryteriów.
2. Przedstaw decydentowi wartości optymalne poszczególnych kryteriów.
3. Poproś decydenta o określenie progów aspiracji Z_k: wartości, które powinny przyjąć poszczególne kryteria w rozwiązaniu końcowym.
4. Dla każdego kryterium wyznacz zbiór rozwiązań spełniających wymogi określone przez decydenta: $\mathbf{LS}_k$.
5. Przyjmij $J = K$.
6. Wyznacz zbiór $\mathbf{LS}$ będący częścią wspólną zbiorów $\mathbf{LS}_k$: $\mathbf{LS} := \bigcap_{k \in \overline{1,J}} \mathbf{LS}_k$.
7. Jeżeli $\mathbf{LS} \neq \varnothing$, to przejdź do punktu (9).
8. Przyjmij $J := J - 1$. Przejdź do punktu 6.
9. Spośród rozwiązań należących do zbioru $\mathbf{LS}$ wybierz takie, dla którego pierwsze kryterium przyjmuje wartość najwyższą. Jeżeli takich rozwiązań jest więcej niż jedno, to przy wyborze weź pod uwagę wartości następnych kryteriów w kolejności zgodnej z hierarchią sformułowaną przez decydenta.

W trakcie procedury wyznaczamy zbiór wariantów, które spełniają wszystkie wymagania określone przez decydenta. W wielu wypadkach może się jednak okazać, że rozwiązania takie nie istnieją. W takim wypadku staramy się wyznaczyć rozwiązania spełniające wymagania sformułowane dla tych kryteriów, które decydent uznaje za najważniejsze. Stopniowo pomijamy zatem wymogi sformułowane dla kryteriów o najniższej wadze do momentu, gdy zbiór

LS zawierający rozwiązania spełniające wymagania decydenta przestaje być zbiorem pustym. Spośród rozwiązań zawartych w tym zbiorze wybieramy to, dla którego pierwsze kryterium przyjmuje wartość najwyższą. Jeżeli rozwiązań takich jest więcej niż jedno, to przy wyborze uwzględniamy wartości kolejnych kryteriów zgodnie z ich pozycją w hierarchii zdefiniowanej przez decydenta. Sposób wykorzystania proponowanej procedury ilustruje poniższy przykład.

Przykład 2

Rozważamy ponownie problem decyzyjny przedstawiony w przykładzie 1. Tym razem uwzględniamy trzy kryteria. Wartości kryteriów dla kolejnych węzłów końcowych przedstawia tab. 1.

Tabela 1. Wartości kryteriów w węzłach końcowych

Nr węzła końcowego	**Kryterium**			**Nr węzła końcowego**	**Kryterium**		
	1	**2**	**3**		**1**	**2**	**3**
1	10	40	38	9	9	110	50
2	2	120	52	10	4	60	36
3	12	50	44	11	11	40	46
4	4	70	62	12	5	100	32
5	7	120	56	13	9	50	46
6	5	50	46	14	6	70	38
7	11	40	62	15	12	90	28
8	1	90	34	16	4	80	42

W pierwszej kolejności wyznaczamy strategie optymalne ze względu na każde z kryteriów z osobna. Dla pierwszego kryterium jest to strategia [**A**, **C**, **F**, H, I], dla której wartość oczekiwana pierwszego kryterium wynosi 8,50. Strategią optymalną ze względu na drugie kryterium jest strategia [**B**, D, E, **G**, **J**]. Wartość oczekiwana drugiego kryterium dla tej strategii jest równa 83,20. Ze względu na kryterium trzecie optymalna jest strategia [**A**, **D**, **F**, G, I], dla której wartość oczekiwana tego kryterium wynosi 56,12.

Przypuśćmy, że po zapoznaniu się z powyższymi informacjami decydent określił, że jest zainteresowany takimi rozwiązaniami, dla których wartości oczekiwane kolejnych kryteriów są nie niższe niż:

- kryterium 1: 6,50,
- kryterium 2: 65,00,
- kryterium 3: 42,00.

W tab. 2 przedstawiono strategie spełniające powyższe warunki. Dla przejrzystości zapisu w opisie strategii prezentowane są decyzje jedynie dla tych węzłów, które mogą być osiągnięte w wyniku ich zastosowania.

Tabela 2. Strategie spełniające warunki określone przez decydenta

Strategie spełniające warunek nałożony na wartość oczekiwaną kryterium 1		Strategie spełniające warunek nałożony na wartość oczekiwaną kryterium 2		Strategie spełniające warunek nałożony na wartość oczekiwaną kryterium 3	
strategia	**wartość kryterium 1**	**strategia**	**wartość kryterium 2**	**strategia**	**wartość kryterium 3**
[A, C, F, _, _]	8,50	[B, _, _, G, J]	83,20	[A, D, F, _, _]	56,12
[A, C, E, _, _]	8,12	[B, _, _, H, J]	79,60	[A, D, E, _, _]	55,58
[B, _, _, H, I]	7,10	[B, _, _, G, I]	72,40	[A, C, F, _, _]	42,82
[B, _, _, G, I]	6,74	[B, _, _, H, I]	68,80	[A, C, E, _, _]	42,28
		[A, D, E, _, _]	67,50		

Jak łatwo zauważyć, żadna strategia nie spełnia wszystkich warunków sformułowanych przez decydenta. Dwie strategie spełniają natomiast warunki sformułowane dla kryteriów pierwszego oraz drugiego: [B, _, _, H, I] oraz [B, _, _, G, I]. Ponieważ wyższą wartość pierwszego kryterium uzyskujemy dla pierwszej z nich, przedstawiamy ją decydentowi do oceny. Wartości oczekiwane kryteriów, jakie są uzyskiwane dla tej strategii, są następujące: 7,10; 79,60 oraz 39,28. Jeżeli wynik uzyskany dla kryterium 3 zostałby przez decydenta oceniony jako niesatysfakcjonujący, to powinien on zmodyfikować swoje wymagania, a procedurę wyznaczenia rozwiązania należałoby powtórzyć.

Podsumowanie

Drzewo decyzyjne jest popularnym narzędziem analizy dynamicznych problemów podejmowania decyzji w warunkach ryzyka. Zwykle jest ono wykorzystywane do identyfikacji rozwiązania optymalizującego wartość oczekiwaną analizowanego kryterium. W pracy przedstawiono, w jaki sposób może ono być wykorzystane do rozwiązania problemu wielokryterialnego. Przyjęto, że decydent jest w stanie uporządkować kryteria od najbardziej do najmniej ważnego, a także, że dysponując informacją na temat rozwiązań optymalnych ze względu na poszczególne kryteria potrafi sformułować warunki, które powinny spełniać strategie, by mogły być brane pod uwagę, gdy wyznaczane jest rozwiązanie końcowe problemu.

W pracy zakładaliśmy, że ocena jakości poszczególnych rozwiązań ze względu na każde z rozważanych kryteriów jest dokonywana na podstawie wartości oczekiwanej. Nie jest to jedyny możliwy sposób analizy. Do oceny rozwiązań można wykorzystać również miary oparte na prawdopodobieństwie zajścia określonego zdarzenia, a także warunkową wartość oczekiwaną. W tym drugim wypadku jednak wykorzystanie klasycznej metody wyznaczania rozwiązania optymalnego jednokryterialnego drzewa decyzyjnego nie jest możliwe. W dalszych pracach autor zamierza zaproponować metodę quasi-hierarchiczną uwzględniającą tego typu kryteria.

Literatura

Frini A., Guitouni A., Martel J.-M. (2012), *A general decomposition approach for multi-criteria decision trees*, "European Journal of Operational Research", Vol. 220, s. 452-460.

Haimes Y., Li D., Tulsiani V. (1990), *Multiobjective decision tree method*, "Risk Analysis", Vol. 10, s. 111-129.

Lootsma F.A. (1997), *Multicriteria decision analysis in a decision tree*, "European Journal of Operational Research", Vol. 101, s. 442-451.

Nowak M. (2013), *An interactive procedure for multiple criteria decision tree* [w:] A.M. Skulimowski, *Looking into the future of creativity and decision support systems. Proceedings of the 8th International Conference on Knowledge, Information and Creativity Support Systems*, Wydawnictwo Naukowe Fundacji Progress & Business, Kraków, s. 461-472.

Roy B. (1990), *Wielokryterialne podejmowanie decyzji*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa.

Trzaskalik T. (1990), *Wielokryterialne dyskretne programowanie dynamiczne; teoria i zastosowania w praktyce gospodarczej*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Katowice.

AN APPLICATION OF QUASI-HIERARCHICAL APPROACH IN MULTIPLE CRITERIA DECISION TREE

Summary: Decision tree is an effective tool for describing dynamic decision making processes under risk. It is usually used to identify the solution optimizing the expected value of the analyzed criterion. However, it is relatively rarely used when multiple conflicting criteria are considered. In the paper a quasi-hierarchical approach is used to solve a problem represented by a multiple criteria decision tree. It is assumed that the decision maker is able to define a hierarchy of the criteria and specify how much the optimal value of a more important criterion can be decreased in order to improve the value of a less important criterion. A numerical example is presented to show the applicability of the procedure.

Keywords: decision making under risk, decision tree, multiple criteria analysis, quasi-hierarchical approach.