



Dominik Krężolek

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach
Wydział Informatyki i Komunikacji
Katedra Demografii i Statystyki Ekonomicznej
dominik.krezolek@ue.katowice.pl

WERYFIKACJA TESTÓW ZGODNOŚCI NA RYNKU METALI SZLACHETNYCH

Streszczenie: Testy statystyczne odgrywają ważną rolę w szeroko rozumianym wnioskowaniu statystycznym. Weryfikacja istotności parametrów szacowanych modeli pozwala podejmować właściwe decyzje w wielu obszarach otaczającej nas rzeczywistości. W artykule omówiono wybrane testy zgodności, weryfikujące stopień podobieństwa rozkładu empirycznego z założonym rozkładem teoretycznym. Wybrano grupę testów, które można wykorzystywać w przypadku badania zgodności z rozkładami prawdopodobieństwa innymi niż należące do rodziny rozkładów normalnych. Weryfikację przeprowadzono dla danych pochodzących z rynku metali szlachetnych.

Słowa kluczowe: test statystyczny, testy zgodności, testy kwadratowe, testy supremum, metale szlachetne.

Wprowadzenie

Wnioskowanie statystyczne związane jest z formułowaniem sądów dotyczących populacji generalnej na podstawie obserwacji poczynionych w obrębie próby statystycznej. Metoda reprezentacyjna zakłada, iż odpowiednim odzwierciedleniem populacji jest próba reprezentacyjna skonstruowana w ten sposób, aby każdy element populacji cechował się jednakową szansą wylosowania do próby oraz aby próba ta była odpowiednio liczna¹. Tym samym można wskazać jednoznaczne powiązanie pomiędzy tymi dwoma zbiorami – próba jest częścią populacji, a co za tym idzie, istnieje duże prawdopodobieństwo, że rozkład cechy statystycznej w próbie reprezentacyjnej jest zbliżony do rozkładu cechy

¹ Przy złożonych schematach losowania elementy populacji mogą cechować się różnym prawdopodobieństwem doboru do próby.

statystycznej w populacji generalnej [Hellwig, 1965, s. 190-191]. Można tu przytoczyć chociażby twierdzenie Gliwienki, które głosi, że jeżeli próba statystyczna jest dostatecznie liczna, to z prawdopodobieństwem bliskim jedności można twierdzić, że nie występuje istotna różnica pomiędzy rozkładem teoretycznym (z populacji) a rozkładem empirycznym (z próby) [Plucińska i Pluciński, 2009, s. 234].

W obszarze wnioskowania statystycznego można wskazać dwa rodzaje formułowanych sądów. Pierwszą grupę stanowią stwierdzenia odnoszące się do wartości nieznanymi parametrów populacji generalnej. Można tu wskazać procedury estymacji punktowej oraz przedziałowej, a także testy istotności weryfikujące zasadność wyciąganych wniosków. Drugą grupę stanowią natomiast stwierdzenia odnoszące się do kształtu rozkładu prawdopodobieństwa obserwowanego w próbie reprezentacyjnej. W obrębie tej grupy rozważania dotyczą testów zgodności, których celem jest weryfikacja zgodności (zbieżności, podobieństwa) rozkładu empirycznego z wybranym rozkładem teoretycznym. W prezentowanej pracy przedstawiono wybrane testy statystyczne, za pomocą których można dokonać oceny zgodności rozkładów ze szczególnym uwzględnieniem testów, które możliwe są do zastosowania w przypadku nieklasycznych rozkładów prawdopodobieństwa (asymetrycznych, leptokurtycznych, gruboogonowych itd.). Zastosowanie wspomnianych testów zgodności zaprezentowano na przykładzie rozkładów prawdopodobieństwa generowanych na podstawie danych pochodzących z rynku metali szlachetnych.

1. Testy zgodności

Testowanie zgodności rozkładów empirycznych i teoretycznych stanowi jeden z ważnych etapów związanych z modelowaniem zjawisk ekonomicznych. Wykorzystywane testy statystyczne bazują w ogromnej mierze na analizie dystrybucyjnej empirycznej i umożliwiają dopasowanie modeli w sytuacji, gdy nie są znane rzeczywiste parametry rozkładów w populacji. Jednym z najpowszechniej wykorzystywanych testów zgodności jest test chi-kwadrat.

Niech populacja generalna posiada rozkład prawdopodobieństwa należący do pewnej klasy Ω o określonym typie dystrybucyjnym $F(x)$. Z populacji tej pobrano odpowiednio liczną próbę o liczebności n , której wyniki podzielono na k rozłącznych klas o liczebnościach n_i , otrzymując tym samym pewien rozkład empiryczny $F_{emp}(x)$. Hipoteza zerowa i alternatywna przedstawiają się następująco:

$$H_0: F_{emp}(x) \in \Omega,$$

$$H_1: \neg H_0.$$

Tym samym, celem określenia zgodności pomiędzy dystrybuantą empiryczną a klasą dystrybuant Ω , wyznaczana jest statystyka:

$$\chi_{k-1}^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}.$$

Statystyka χ_{k-1}^2 posiada, przy prawdziwości hipotezy H_0 , graniczny rozkład chi-kwadrat o $(k - 1)$ stopniach swobody dla poziomu istotności α . Zakładając, że na podstawie próby szacowanych jest m parametrów, liczba stopni swobody wynosi $(k - m - 1)$.

Wskazany test jest jednym z najpowszechniej wykorzystywanych w praktyce. Może być stosowany zarówno przy weryfikacji zgodności z rozkładem skokowym, jak również ciągłym. Ponadto jest często wykorzystywany przy ocenie zgodności dopasowania z rozkładem normalnym. Niemniej jednak otaczająca nas rzeczywistość wykazuje statystycznie istotne odstępstwa od tej normalności, co implikuje poszukiwanie testów weryfikujących zgodność z mniej klasycznymi rozkładami prawdopodobieństwa. W przypadku rozkładów innych niż gaussowskie (cechujących się asymetrią, leptokurtozą, czy też występowaniem obserwacji oddalonych) dużą popularnością wśród praktyków cieszą się inne testy, wśród których wymienić można dwie podstawowe grupy [Chen, 2002, s. 159-174]:

- testy kwadratowe (*quadratic tests*),
- testy supremum (*supremum tests*).

Obie grupy testów zgodności oparte są na analizie dystrybuanty empirycznej $F_{emp}(x)$ i polegają na badaniu różnicy pomiędzy wartościami empirycznymi rozważanego zbioru danych a wartościami teoretycznymi, będącymi wynikiem oszacowania nieznanymi parametrów hipotetycznych rozkładów.

1.1. Testy kwadratowe

Niech populacja generalna posiada rozkład prawdopodobieństwa należący do pewnej klasy Ω o określonym typie dystrybuant $F(x)$. Niech dany będzie szereg realizacji zmiennej losowej X . Dystrybuanta empiryczna $F_{emp}(x)$ posiada tym samym postać:

$$F_{emp}(x) = \frac{\#\{i: x_i \leq x\}}{n}.$$

Hipoteza zerowa i alternatywna przedstawiają się następująco:

$$H_0: F_{emp}(x) \in \Omega,$$

$$H_1: \neg H_0.$$

Pierwszym z proponowanych testów kwadratowych jest test Craméra-von Misesa, badający zgodność rozkładu empirycznego z wybranym rozkładem teoretycznym na podstawie analizy dystrybucji. Statystyka testująca ma następującą postać [Puig i Stephens, 2002, s. 417-424]:

$$W^2 = n \int_{-\infty}^{+\infty} [F_{emp}(x) - F(x)]^2 dF(x).$$

Ze względu na fakt nieznaności parametrów wzorcowego rozkładu konieczne jest ich uprzednie oszacowanie. Niech zmienna losowa X podlega pewnemu weryfikowanemu rozkładowi teoretycznemu z wektorem parametrów θ . Niech następnie dany będzie szereg realizacji zmiennej losowej X uporządkowany niemalejąco, tj. $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$. Po oszacowaniu wektora parametrów $\hat{\theta}$ weryfikowanego rozkładu metodą największej wiarygodności oraz podstawieniu $z_i = F(x_i, \hat{\theta})$ statystyka Craméra-von Misesa ma postać:

$$W^2 = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^n \left[z_i - \frac{(2i-1)}{2n} \right]^2.$$

Statystyka W^2 wykorzystywana jest do weryfikowania zgodności z dowolnym rozkładem, jednak najpowszechniej dotyczy testowania zgodności z rozkładem normalnym. Test ten posiada jednak pewną wadę – wykazuje mniejszą czułość na występowanie obserwacji istotnie oddalonych od centralnej części rozkładu. Dlatego też T.W. Anderson oraz D.A. Darling zaproponowali jego modyfikację ze względu na poziom grubości ogona rozkładu [Anderson, 1962, s. 1148-1159]. Statystyka ta nosi nazwę testu Andersona-Darlinga:

$$A^2 = n \int_{-\infty}^{+\infty} [F_{emp}(x) - F(x)]^2 \frac{1}{F(x)[1-F(x)]} dF(x).$$

Dla oszacowanego wektora parametrów $\hat{\theta}$ statystyka Andersona-Darlinga ma postać:

$$A^2 = -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (2i-1) [\ln(z_i) + \ln(1-z_{n+1-i})].$$

Test ten jest z reguły stosowany dla weryfikacji zgodności z rozkładem normalnym, jednak ze względu na poprawkę $\frac{1}{F(x)[1-F(x)]}$ może być także stosowany w przypadku rozkładów gruboogonowych.

Ostatnim prezentowanym testem kwadratowym jest test U^2 Watsona [Watson, 1961, s. 109-114]. Statystyka testująca ma postać:

$$U^2 = n \int_{-\infty}^{+\infty} \left[F_{emp}(x) - F(x) - \int_{-\infty}^{+\infty} [F_{emp}(x) - F(x)] dF(x) \right]^2 dF(x).$$

Test ten jest modyfikacją statystyki Craméra-von Misesa i ma szerokie zastosowanie w przypadku rozkładów gruboogonowych oraz asymetrycznych. Dla oszacowanego wektora parametrów $\hat{\theta}$ statystyka Watsona ma postać:

$$U^2 = W^2 - n(\bar{z} - 0,5)^2,$$

gdzie W^2 jest statystyką Craméra-von Misesa, natomiast \bar{z} oznacza średnią arytmetyczną zmiennej z_i .

1.2. Testy supremum

Testy supremum bazują na maksymalnej bezwzględnej różnicy pomiędzy dystrybuantą empiryczną a założoną dystrybuantą teoretyczną. Wśród nich zaprezentowane zostaną testy Kołmogorowa, Kołmogorowa-Smirnowa oraz Kuipera.

Niech populacja generalna posiada rozkład prawdopodobieństwa należący do pewnej klasy Ω o określonym typie ciągłych dystrybuant $F(x)$. Z populacji tej pobrano odpowiednio liczną próbę o liczebności n , której wyniki podzielono na k rozłącznych klas o liczebnościach n_i , otrzymując tym samym pewien rozkład empiryczny $F_{emp}(x)$. Hipoteza zerowa i alternatywna przedstawiają się następująco:

$$H_0: F_{emp}(x) \in \Omega,$$

$$H_1: \neg H_0.$$

Następnie, celem weryfikacji zgodności rozkładu empirycznego i teoretycznego, wyznaczana jest statystyka:

$$D = \sup_x |F(x) - F_{emp}(x)|$$

oraz

$$\lambda = D\sqrt{n}.$$

Statystyka λ posiada, przy prawdziwości hipotezy H_0 , rozkład Kołmogorowa, natomiast wartości krytyczne odczytywane są dla poziomu ufności $(1 - \alpha)$.

W literaturze spotykana jest także pewna modyfikacja testu Kołmogorowa-Smirnowa. Podtrzymując dotychczasowe założenia, niech populacja generalna posiada rozkład prawdopodobieństwa należący do pewnej klasy Ω o określonym typie ciągłych dystrybuant $F(x)$. Niech ponadto $D^+ = \sup_x \{F_{emp}(x) - F(x)\}$ oraz $D^- = \sup_x \{F(x) - F_{emp}(x)\}$. Statystyka Kołmogorowa-Smirnowa ma tym samym postać:

$$D = \max\{D^+, D^-\}.$$

Dla oszacowanego wektora parametrów $\hat{\theta}$ statystyka Kołmogorowa-Smirnowa ma postać:

$$D = \max\{D^+, D^-\},$$

z tym, że $D^+ = \max_i \left\{ \frac{i}{n} - z_i \right\}$, natomiast $D^- = \max_i \left\{ z_i - \frac{i-1}{n} \right\}$.

W oparciu o statystykę Kołmogorowa-Smirnowa holenderski matematyk Nicolaas Hendrik Kuiper opracował test, za pomocą którego możliwa jest weryfikacja zgodności rozkładu empirycznego z dowolnym rozkładem teoretycznym (w tym także z rozkładami gruboogonowymi i asymetrycznymi). Formuła ma następującą postać [Kuiper, 1960, s. 38-47]:

$$V = D^+ + D^-,$$

gdzie $D^+ = \sup_x \{F_{emp}(x) - F(x)\}$ oraz $D^- = \sup_x \{F(x) - F_{emp}(x)\}$.

Dla oszacowanego wektora parametrów $\hat{\theta}$ statystyka Kuipera ma taką samą postać, z tym że $D^+ = \max_i \left\{ \frac{i}{n} - z_i \right\}$ oraz $D^- = \max_i \left\{ z_i - \frac{i-1}{n} \right\}$.

Wrażliwość testu Kuipera w ogonach rozkładów jest podobna, jak w przypadku testu Andersona-Darlinga, stąd często testy te stosowane są zamiennie.

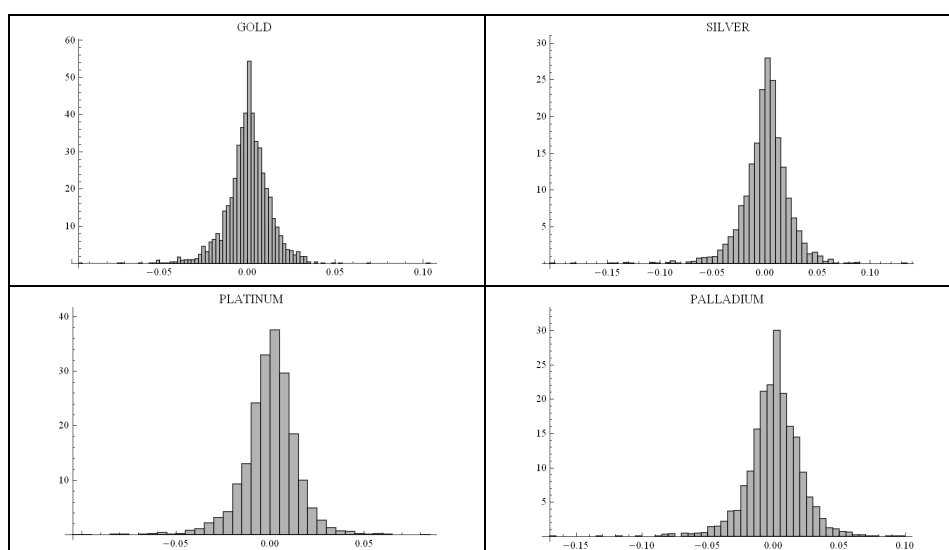
2. Przykład empiryczny

Zastosowanie wybranych testów zgodności pokazano na przykładzie rzeczywistych danych reprezentowanych przez dzienne logarytmiczne stopy zwrotu cen spot wybranych metali szlachetnych notowanych na London Metal Exchange w okresie styczeń 2005-marzec 2014. Rozważane metale to złoto (GOLD), srebro (SILVER), platyna (PLATINUM) oraz pallad (PALLADIUM). Dane reprezentowane są przez szeregi czasowe składające się z 2409 obserwacji. Jako rozkłady teoretyczne wybrano rozkład normalny, rozkład alfa-stabilny oraz skośny rozkład Laplace'a. Jako metodę szacowania nieznanymi parametrów zadanych rozkładów teoretycznych wybrano metodę największej wiarygodności. We wszelkich obliczeniach przyjęto poziom istotności 0,01.

W początkowym etapie badania przeanalizowano statystyki opisowe oraz histogramy dla rozważanych danych.

Tabela 1. Statystyki opisowe

Miara / Metal	GOLD	SILVER	PLATINUM	PALLADIUM
Średnia	0,00046	0,00047	0,00020	0,00060
Kwartyl 1	-0,00534	-0,00969	-0,00653	-0,00956
Kwartyl 2	0,00082	0,00183	0,00087	0,00099
Kwartyl 3	0,00738	0,01232	0,00797	0,01200
Wariancja	0,00016	0,00051	0,00021	0,00042
Odchylenie standardowe	0,01270	0,02260	0,01460	0,02052
Skośność	-0,43057	-1,26544	-0,72378	-0,65142
Kurtoza	8,57452	11,92510	8,47703	7,97074



Rys. 1. Histogramy empiryczne

Wyniki przedstawione w tabeli 1 wskazują na pewnie specyficzne cechy szeregów czasowych. Zaobserwowano wysoki stopień leptokurtozy, co świadczy o istotnej koncentracji realizacji stóp zwrotu w obszarze średniej. Ponadto wskazano lewostronną asymetrię, co oznacza większe prawdopodobieństwo realizacji stopy zwrotu powyżej poziomu przeciętnego. Dodatkowo lewostronna asymetria oznacza, że lewy ogon empirycznego rozkładu jest grubszy, co wskazuje na możliwość realizacji ujemnej stopy zwrotu na poziomie istotnie oddalonym od przeciętnego. Wnioski te nasuwają zasadne podstawy do oceny zgodności rozkładów empirycznych z proponowanymi rozkładami teoretycznymi.

W tabeli 2 przedstawiono wyniki uzyskane dla weryfikacji normalności rozkładu stóp zwrotu cen badanych aktywów. Parametry dopasowanego rozkładu normalnego, otrzymane MNW, przedstawiono w tabeli 1 (średnia, odchylenie standardowe). Hipoteza zerowa oraz alternatywna przedstawiają się następująco:

$$H_0: F_{emp}(x) \in \Omega_{norm},$$

$$H_1: \neg H_0.$$

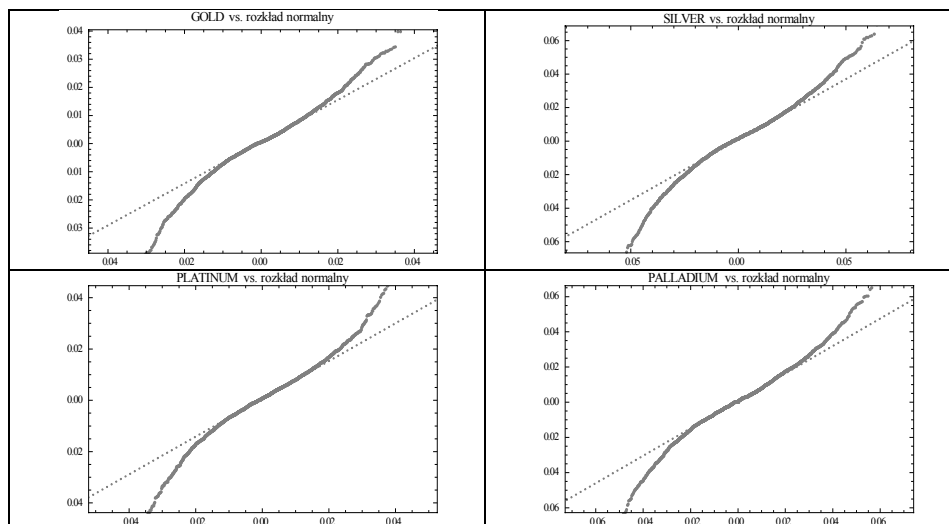
Tabela 2. Testy zgodności: GOLD, SILVER – rozkład normalny

GOLD	Statystyka testująca	p -value	SILVER	Statystyka testująca	p -value
χ^2 Pearsona	242,56	$6,87 \times 10^{-29}$	χ^2 Pearsona	275,82	$6,35 \times 10^{-35}$
W^2	4,07	$3,35 \times 10^{-10}$	W^2	5,79	$6,51 \times 10^{-14}$
A^2	22,88	0	A^2	32,56	0
U^2	3,95	0	U^2	5,48	0
λ	0,07	$5,39 \times 10^{-12}$	λ	0,08	$1,27 \times 10^{-14}$
V	0,12	$5,01 \times 10^{-30}$	V	0,14	$2,32 \times 10^{-39}$

Tabela 3. Testy zgodności: PLATINUM, PALLADIUM – rozkład normalny

PLATINUM	Statystyka testująca	p -value	PALLADIUM	Statystyka testująca	p -value
χ^2 Pearsona	233,58	$2,74 \times 10^{-27}$	χ^2 Pearsona	244,85	$2,67 \times 10^{-29}$
W^2	4,44	$5,26 \times 10^{-11}$	W^2	3,37	$1,17 \times 10^{-8}$
A^2	26,55	0	A^2	19,88	$2,50 \times 10^{-7}$
U^2	4,27	0	U^2	3,28	0
λ	0,07	$6,24 \times 10^{-12}$	λ	0,07	$4,05 \times 10^{-10}$
V	0,13	$1,22 \times 10^{-33}$	V	0,11	$2,64 \times 10^{-24}$

Testy zgodności jednoznacznie odrzucają hipotezę głoszącą, że empiryczne rozkłady stóp zwrotu cen badanych metali należą do rodziny rozkładów normalnych. Graficznym potwierdzeniem są wykresy kwantylowe. Widać wyraźnie występowanie licznych obserwacji w dolnym i górnym ogonie, co jednoznacznie sugeruje rozbieżność z rozkładem normalnym.



Rys. 2. Wykresy kwantylowe – rozkład normalny

Rozkłady alfa-stabilne stanowią pewną specyficzną rodzinę rozkładów prawdopodobieństwa cechujących się występowaniem tzw. parametru kształtu, za pomocą którego możliwe jest modelowanie grubości ogona rozkładu. Ma to szczególne znaczenie przy wyznaczaniu kwantylowych mierników ryzyka inwestycyjnego. Zapis formalny rozkładu alfa-stabilnego możliwy jest za pomocą funkcji charakterystycznej.

Zmienna losowa X posiada rozkład alfa-stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy $X = \gamma Z + \delta$, $\gamma > 0$, $\delta \in R$ oraz Z jest zmienną losową określoną funkcją charakterystyczną postaci [Samorodnitsky i Taqqu, 1994, s. 2]:

$$\varphi_{stab}(t) = E[\exp\{itZ\}] = \begin{cases} \exp\left\{-|t|^\alpha \left[1 - i\beta \operatorname{sgn}(t) \tan \frac{\pi\alpha}{2}\right]\right\}, & \alpha \neq 1 \\ \exp\left\{-|t| \left[1 + i\beta \frac{2}{\pi} \operatorname{sgn}(t) \ln|t|\right]\right\}, & \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\text{gdzie } 0 < \alpha \leq 2, -1 \leq \beta \leq 1 \text{ oraz } \operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & \Leftrightarrow t > 0 \\ 0 & \Leftrightarrow t = 0 \\ -1 & \Leftrightarrow t < 0 \end{cases}$$

Parametry opisujące rozkład alfa-stabilny to parametr kształtu α , parametr skośności β , parametr skali γ oraz parametr położenia δ . Dla analizowanych metali szlachetnych oszacowania parametrów uzyskane metodą MNW przedstawiono w tabeli 4.

Tabela 4. Parametry rozkładu alfa-stabilnego *

Metal / Parametr	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\gamma}$	$\hat{\delta}$
GOLD	1,69372	-0,22783	0,00717	0,00040
SILVER	1,65882	-0,28539	0,01205	0,00041
PLATINUM	1,66488	-0,26245	0,00793	0,00005
PALLADIUM	1,70737	-0,17183	0,01171	0,00062

* Ze względu na brak jawnej postaci funkcji gęstości (konieczność szacowania numerycznie) nie wyznaczono błędów szacunków parametrów.

Wyniki estymacji parametrów rozkładów alfa-stabilnych potwierdzają powszechnie przyjęte własności finansowych szeregów czasowych: empiryczne rozkłady są gruboogonowe i asymetryczne (w przypadku analizowanych danych wskazano asymetrię lewostronną). Ponadto z powodu oszacowania wartości parametru stabilności α poniżej 2 wykazano nieskończoność wariancji oraz reprezentację wartości oczekiwanej parametrem położenia rozkładu.

Tabela 5. Testy zgodności: GOLD, SILVER – rozkład stabilny

GOLD	Statystyka testująca	p -value	SILVER	Statystyka testująca	p -value
1	2	3	4	5	6
χ^2 Pearsona	73,530	0,00461	χ^2 Pearsona	59,132*	0,07695
W^2	0,388*	0,07770	W^2	0,319*	0,11982

cd. tabeli 5

1	2	3	4	5	6
A^2	2,067*	0,08436	A^2	1,716*	0,13243
U^2	0,386	0,00697	U^2	0,318	0,00869
λ	0,026*	0,07468	λ	0,023*	0,15900
V	0,049	0,00048	V	0,045	0,00208

* Zgodność z rozkładem stabilnym.

Tabela 6. Testy zgodności: PLATINUM, PALLADIUM – rozkład stabilny

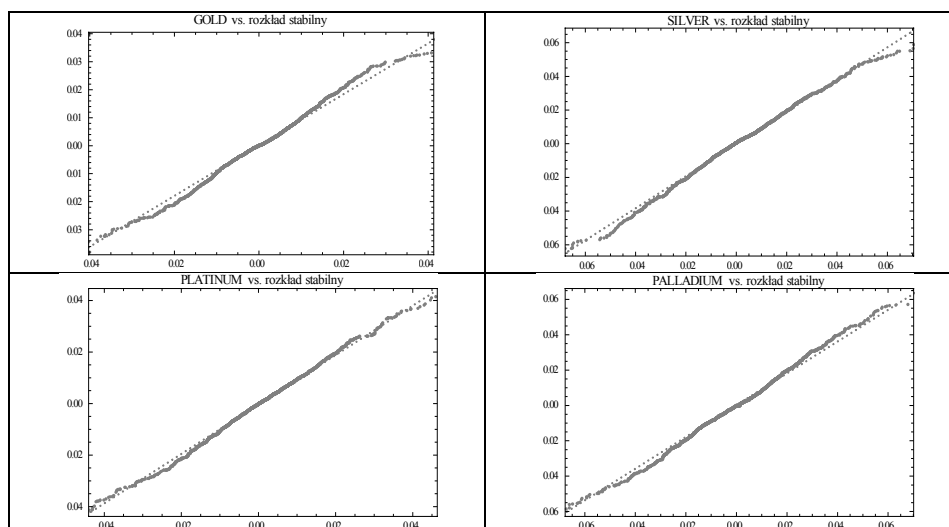
PLATINUM	Statystyka testująca	p -value	PALLADIUM	Statystyka testująca	p -value
χ^2 Pearsona	48,706*	0,32625	χ^2 Pearsona	128,218	$6,34 \times 10^{-10}$
W^2	0,085*	0,66161	W^2	0,271*	0,16379
A^2	0,551*	0,69497	A^2	1,429*	0,19427
U^2	0,085*	0,36424	U^2	0,266	0,00999
λ	0,014*	0,74950	λ	0,029*	0,03661
V	0,027*	0,36201	V	0,046	0,00144

* Zgodność z rozkładem stabilnym.

Testowanie zgodności empirycznych rozkładów stóp zwrotu cen metali szlachetnych z rozkładem alfa-stabilnym wykazało istotne podobieństwo w przypadku prawie wszystkich prezentowanych testów. Dla empirycznego rozkładu złota (GOLD) odrzucono hipotezę o alfa-stabilności testami χ^2 Pearsona, Watsona oraz Kuipera. Dla inwestycji w srebro (SILVER) odrzucenie hipotezy zerowej potwierdzono testem Watsona i Kuipera. W przypadku platyny (PLATINUM) wszystkie testy wskazały zgodność z rozkładem alfa-stabilnym, natomiast dla palladu (PALLADIUM) stabilność odrzucono testami χ^2 Pearsona, Watsona oraz Kuipera.

Na rys. 3 zaprezentowano wykresy kwantylowe, na podstawie których dokonano graficznej oceny zgodności. Potwierdzają one uzyskane wyniki za pomocą prezentowanych testów. Rozkłady empiryczne wykazują znacznie lepszy stopień dopasowania do rozkładów teoretycznych, niż przy weryfikacji z rozkładem normalnym.

Przedstawione testy statystyczne wykorzystywane są do weryfikacji zgodności z różnej klasy teoretycznymi rozkładami prawdopodobieństwa. Wyniki analizy empirycznej sugerują, iż klasyczne wnioskowanie statystyczne należy uzupełnić narzędziami pozwalającymi weryfikować dopasowanie do danych empirycznych wykazujących duży stopień rozbieżności z powszechnie stosowanym założeniem normalności rozkładu prawdopodobieństwa.



Rys. 3. Wykresy kwantylowe – rozkład alfa-stabilny

Podsumowanie

W artykule zaprezentowano pewne testy statystyczne, za pomocą których możliwa jest weryfikacja hipotezy o zgodności empirycznego rozkładu prawdopodobieństwa z założonym rozkładem teoretycznym. Wybór testów nie jest przypadkowy. Główną przesłanką przy ich wyborze było kryterium możliwości zastosowania w przypadku weryfikowania zgodności z rozkładami nieklasycznymi. Taką grupę stanowi rodzina rozkładów alfa-stabilnych. Cechują się one wysokim poziomem leptokurtozy, asymetrii oraz występowaniem grubych ogonów. Testy wybrano więc tak, aby uwzględniały te charakterystyki w empirycznych rozkładach prawdopodobieństwa. Badanie przeprowadzone dla danych pochodzących z rynku metali szlachetnych pozwoliło pozytywnie zweryfikować możliwość ich zastosowania.

Literatura

- Anderson T.W. (1962), *On the Distribution of the Two-Sample Cramer-von Mises Criterion*, „Annals of Mathematical Statistics”, Vol. 33, No. 3.
- Chen C. (2002), *Tests for the Goodness-Of-Fit of the Laplace Distribution*, „Communications in Statistics – Simulation and Computation”, Vol. 31, No. 1.
- Hellwig Z. (1965), *Elementy rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej*, PWN, Warszawa.

Kuiper N.H. (1960), *Tests Concerning Random Points on a Circle*, Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, Series A, No. 63.

Plucińska A., Pluciński E. (2009), *Probabilistyka: Rachunek prawdopodobieństwa. Statystyka matematyczna. Procesy stochastyczne*, WNT, Warszawa.

Puig P., Stephens M.A. (2002), *Tests of Fit for the Laplace Distribution, with Applications*, „Technometrics”, Vol. 42, No. 4.

Samorodnitsky G., Taqqu M.S. (1994), *Stable non-gaussian random processes. Stochastic Models with Infinite Variance*, Champan & Hall, New York.

Watson G.S. (1961), *Goodness-of-Fit Tests on a Circle*, „Biometrika”, No. 48.

VERIFICATION OF GOODNESS-OF-FIT TESTS ON THE PRECIOUS METALS MARKET

Summary: Statistical tests play an important role in statistical inference. The assessments of significance of estimated parameters is strictly related to decision making problems based on estimated models. In this paper some goodness-of-fit tests are discussed. This group of tests has been divided in two sub-groups: quadratic and supremum tests. Both can be used especially if non-classical theoretical probability distribution is considered (leptokurtic, asymmetry, heavy-tailed). The empirical example is based on the data from precious metals market.

Keywords: statistical test, goodness-of-fit tests, quadratic tests, supremum tests, precious metals.