

PIOTR KĘBŁOWSKI

WŁAŚCIWOŚCI WYBRANYCH METOD MAŁOPRÓBKOWEGO WNISKOWANIA O RZĘDZIE KOINTEGRACJI¹

1. WPROWADZENIE

Wnioskowanie o liczbie relacji długookresowych (rzędzie kointegracji) w wektorowym modelu korekty błędem za pomocą testów opartych na rozkładach asymptotycznych prowadzi często do błędnych wniosków, gdy próby są małoliczne lub umiarkowanie liczne. Wyniki analiz Monte Carlo (zob. Toda, 1994, 1995; Haug, 1996; Gonzalo i Pitarakis, 1999) wskazują, że empiryczny rozmiar testu może bardzo znacząco różnić się od rozmiaru nominalnego. Również moc testu może być niska w krótkiej próbie, pomimo iż jest on zgodny, a rozkład asymptotyczny dla prawdziwej hipotezy alternatywnej jest zdegenerowany. Problem ten jest tym poważniejszy, im mniejsza jest liczba obserwacji oraz im większy jest wymiar procesu stochastycznego oraz stopień opóźnień procesu VAR. Ponadto, gdy parametry procesu $I(1)$ generującego szereg implikują, iż jest on bliski procesowi $I(0)$ lub $I(2)$, małopróbkowe właściwości testów są niesatysfakcjonujące. Na przykład, w przypadku testu rzędu kointegracji w wektorowym modelu korekty błędem opartego na regule ilorazu wiarygodności (LR) rozmiar testu dąży do jedności, gdy proces generujący szereg jest prawie zintegrowany w stopniu drugim (por. Johansen, 2002).

W artykule porównane są własności testów LR rzędu kointegracji z dostosowaniami małopróbkowymi. Własności testów analizowane są za pomocą modelu VEC dla różnych: szybkości dostosowań mechanizmu(ów) korekty błędem oraz siły efektów krótkookresowych. Wpływ korelacji składników losowych komponentu stacjonarnego i niestacjonarnego badany jest za pomocą formy kanonicznej modelu VEC. Zgodnie z propozycją Berana (1988), wśród testów małopróbkowych rozważony jest też test bootstrapowy z poprawką Bartletta w roli surogatu podwójnego bootstrapu.

Zasadnicze wnioski prezentowanego badania są następujące. Po pierwsze, test LR rzędu kointegracji z poprawką Bartletta zwykle najskuteczniej redukuje znie-

¹ Artykuł przedstawia wybrane wyniki z rozprawy doktorskiej autora pt. „Małopróbkowe wnioskowanie o rzędzie kointegracji”, obronionej w 2009 roku na Wydziale Ekonomiczno-Socjologicznym Uniwersytetu Łódzkiego. Praca naukowa finansowana ze środków MNiSW jako projekt badawczy nr N111 019 31/2139 pt.: „Małopróbkowe wnioskowanie o rzędzie kointegracji”. Autor pragnie podziękować Recenzentom za wniesione uwagi.

kształcenie rozmiaru testu, test bootstrapowy oraz test bootstrapowy z poprawką Bartletta cechują się zwykle nieznacznie większym zniekształceniem rozmiaru testu, za wyjątkiem sytuacji, gdy proces generujący dane jest bliski procesowi $I(2)$, z kolei standardowy test asymptotyczny oraz testy z prostymi poprawkami na liczbę stopni swobody posiadają często bardzo duże zniekształcenie rozmiaru testu, co znacząco ogranicza ich przydatność do wnioskowania o rzędzie kointegracji. Po drugie, test LR rzędu kointegracji z poprawką Bartletta posiada zwykle nieznacznie większą moc, niż test bez poprawki. Po trzecie, wiarygodne wnioskowanie o liczbie relacji długookresowych bez informacji a priori możliwe jest zwykle jedynie dopiero w umiarkowanie licznych próbach, zawierających przynajmniej ok. 100 obserwacji, choć w przypadku gdy siła mechanizmu korekty błędem jest niska, wówczas identyfikacja związku długookresowego może wymagać liczniejszej próby.

Część druga artykułu omawia różne poprawki nakładane na statystykę testu LR rzędu kointegracji, w tym poprawkę Bartletta (zob. Johansen, 2002, 2005; omówienie w: Kęblowski 2006a/b, 2009). Część trzecia przedstawia znane własności testów z poprawkami i testu bootstrapowego oraz omawia możliwość zastosowania testu bootstrapowego z poprawką Bartletta do weryfikacji rzędu kointegracji. Część czwarta przedstawia strukturę procesów generujących dane, przyjęte założenia i wartości parametrów oraz wyniki symulacji Monte Carlo. Część piąta zawiera podsumowanie.

2. METODY WNISKOWANIA MAŁOPRÓBKOWEGO

Metody zmniejszające odchylenie empirycznego rozmiaru testu w stosunku do rozmiaru nominalnego podzielić można na dwie grupy. Celem metod z pierwszej grupy jest oszacowanie dokładnej wartości krytycznej dla danej długości próby i (nieznanych) parametrów DGP. Z kolei, celem metod z drugiej grupy jest wyznaczenie poprawki nakładanej na statystykę, tak aby rozkład statystyki z poprawką był tożsamy lub zbliżony w krótkiej próbie do rozkładu asymptotycznego.

Aproksymanta dokładnej wartości krytycznej wyznaczana jest: (i) poprzez rozwinięcie asymptotyczne wyższego rzędu, zwykle rozwinięcie Edgewortha (1905), (ii) za pomocą metody Monte Carlo oraz opartej na niej metody powierzchni odpowiedzi (zob. np. Hendry, 1984), (iii) za pomocą repróbki, w tym metody bootstrap (zob. Efron, 1979).

Wyznaczenie poprawki nakładanej na statystykę tak, aby rozkład statystyki z poprawką był zbliżony w krótkiej próbie do rozkładu asymptotycznego przeprowadzone jest albo za pomocą analiz Monte Carlo małopróbkowych właściwości testu, albo poprzez rozwinięcia asymptotyczne, które dowodzą, iż rząd wielkości reszty alternatywnej aproksymacji jest niższy niż w przypadku rozkładu asymptotycznego rzędu pierwszego. Bezpośrednim zastosowaniem drugiego z wyżej wymienionych podejść jest rozwiązanie zaproponowane przez Bartletta (1937, 1954).

Idea poprawki Bartletta jest dość intuicyjna i sprowadza się do zbliżenia wartości oczekiwanej statystyki w krótkiej próbie do asymptotycznej wartości oczekiwanej, z założeniem, że pozostałe momenty rozkładu są również lepiej aproksymowane. Załóżmy, że wartość oczekiwana statystyki ilorazu wiarygodności dąży do wartości asymptotycznej z błędem $O(T^{-1})$:

$$E(LR) = E\left(\lim_{T \rightarrow \infty}(LR)\right) + O(T^{-1}), \quad (1)$$

co w szczególności zachodzi, gdy spełnione są warunki regularności zdefiniowane przez Wilksa (1938), a aproksymację rzędu pierwszego stanowi rozkład χ^2 . Wówczas możliwość wyprowadzenia poprawki Bartletta zależy od istnienia następującego rozwinięcia asymptotycznego:

$$E(LR) = E\left(\lim_{T \rightarrow \infty}(LR)\right) \cdot \left(1 + \frac{b}{T} + O(T^{-2})\right), \quad (2)$$

gdzie stała b może być oszacowana w sposób zgodny gdy prawdziwa jest hipoteza zerowa, oraz od zbieżności $LR/E(LR)$ do $\lim_{T \rightarrow \infty}(LR)/E\left(\lim_{T \rightarrow \infty}(LR)\right)$ wraz ze wzrostem długości próby. Stąd też poprawkę Bartletta można wyprowadzić z przybliżonej równości:

$$\lim_{T \rightarrow \infty}(LR) \approx LR \cdot \frac{E\left(\lim_{T \rightarrow \infty}(LR)\right)}{E(LR)}, \quad (3)$$

a statystyka z poprawką Bartletta dana jest jako:

$$LR^{BC} = LR / (1 + \hat{b}T^{-1}). \quad (4a)$$

Alternatywnie, statystyka z poprawką typu Bartletta określona może być jako (por. Cribari-Neto i Cordeiro, 1996):

$$LR^{BC1} = LR(1 - \hat{b}'T^{-1}), \quad (4b)$$

czy też:

$$LR^{BC2} = LR \cdot \exp(-\hat{b}''T^{-1}). \quad (4c)$$

Statystyki LR^{BC} , LR^{BC1} i LR^{BC2} są asymptotycznie ekwiwalentne, gdy składniki $o(T^{-1})$ nie są rozważane. Należy zauważyć, iż spośród statystyk (4a) – (4c), jedynie statystyka (4c) zapewnia, iż statystyka z poprawką Bartletta jest nieujemna.

W przypadku gdy spełnione są warunki regularności określone przez Wilksa (1938), błąd aproksymacji kwantyli rozkładu małopróbkowego za pomocą kwantyli rozkładu χ^2 jest $O(T^{-2})$ (zob. Barndorf-Nielsen i Hall, 1988; Lawley, 1956). Z kolei w przypadku szeregów generowanych przez procesy niestacjonarne, w tym zintegrowane, składniki $O(T^{-1})$ nie są równe zero w rozwinięciach asymptotycznych momentów testu ilorazu wiarygodności. Jednakże parametry związane ze składnikiem o rzędzie wielkości T^{-1} rozwinięć asymptotycznych poszczególnych momentów statystyki z poprawką Bartletta są znacząco mniejsze, niż odpowiednie parametry dla statystyki bez tej poprawki (zob. Nielsen, 1997; Jensen i Wood, 1997; Bravo, 1999).

Wyniki eksperymentów Monte Carlo dotyczących małopróbkowych właściwości testów mogą być wykorzystane do konstrukcji poprawek statystyk tak, iż rozmiar empiryczny testu z poprawką jest bliższy rozmiarowi nominalnemu w krótkiej próbie, niż rozmiar testu bez poprawki. Otrzymane w ten sposób poprawki zmniejszają najczęściej zniekształcenie rozmiaru wynikające z długości efektywnej próby lub wymiaru procesu stochastycznego, jednakże nie uwzględniają zależności rozkładu małopróbkowego statystyki względem parametrów procesu generującego szereg.

Na podstawie wyników eksperymentów Monte Carlo, Reinsel i Ahn (1989, 1992) oraz Reimers (1992) zaproponowali poprawkę statystyki LR dla testu rzędu kointegracji postaci: $1 - KPT^{-1}$, a statystyka z poprawką określona jest jako:

$$LR^{RA} = LR(T - KP)/T = LR(1 - KPT^{-1}). \quad (5)$$

Propozycja Reinsela i Ahna nawiązuje do wzoru (4b), jednak nie stanowi poprawki Bartletta, bowiem składniki $O(T^{-1})$ rozwinięcia asymptotycznego wartości oczekiwanej statystyki LR zależą od parametrów procesu generującego szereg (por. Johansen, 2002, 2005).

Powierzchnie odpowiedzi oszacowane przez Cheunga i Laia (1993) mogą być zastosowane do wyznaczenia przybliżenia odpowiedniego kwantyla rozkładu małopróbkowego albo ekwiwalentnie do obliczenia poprawki statystyki LR , określonej jako:

$$LR^{CL} = LR/(\beta_0 + \beta_1(T/(T - KP))). \quad (6)$$

Należy przy tym zauważyć, iż powierzchnie odpowiedzi oszacowane przez Cheunga i Laia są szczególnie, ponieważ jedyną zmienną objaśniającą jest odwrotność

poprawki Reinsela i Ahna. Mimo to, hipoteza $\beta_0 + \beta_1 = 1$ nie jest odrzucana przez test (zob. Cheung i Lai, 1993).

Z kolei, Hansen i Rahbek (2002) rozważają konstrukcję poprawki statystyki LR jako stosunek ilorazu wiarygodności dla maksimum dostosowanej skoncentrowanej funkcji wiarygodności, zaproponowanej przez Coxa i Reid (1987), do klasycznego ilorazu wiarygodności dla maksimum skoncentrowanej funkcji wiarygodności. Statystyka z tak uzyskaną poprawką zdefiniowana jest następująco:

$$LR^{HR} = LR(T - (K - 1)P) / T = LR(1 - (K - 1)PT^{-1}). \quad (7)$$

Poprawka Hansena i Rahbeka sprowadza się zatem do małopróbkowego wnioskowania o rzędzie kointegracji na podstawie skoncentrowanej funkcji wiarygodności z poprawkami Coxa i Reid, która uwzględnia dwa pierwsze składniki rozwinięcia asymptotycznego, gdy spełnione są warunki regularności, co implikuje poprawę małopróbkowych właściwości testu ilorazu wiarygodności.

3. WŁAŚCIWOŚCI METOD WNISKOWANIA MAŁOPRÓBKOWEGO

Wyniki badań dotyczących właściwości metod małopróbkowego wnioskowania o rzędzie kointegracji ograniczają się zwykle do eksperymentów Monte Carlo dla zaproponowanych przez autorów rozwiązań dla statystyki LR . Brak wyczerpujących badań właściwości metod małopróbkowego wnioskowania o rzędzie kointegracji wynika nie tylko z faktu, iż statystyka ilorazu wiarygodności ma często najlepsze właściwości w krótkich próbach (zob. np. Ahlgren i Juselius, 2012), lecz również dlatego, iż zastosowanie niektórych metod małopróbkowego wnioskowania jest utrudnione lub niemożliwe dla innych statystyk. Na przykład, stosunkowo często rozważana poprawka Bartletta może być zastosowana wyłącznie do statystyki ilorazu wiarygodności, bowiem dla statystyki mnożnika Lagrange'a i Walda klasyczna poprawka Bartletta wynikająca ze wzoru (2) nie istnieje, choć możliwe jest zwykle wyprowadzenie poprawki typu Bartletta, która zależy również od wyjściowej statystyki (por. Cribari-Neto i Cordeiro, 1996).

Wyniki eksperymentów Monte Carlo van Giersbergena (1996) sugerują, iż małopróbkowe właściwości testu bootstrapowego dla statystyki LR są podobne do właściwości testu ilorazu wiarygodności z poprawką Ahna i Reinsela. Z kolei wyniki badań przeprowadzonych przez Harrisa i Judge'a (1998), Omtzigta i Fachina (2006), Swensena (2006), Cavaliere i in. (2012) oraz Ahlgrena i Antella (2013) dotyczących małopróbkowych właściwości standardowego testu bootstrapowego dla statystyki LR oraz właściwości testu asymptotycznego wskazują, iż rozmiar empiryczny testu bootstrapowego jest często bliższy rozmiarowi nominalnemu, w porównaniu do rozmiaru empirycznego testu asymptotycznego, choć wniosek ten nie dotyczy całego

rozważanego obszaru w przestrzeni parametrycznej. Własności bootstrapowego testu LR dla modelu VAR z warunkową heteroskedastycznością rozważają Cavaliere i in. (2010a/b), z kolei Swensen (2011) oraz Trenkler (2009) analizują bootstrapowy test LR w przypadku występowania odpowiednio: zmiennych stacjonarnych i trendu deterministycznego w procesie generującym dane.

Zastosowanie jedno- lub wielokrotnego wstępnego uosiowiania statystyki LR może potencjalnie prowadzić do poprawy właściwości testu. Jednak metoda ta nie znajduje zastosowania w modelowaniu systemów zintegrowanych o wymiarze większym niż 2-3 zmienne, ze względu na jej znaczną intensywność numeryczną. Wyniki eksperymentów Monte Carlo przeprowadzonych przez Ahlgrena i Antella (2008) wskazują, iż rozmiary empiryczne: standardowego testu bootstrapowego oraz szybkiego podwójnego testu bootstrapowego są podobne, a przy tym zwykle znacznie bliższe rozmiarowi nominalnemu, w porównaniu do rozmiaru empirycznego testu asymptotycznego. Należy jednak zauważyć, iż szybki podwójny test bootstrapowy nie jest w tym przypadku ekwiwalentny względem standardowego podwójnego testu bootstrapowego.

Małopróbkowe właściwości testu LR z poprawkami: Reinsela i Ahna, Cheunga i Laia, Hansena i Rahbeka, są stosunkowo mało znane, a stwierdzenie, iż rozkład statystyki z poprawką jest przesunięty w lewo, podczas gdy małopróbkowy rozkład statystyki LR jest przesunięty w prawo względem wartości asymptotycznej, jest niewystarczające. Zauważyć należy jednak, iż wyniki eksperymentów Monte Carlo dla testu LR , LR^{HR} i LR^{BCI} z symulowaną korektą Bartletta, przeprowadzone przez Hansena i Rahbeka (2002) dla modelu VAR z jedną zmienną wskazują, iż zniekształcenie rozmiaru testu LR^{HR} jest często mniejsze, niż zniekształcenie testu LR , choć jednocześnie większe niż zniekształcenie testu LR^{BCI} z symulowaną korektą Bartletta. Ponadto, poprawka Reinsela i Ahna stanowi w szczególnych przypadkach drugi czynnik poprawki Bartletta.

Wyniki symulacji przeprowadzonych przez Johansena (2002) wskazują, iż poprawka Bartletta dość skutecznie zmniejsza zniekształcenie rozmiaru testu LR dla wybranych obszarów w przestrzeni parametrycznej. Jednak gdy parametry procesu wskazują, iż jest on bliski procesowi z niższym lub wyższym stopniem integracji, wówczas empiryczny rozmiar testu LR z poprawką Bartletta jest istotnie mniejszy od rozmiaru nominalnego i maleje prawie do zera wraz ze zbliżaniem się do obszaru w przestrzeni parametrycznej dla niższego albo wyższego stopnia integracji. Należy zauważyć, iż rozmiar empiryczny testu LR bez poprawki zbliża się w takich przypadkach odpowiednio do zera i jedności. Wyniki eksperymentów Monte Carlo przeprowadzonych przez Kęblowskiego (2006a/b, 2009) wskazują, iż relatywne prawdopodobieństwo nieodrżucenia fałszywej hipotezy zerowej dla testu LR z poprawką Bartletta jest stosunkowo duże dla krótkich prób.

Poprawa małopróbkowych właściwości testu LR z poprawką Bartletta może zostać potencjalnie osiągnięta poprzez zastosowanie metody bootstrap dla tej statystyki. Beran (1988) wskazuje bowiem, iż gdy spełnione są warunki regularności zde-

finiowane przez Wilksa (1938), rząd wielkości reszty rozwinięcia asymptotycznego dystrybuanty rozkładu dla testu bootstrapowego opartego na statystyce z poprawką Bartletta jest mniejszy, niż dla testu bootstrapowego bez poprawki, a jednocześnie taki sam, jak dla podwójnego testu bootstrapowego. W rozważanym przypadku, dla którego warunki regularności nie są spełnione, nie można oczekiwać takiej poprawy właściwości testu, jednakże pewna poprawa może zostać potencjalnie osiągnięta, analogicznie jak w przypadku poprawki Bartletta dla statystyki LR .

4. WYNIKI SYMULACJI MONTE CARLO

Założono, iż porównanie efektywności metod małopróbkowego wnioskowania o rzędzie kointegracji ze względu na rozmiar i moc testu, powinno zweryfikować (i) zniekształcenie rozmiaru testu dla poszczególnych metod, (ii) moc testów dla różnych długości prób i obszarów w przestrzeni parametrycznej, (iii) wpływ korelacji składników losowych komponentu stacjonarnego i niestacjonarnego na rozmiar i moc testów.

Przyjęto, iż analizowany system w wersji bazowej zawiera pięć zmiennych zintegrowanych w stopniu pierwszym, w tym cztery wspólne trendy stochastyczne. Analizie poddany zatem został system zmiennych skointegrowanych o umiarkowanym wymiarze, tak aby wnioski badania mogły być łatwo wykorzystane w zastosowaniach empirycznych, zamiast często stosowanego systemu dwuwymiarowego, który umożliwia jedynie wskazanie metod o relatywnie niesatysfakcjonujących właściwościach. Założono ponadto, iż wartość początkowa zmiennych może być niezerowa i nie występuje trend liniowy w poziomie zmiennych, zatem jedynym składnikiem deterministycznym jest stała ograniczona do przestrzeni kointegrującej wektorowego modelu korekty błędem (VEC), postaci:

$$\Delta \mathbf{y}_t = (\mathbf{y}_{t-1} \mathbf{B} + \boldsymbol{\varphi}) \mathbf{A}^T + \Delta \mathbf{y}_{t-1} \boldsymbol{\Gamma}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad (8)$$

gdzie $\mathbf{y}_t = [y_{1t} \quad y_{2t} \quad \dots \quad y_{Pt}]$, \mathbf{A} i \mathbf{B} są macierzami parametrów o wymiarach $P \times R$ i pełnego rzędu, $\boldsymbol{\Gamma}_1$ jest macierzą parametrów o wymiarach $P \times P$, $\boldsymbol{\varphi}$ jest P -elementowym wektorem parametrów, a R oznacza rząd kointegracji, czyli liczbę związków długookresowych. Należy oczekiwać, iż właściwości testów ulegną pogorszeniu wraz z rozszerzaniem części deterministycznej, np. o trend liniowy w poziomie zmiennej.

Porównanie rozmiaru empirycznego i mocy przeprowadzono dla siedmiu testów: (i) standardowego testu ilorazu wiarygodności – LR , (ii) testu LR z poprawką Bartletta – LR^{BC} , (iii) testu LR z poprawką Reinsela i Ahna – LR^{RA} , (iv) testu LR z poprawką Cheunga i Laia – LR^{CL} , (v) testu LR z poprawką Hansena i Rahbeka – LR^{HR} , (vi) bootstrapowego testu LR – LR^B , (vii) bootstrapowego testu LR z poprawką Bartletta

– LR^{BCB} . W każdym eksperymencie wyznaczano 10 tys. replikacji. Dla przyjętego rozmiaru nominalnego testu 5%, odchylenie standardowe rozmiaru wynosi wówczas 0,0022. Zatem ewentualne wyniki spoza przedziału $[0,46; 0,054]$ wskazują, iż rozmiar empiryczny rozważanego testu jest istotnie różny od rozmiaru nominalnego.

Test bootstrapowy rzędu kointegracji przeprowadzono za pomocą algorytmu zaproponowanego przez Swensena (2006, algorytm nr 1), przy czym macierze parametrów Γ_1 i ϕ szacowano za pomocą regresji zredukowanego rzędu, analogicznie jak w: Cavaliere i in. (2012). Podobnie jak w eksperymencie Monte Carlo, wartości startowe pochodzą z rozkładu normalnego standaryzowanego, a pierwsze sto obserwacji jest odrzucanych. Rozwiązanie alternatywne, polegające na wykorzystaniu ostatnich wartości szeregu z pętli eksperymentu Monte Carlo w roli wartości startowych prowadzi do analogicznych wyników. Wyznaczano 1 tys. replikacji bootstrapowych, tak aby zminimalizować spadek mocy testu bootstrapowego.

Eksperymenty zakodowane zostały w języku programowania RATS; kod źródłowy zawarty jest w: Kęblowski (2009). Czas trwania pojedynczego eksperymentu Monte Carlo (tj. łącznie dla $1,0e^4 \cdot 1,0e^3 = 1,0e^7$ replikacji) na komputerze klasy Intel Core2 1,83GHz dla $T = 50$ oraz $T = 100$ wyniósł odpowiednio około 20 i 36 godzin.

Porównanie zniekształcenia rozmiaru małopróbkowych testów rzędu kointegracji przeprowadzono za pomocą procesu (8), gdzie wartości startowe pochodzą z rozkładu normalnego standaryzowanego, a pierwsze sto obserwacji jest odrzucanych. Parametry procesu generującego dane (DGP) w wersji bazowej ($P = 5, R = 1$) określono jako: $\mathbf{B} = [1 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0]^T$, $\mathbf{A} = [\alpha \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, $\phi = [1]$, $\Gamma_1 = \xi \mathbf{I}$ oraz $\epsilon_t \sim N_p(\mathbf{0}; \mathbf{\Omega})$ i $\mathbf{\Omega} = \xi \mathbf{I}$. Rozważano długości prób równe $T = 50$ oraz $T = 100$. Wyniki przedstawiono w tabelach 1. i 2. ze względu na szybkość mechanizmu korekty błędem (parametr α , wyniki w wierszach) oraz siłę efektów krótkookresowych (parametr ξ , wyniki w kolumnach).

Tabela 1.

Rozmiar empiryczny (w %) testów małopróbkowych, $P = 5, R = 1, T = 50$, DGP (8)

$\alpha \setminus \xi$	0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
LR	7,4	9,9	16,4	32,8	66,0	98,9
LR^{BC}	0,5	0,6	0,8	1,0	1,2	2,9
LR^{RA}	0,2	0,5	1,1	3,7	17,0	81,2
-0,1 LR^{CL}	0,3	0,5	1,4	4,8	20,7	84,5
LR^{HR}	1,9	2,5	5,2	14,2	41,8	94,9
LR^B	0,2	0,2	0,5	0,5	1,2	8,6
LR^{BCB}	0,2	0,3	0,6	0,7	1,0	1,2

Tabela 1.

-0,2	<i>LR</i>	9,4	11,9	19,4	36,0	69,8	98,4
	<i>LR^{BC}</i>	0,9	0,9	1,2	1,4	2,5	2,6
	<i>LR^{RA}</i>	0,4	0,6	1,4	4,5	20,3	79,2
	<i>LR^{CL}</i>	0,6	0,8	1,8	5,8	24,5	83,1
	<i>LR^{HR}</i>	2,4	3,6	7,0	15,9	45,7	93,9
	<i>LR^B</i>	0,4	0,4	0,5	0,7	1,8	10,0
	<i>LR^{BCB}</i>	0,4	0,5	0,7	1,0	1,9	1,7
-0,4	<i>LR</i>	13,2	15,6	24,4	40,6	70,6	97,0
	<i>LR^{BC}</i>	1,8	1,9	2,5	3,4	4,2	1,8
	<i>LR^{RA}</i>	0,8	1,0	2,5	6,7	23,6	71,3
	<i>LR^{CL}</i>	1,2	1,4	3,3	8,5	27,6	75,9
	<i>LR^{HR}</i>	4,2	5,3	9,6	20,4	48,4	89,4
	<i>LR^B</i>	0,6	0,7	1,0	1,5	3,6	9,5
	<i>LR^{BCB}</i>	0,9	0,9	1,4	2,1	3,8	1,8
-0,6	<i>LR</i>	15,0	17,8	25,5	41,7	68,4	96,0
	<i>LR^{BC}</i>	2,4	2,7	3,3	4,6	4,9	1,5
	<i>LR^{RA}</i>	0,9	1,2	2,9	7,9	23,1	67,0
	<i>LR^{CL}</i>	1,3	1,7	3,7	9,9	27,2	71,8
	<i>LR^{HR}</i>	4,7	6,3	10,5	22,2	47,5	87,4
	<i>LR^B</i>	0,8	0,9	1,3	2,2	4,0	9,2
	<i>LR^{BCB}</i>	1,0	1,3	1,8	3,0	4,4	1,7
-0,8	<i>LR</i>	15,5	19,5	27,3	42,6	69,0	95,8
	<i>LR^{BC}</i>	2,8	3,5	4,5	5,0	5,0	1,0
	<i>LR^{RA}</i>	0,9	1,4	3,3	7,9	23,3	66,0
	<i>LR^{CL}</i>	1,3	1,8	4,3	9,7	27,1	70,3
	<i>LR^{HR}</i>	5,0	7,1	11,6	22,2	47,2	86,8
	<i>LR^B</i>	1,0	1,1	1,8	2,7	4,6	9,3
	<i>LR^{BCB}</i>	1,2	1,4	2,3	3,4	5,1	1,6
-0,9	<i>LR</i>	16,3	18,5	28,3	42,4	67,8	95,3
	<i>LR^{BC}</i>	3,5	3,6	4,6	5,3	4,3	1,0
	<i>LR^{RA}</i>	1,2	1,4	3,2	8,0	22,5	64,0
	<i>LR^{CL}</i>	1,6	2,0	4,2	10,1	26,6	68,8
	<i>LR^{HR}</i>	6,0	6,8	12,1	22,9	46,0	85,4
	<i>LR^B</i>	1,2	1,2	1,9	2,5	4,4	8,5
	<i>LR^{BCB}</i>	1,5	1,6	2,4	3,6	4,7	1,6

Tabela 2.

Rozmiar empiryczny (w %) testów małopróbkowych, $P = 5$, $R = 1$, $T = 100$, DGP (8)

$\alpha \setminus \zeta$		0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
-0,1	<i>LR</i>	4,1	5,1	8,1	13,9	31,6	84,4
	<i>LR^{BC}</i>	0,9	1,0	1,3	1,6	2,9	3,6
	<i>LR^{RA}</i>	1,0	1,1	2,1	3,7	13,6	66,1
	<i>LR^{CL}</i>	1,2	1,3	2,4	4,4	15,0	68,1
	<i>LR^{HR}</i>	2,2	2,5	4,4	7,8	21,9	76,4
	<i>LR^B</i>	0,6	0,4	0,6	0,9	1,6	6,7
	<i>LR^{BCB}</i>	0,6	0,5	0,6	1,1	2,0	4,4
-0,2	<i>LR</i>	7,1	8,1	11,8	17,8	33,2	80,0
	<i>LR^{BC}</i>	1,9	2,1	2,7	3,6	5,1	2,5
	<i>LR^{RA}</i>	1,9	2,2	3,6	6,4	15,9	59,2
	<i>LR^{CL}</i>	2,1	2,5	4,0	7,1	17,4	61,6
	<i>LR^{HR}</i>	3,8	4,5	6,9	11,0	23,9	70,8
	<i>LR^B</i>	0,8	0,8	1,2	1,5	2,8	6,3
	<i>LR^{BCB}</i>	0,9	1,0	1,5	1,8	3,3	4,2
-0,4	<i>LR</i>	9,6	11,3	14,2	19,3	33,0	79,0
	<i>LR^{BC}</i>	3,7	4,2	5,1	5,5	5,6	1,9
	<i>LR^{RA}</i>	2,8	3,5	5,0	7,7	16,0	57,7
	<i>LR^{CL}</i>	3,2	3,9	5,7	8,4	17,3	60,0
	<i>LR^{HR}</i>	5,5	6,6	9,0	12,3	24,1	69,2
	<i>LR^B</i>	1,3	1,5	1,7	2,3	2,8	6,1
	<i>LR^{BCB}</i>	1,4	1,6	1,9	2,5	3,3	4,1
-0,6	<i>LR</i>	11,7	11,4	14,1	19,7	33,0	78,0
	<i>LR^{BC}</i>	5,5	5,1	5,4	5,8	5,1	1,7
	<i>LR^{RA}</i>	3,9	3,9	5,0	7,9	16,1	56,9
	<i>LR^{CL}</i>	4,4	4,3	5,7	8,8	17,5	59,0
	<i>LR^{HR}</i>	7,0	7,0	9,1	13,2	23,9	67,9
	<i>LR^B</i>	2,0	2,0	2,0	2,3	2,8	6,3
	<i>LR^{BCB}</i>	2,2	2,1	2,1	2,5	3,2	4,2

Tabela 2.

-0,8	LR	10,6	11,1	14,6	19,4	32,7	78,0
	LR^{BC}	5,2	5,1	6,2	5,9	5,2	1,5
	LR^{RA}	3,4	3,6	5,5	7,6	15,6	56,5
	LR^{CL}	3,9	4,0	6,2	8,5	17,0	58,8
	LR^{HR}	6,6	6,6	9,3	12,7	23,5	68,7
	LR^B	1,9	1,6	2,1	2,3	2,8	6,3
	LR^{BCB}	2,0	1,8	2,2	2,5	3,2	4,0
-0,9	LR	10,8	12,1	13,7	19,7	32,3	78,2
	LR^{BC}	5,5	6,0	5,4	5,8	5,3	1,6
	LR^{RA}	3,5	4,2	4,7	7,5	15,5	56,7
	LR^{CL}	4,0	4,7	5,4	8,4	16,7	59,0
	LR^{HR}	6,5	7,5	8,4	12,6	23,3	68,7
	LR^B	1,9	1,9	1,9	2,6	3,4	6,3
	LR^{BCB}	2,0	2,0	2,0	2,8	3,7	4,2

Uzyskane wyniki pozwalają rozróżnić dwie grupy małopróbkowych testów rzędu kointegracji. Do pierwszej z nich zaliczyć należy testy oparte na statystykach: LR , LR^{RA} , LR^{CL} i LR^{HR} . Wspólną cechą jest to, iż rozmiar tych testów dąży do jedności, wraz ze wzrostem ξ do jedności, gdzie proces generujący szereg staje się zintegrowany w stopniu drugim. Po drugie, testy z tej grupy są stosunkowo mało wrażliwe na szybkość mechanizmu korekty błędem, co wynika z faktu, iż zmiana parametru α powoduje jedynie zmianę części rzeczywistej pierwiastka charakterystycznego λ_5 , podczas gdy jego moduł pozostaje bez zmian. Z kolei, rozmiar empiryczny pozostałych testów zależy zarówno od siły efektów krótkookresowych, jak i od szybkości mechanizmu korekty błędem, bowiem statystyki tych testów zależą od parametrów procesu generującego szereg. Wraz ze wzrostem ξ do jedności, rozmiar empiryczny testu LR^{BC} jest nadmiernie skorygowany. Podobny wniosek dotyczy testu LR^{BCB} dla krótkiej próby.

Należy zauważyć, iż zniekształcenie każdego z rozważanych testów jest znaczne dla krótkich prób, liczących mniej niż 100 obserwacji, gdy wartości parametru korekty błędem są niskie ($\alpha \geq -0,2$), szczególnie gdy efekty krótkookresowe są relatywnie słabe. Z kolei dla pozostałych obszarów w rozważanej przestrzeni parametrycznej, zwykle najlepsze właściwości posiada test LR^{BC} . Jedynie gdy proces generujący szereg jest bliski procesowi zintegrowanemu w stopniu drugim, wówczas test LR^{BCB} posiada najlepsze właściwości. Test LR^B posiada przeważnie gorsze właściwości, niż test LR^{BCB} . Zniekształcenie rozmiaru pozostałych testów jest najczęściej znaczne dla krótkich prób, choć dla umiarkowanych długości prób liczących około 100 obserwa-

cji można wskazać takie obszary w przestrzeni parametrycznej, dla których rozmiar empiryczny tych testów jest zbliżony do nominalnego.

Wyniki przedstawione w tabelach 1. i 2. pozwalają stwierdzić, iż brak właściwej kontroli rozmiaru empirycznego testu rzędu kointegracji opartego na regule ilorazu wiarygodności może nazbyt często prowadzić do wskazania na błędną hipotezę alternatywną. Spośród metod małopróbkowego wnioskowania o rzędzie kointegracji, test ilorazu wiarygodności z poprawką Bartletta posiada zwykle najmniejsze zniekształcenie rozmiaru testu, które ponadto, w porównaniu do pozostałych testów, relatywnie często mieści się w przedziale ufności. Z drugiej strony, w przypadku gdy szybkość mechanizmu korekty błędem i siła efektów krótkookresowych są niskie ($\alpha \geq -0,2$, $\xi < 0,5$), wówczas wnioskowanie może być przeprowadzone w oparciu o test LR^{HR} i komplementarnie na podstawie testu LR .

Należy zauważyć, iż zastosowanie metody bootstrap dla testu ilorazu wiarygodności z poprawką Bartletta nie prowadzi do poprawy właściwości testu, w przeciwieństwie do wyników zastosowania poprawki Bartletta dla standardowego testu ilorazu wiarygodności. Niemniej, testy LR^{BCB} i LR^B mogą być stosowane komplementarnie, szczególnie gdy proces generujący szereg jest bliski procesowi zintegrowanemu w stopniu drugim.

Porównanie mocy przeprowadzone zostało dla analogicznego system pięciu zmiennych stochastycznych zintegrowanych w stopniu pierwszym, w którym występują trzy wspólne trendy stochastyczne dla (prawdziwej) hipotezy alternatywnej. DGP został określony następująco:

$$\Delta \mathbf{y}_t^{DGP} = (\mathbf{y}_{t-1}^{DGP} \mathbf{B} + \boldsymbol{\varphi}) \mathbf{A}^T + (\mathbf{y}_{t-1}^{DGP} \mathbf{B}_1 + \boldsymbol{\varphi}_1) \mathbf{A}_1^T + \Delta \mathbf{y}_{t-1}^{DGP} \boldsymbol{\Gamma}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad (9)$$

gdzie \mathbf{B}_1 i \mathbf{A}_1 są macierzami parametrów o wymiarach $P \times (R - r)$ i pełnego rzędu, $\boldsymbol{\varphi}_1$ oznacza $(R - r)$ -elementowy wektor parametrów.

Należy zauważyć, iż moc testów LR , LR^{RA} , LR^{CL} , LR^{HR} jest identyczna, choć relatywne prawdopodobieństwa odrzucenia hipotezy zerowej będą różne, z uwagi na różnice w rozmiarze empirycznym testów. Z kolei moc testów bootstrapowych jest zbliżona do mocy standardowego, asymptotycznego testu, gdy liczba replikacji bootstrapowych jest wystarczająco duża, a ewentualna różnica mocy tych testów wynikać może wyłącznie ze sposobu wyznaczania dokładnej wartości krytycznej (por. Davidson i MacKinnon, 2000). Dlatego też, porównanie mocy testów przeprowadzone zostało dla standardowego testu LR oraz testu LR z poprawką Bartletta.

Przyjęto, iż rząd kointegracji wynosi $R = r + 1$, czyli jest większy o jeden w stosunku do założonego w hipotezie zerowej, a macierze: \mathbf{B}_1 , \mathbf{A}_1 i $\boldsymbol{\varphi}_{1,P_d}$ określone są jako: $\mathbf{B}_1 = [0 \ 1 \ 0 \ -1 \ 0]^T$, $\mathbf{A}_1 = [0 \ \alpha \ 0 \ 0 \ 0]^T$, $\boldsymbol{\varphi}_{1,P_d} = \boldsymbol{\varphi}_0 = [1]$. Dla każdej replikacji eksperymentu Monte Carlo pierwsze sto obserwacji jest odrzucanych. Kwantyle rozkładów małopróbkowych dla prawdziwej hipotezy zerowej generowano za pomocą

DGP (8), którego parametry przyjęto analogicznie do tych w analizie rozmiaru empirycznego. Jako kwantyle rozkładów asymptotycznych przyjęto wartości wyznaczone przez Johansena (1996, tabela 15.2, strona 215). Założono rozmiar nominalny testu równy 5%. Należy zauważyć, iż korekta rozmiaru testu przeprowadzona została dla tych samych wartości parametrów α i ξ , jak te przyjęte dla hipotezy alternatywnej. Zatem szybkość mechanizmu korekty błędem jest taka sama dla zidentyfikowanych relacji kointegrujących, jak i tych pozostających do zidentyfikowania. Rozważano długości prób równe $T = 50$ oraz $T = 100$.

Tabela 3.

Moc testu (w %) dla rozmiaru równego 5%, $P = 5$, $r = 1$, $R = 2$, $T = 50$, DGP (9)

$\alpha \setminus \xi$		0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
-0,1	<i>LR</i>	6,3	6,5	6,4	6,8	7,4	14,8
	<i>LR^{BC}</i>	5,8	6,2	6,4	6,8	8,5	16,1
-0,2	<i>LR</i>	8,3	8,2	8,8	9,7	10,7	30,2
	<i>LR^{BC}</i>	8,1	8,2	9,2	11,4	14,5	27,3
-0,4	<i>LR</i>	12,8	13,8	15,9	18,7	28,9	67,0
	<i>LR^{BC}</i>	14,7	15,5	19,0	21,8	34,9	55,4
-0,6	<i>LR</i>	19,0	21,4	24,5	34,2	55,6	88,4
	<i>LR^{BC}</i>	21,7	24,3	28,5	39,1	62,0	74,6
-0,8	<i>LR</i>	26,4	28,5	35,9	51,6	78,2	95,7
	<i>LR^{BC}</i>	29,6	31,9	40,8	58,7	83,5	84,0
-0,9	<i>LR</i>	29,3	32,2	41,9	60,3	85,4	97,6
	<i>LR^{BC}</i>	32,6	36,9	47,3	66,7	88,8	87,0

Tabela 4.

Moc testu (w %) dla rozmiaru równego 5%, $P = 5$, $r = 1$, $R = 2$, $T = 100$, DGP (9)

$\alpha \setminus \xi$		0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
-0,1	<i>LR</i>	9,4	10,4	12,2	14,7	20,1	58,2
	<i>LR^{BC}</i>	8,9	10,2	12,2	15,4	21,8	58,6
-0,2	<i>LR</i>	20,0	23,0	27,9	36,0	59,5	96,2
	<i>LR^{BC}</i>	20,1	23,1	29,0	38,3	62,0	94,9
-0,4	<i>LR</i>	54,0	59,9	70,8	85,9	98,5	99,9
	<i>LR^{BC}</i>	54,9	61,3	72,1	86,8	98,8	99,8

Tabela 4

-0,6	<i>LR</i>	83,5	87,5	94,0	99,0	99,9	99,9
	<i>LR^{BC}</i>	84,1	88,2	94,5	99,1	99,9	99,9
-0,8	<i>LR</i>	95,2	97,0	99,3	99,9	99,9	99,9
	<i>LR^{BC}</i>	95,5	97,3	99,4	99,9	99,9	99,9
-0,9	<i>LR</i>	97,6	98,8	99,8	99,9	99,9	99,9
	<i>LR^{BC}</i>	98,0	99,0	99,8	99,9	99,9	99,9

Wyniki przedstawione w tabelach 3. i 4. wskazują, iż moc testu ilorazu wiarygodności z poprawką Bartletta jest często istotnie większa w krótkich próbach, liczących około 50 obserwacji, niż moc standardowego testu bez tej poprawki, za wyjątkiem sytuacji gdy parametr ξ jest bliski jedności. Jednak zwiększenie długości próby do umiarkowanej, liczącej około 100 obserwacji, implikuje zmniejszenie tej różnicy tak, iż staje się ona zwykle nieistotna statystycznie.

Zaden z rozważanych testów nie posiada satysfakcjonującej mocy w krótkich próbach, za wyjątkiem niewielkiego obszaru w przestrzeni parametrycznej, dla którego zarówno szybkość mechanizmu korekty błędem, jak i siła efektów krótkookresowych są duże ($\alpha \leq -0,8$, i $\xi \geq 0,7$). Zwiększenie długości próby do umiarkowanej pozwala wskazać znaczny obszar w przestrzeni parametrycznej, dla którego moc obydwu testów jest wystarczająca. Test z poprawką Bartletta, jak i bez poprawki, jest stosunkowo mocny już dla wartości parametru α , wynoszących około $-0,5$, a im wyższa jest wartość parametru ξ , tym mocniejszy jest test. Na przykład, dla ($\alpha = -0,4$, i $\xi = 0,5$) moc testów *LR^{BC}* i *LR* wynosi, odpowiednio, 87% i 86%, a zwiększenie modułu jednego z tych parametrów powoduje szybki wzrost mocy testu.

Należy podkreślić, iż w krótkich próbach, liczących około 50 obserwacji, wiarygodne wnioskowanie o liczbie nieznanymi wektorów kointegrujących za pomocą rozważanych testów jest zwykle niemożliwe. Z drugiej strony, w umiarkowanych próbach, liczących około 100 obserwacji, wnioskowanie o rzędzie kointegracji dla procesu VEC umiarkowanego wymiaru za pomocą testu *LR^{BC}* jest zwykle poprawne, po pierwsze, gdy szybkość mechanizmu korekty błędem jest duża, a po drugie, gdy zarówno siła mechanizmów korekty błędem, jak i siła efektów krótkookresowych są przynajmniej umiarkowane. Zniekształcenie rozmiaru testu jest wówczas niewielkie, a moc testu jest stosunkowo bliska jedności. Komplementarnie, wnioskowanie można w takim przypadku oprzeć na testach *LR^B* i *LR^{BCB}*, choć charakteryzują się one zwykle większym zniekształceniem rozmiaru niż test *LR^{BC}*, a ponadto są metodami intensywnymi numerycznie. Pozostałe testy *LR*, *LR^{RA}*, *LR^{CL}* i *LR^{HR}* mogą wskazywać w takim przypadku zawyżoną liczbę relacji długookresowych w systemie.

W przypadku gdy szybkość mechanizmu korekty błędem jest mała ($\alpha \geq -0,2$), wówczas wnioskowanie o rzędzie kointegracji prowadzi zwykle do błędnych wskazań testu, nawet dla prób o umiarkowanej liczbie obserwacji. W takim przypadku, testy LR^{BC} , LR^B i LR^{BCB} są konserwatywne, a wskazania pozostałych testów prowadzą najczęściej albo do заниżenia rzędu kointegracji, gdy siła efektów krótkookresowych jest mała, albo do zawyżenia rzędu kointegracji, gdy siła efektów krótkookresowych jest duża. Zatem, gdy w systemie występują relacje kointegrujące, dla których szybkość dostosowań zmiennych do trajektorii długookresowych jest wolna, wówczas ich poprawna identyfikacja wymaga szeregu czasowego o znacznej liczbie obserwacji, pomimo zastosowania metod wnioskowania małopróbkowego.

Należy zauważyć, iż małopróbkowe właściwości testów LR , LR^{RA} , LR^{CL} i LR^{HR} zależą znacznie od parametrów procesu generującego dane. Dlatego też testy te nie stanowią uniwersalnych metod wnioskowania o rzędzie kointegracji w małowielkich próbach, choć dla określonych obszarów w przestrzeni parametrycznej mogą stanowić uzupełnienie wnioskowania w oparciu o test LR^{BC} lub LR^{BCB} , czy też LR^B .

Badanie wpływu korelacji składników losowych komponentu stacjonarnego i niestacjonarnego na rozmiar empiryczny testów przeprowadzono za pomocą formy kanonicznej modelu VEC:

$$\mathbf{y}_t^{DGP} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{1t}^{DGP} & \mathbf{y}_{2t}^{DGP} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{1,t-1}^{DGP} & \mathbf{y}_{2,t-1}^{DGP} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{1,t-2}^{DGP} & \mathbf{y}_{2,t-2}^{DGP} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{1t} & \boldsymbol{\varepsilon}_{2t} \end{bmatrix}, \quad (10)$$

gdzie pierwiastki charakterystyczne wielomianu autoregresyjnego dla \mathbf{y}_{1t}^{DGP} są większe od jedności, $\mathbf{y}_{2,0}^{DGP} \neq \mathbf{0}$, $\begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{1t} & \boldsymbol{\varepsilon}_{2t} \end{bmatrix} \sim N_p \left(\mathbf{0}; \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \boldsymbol{\Omega}_{\boldsymbol{\varepsilon}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_2} \\ \boldsymbol{\Omega}_{\boldsymbol{\varepsilon}_2 \boldsymbol{\varepsilon}_1} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \right)$, a pierwsze sto obserwacji jest odrzucanych. Wygenerowanie szeregu realizacji składnika losowego o zadanej macierzy wariancji-kowariancji wymaga policzenia macierzy $\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \boldsymbol{\Omega}_{\boldsymbol{\varepsilon}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_2} \\ \boldsymbol{\Omega}_{\boldsymbol{\varepsilon}_2 \boldsymbol{\varepsilon}_1} & \mathbf{I} \end{bmatrix}^{1/2}$, do czego wykorzystano dekompozycję spektralną macierzy.

Tabela 5.

Rozmiar empiryczny (w %) testów małopróbkowych, $P = 5$, $R = 1$, $T = 50$, DGP (10)

$\Omega_{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \setminus (\Psi_1; \Psi_2)$	(0,8; -0,1)	(0,9; -0,1)	(1,0; -0,1)	
$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T$	<i>LR</i>	6,9	5,8	5,1
	<i>LR^{BC}</i>	0,7	0,4	0,3
	<i>LR^{RA}</i>	0,2	0,1	0,1
	<i>LR^{CL}</i>	0,4	0,2	0,2
	<i>LR^{HR}</i>	1,7	1,4	1,2
	<i>LR^B</i>	0,3	0,1	0,1
	<i>LR^{BCB}</i>	0,3	0,1	0,1
$\begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,2 \\ 0,3 \\ 0,4 \end{bmatrix}^T$	<i>LR</i>	9,4	7,8	7,1
	<i>LR^{BC}</i>	1,1	0,6	0,5
	<i>LR^{RA}</i>	0,3	0,2	0,2
	<i>LR^{CL}</i>	0,7	0,4	0,2
	<i>LR^{HR}</i>	2,9	2,0	1,8
	<i>LR^B</i>	0,3	0,2	0,1
	<i>LR^{BCB}</i>	0,4	0,3	0,2
$\begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,2 \\ 0,3 \\ 0,4 \end{bmatrix}^T$	<i>LR</i>	24,3	25,0	20,9
	<i>LR^{BC}</i>	3,0	2,3	1,5
	<i>LR^{RA}</i>	2,2	2,3	1,4
	<i>LR^{CL}</i>	2,9	3,1	2,1
	<i>LR^{HR}</i>	9,5	9,9	7,5
	<i>LR^B</i>	1,5	1,4	0,8
	<i>LR^{BCB}</i>	1,9	1,5	0,9

Wyniki eksperymentów Monte Carlo przedstawiono w tabelach 5. i 6., ze względu na kowariancję komponentu stacjonarnego z komponentem niestacjonarnym (macierz $\Omega_{\varepsilon_1 \varepsilon_2}$, wyniki w wierszach) oraz wartości parametrów wielomianu autoregresyjnego komponentu stacjonarnego (macierze: Ψ_1 i Ψ_2 , wyniki w kolumnach), przy czym najmniejszy moduł pierwiastka charakterystycznego wielomianu autoregresyjnego, odpowiadającego komponentowi stacjonarnemu, dany jest odpowiednio jako: 1,56, 1,30 i 1,13. Wyniki wskazują, iż rozmiar empiryczny testów maleje wraz ze zbliżaniem się pierwiastka charakterystycznego do koła jednostkowego. Wniosek ten jest spójny z wynikami zawartymi w tabelach 1. i 2. Z kolei, wzrost korelacji składników losowych komponentu stacjonarnego i niestacjonarnego implikuje wzrost rozmiaru

empirycznego testów, przy czym w przypadku testów: LR^{BC} , LR^B i LR^{BCB} rozmiar empiryczny testu dąży do rozmiaru nominalnego, w przeciwieństwie do testów: LR , LR^{RA} , LR^{CL} i LR^{HR} . Należy podkreślić, iż zniekształcenie rozmiaru testu LR^{BC} w krótkich próbach jest niewielkie, gdy korelacja składników losowych komponentu stacjonarnego i niestacjonarnego jest znaczna. Z drugiej strony, w przypadku niewielkiej korelacji składników losowych tych komponentów procesu, standardowy test ilorazu wiarygodności posiada relatywnie najmniejsze zniekształcenie rozmiaru testu wtedy, gdy pierwiastki charakterystyczne wielomianu autoregresyjnego komponentu stacjonarnego znajdują się blisko koła jednostkowego.

Tabela 6.

Rozmiar empiryczny (w %) testów małopróbkowych, $P = 5$, $R = 1$, $T = 100$, DGP (10)

$\Omega_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} \setminus (\Psi_1; \Psi_2)$	(0,8; -0,1)	(0,9; -0,1)	(1,0; -0,1)	
$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T$	LR	5,2	3,7	1,7
	LR^{BC}	1,9	1,0	0,3
	LR^{RA}	1,2	0,8	0,3
	LR^{CL}	1,5	0,8	0,3
	LR^{HR}	2,7	1,8	0,7
	LR^B	0,6	0,4	0,1
	LR^{BCB}	0,7	0,5	0,1
$\begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,2 \\ 0,3 \\ 0,4 \end{bmatrix}^T$	LR	7,0	5,7	2,9
	LR^{BC}	2,4	1,4	0,6
	LR^{RA}	1,8	1,3	0,5
	LR^{CL}	2,1	1,5	0,6
	LR^{HR}	3,7	2,9	1,3
	LR^B	0,8	0,7	0,3
	LR^{BCB}	0,9	0,7	0,3
$\begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,2 \\ 0,3 \\ 0,4 \end{bmatrix}^T$	LR	14,4	14,7	15,4
	LR^{BC}	5,3	3,9	2,5
	LR^{RA}	5,2	5,1	5,2
	LR^{CL}	5,8	5,8	5,8
	LR^{HR}	8,9	9,0	9,5
	LR^B	2,1	2,0	2,0
	LR^{BCB}	2,3	2,2	2,0

Porównanie mocy przeprowadzone zostało za pomocą formy kanonicznej modelu VECM, danej wzorem (10), dla przypadku gdy $R = 1$. Kwantyle rozkładów małopróbkowych dla $\mathcal{H}(0): R=0$ generowane są wówczas za pomocą wielowymiarowego procesu ścieżki losowej:

$$\mathbf{y}_t^{DGP} = \mathbf{y}_{t-1}^{DGP} + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad (11)$$

gdzie $\mathbf{y}_0^{DGP} \neq \mathbf{0}$ oraz $\boldsymbol{\varepsilon}_t \sim N_p(\mathbf{0}; \mathbf{I})$, a pierwsze sto obserwacji jest odrzucanych.

Tabela 7.

Moc testu (w %), $P = 5$, $r = 0$, $R = 1$, $T = 50$, DGP (11) i (10)

$\boldsymbol{\Omega}_{\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2} \setminus (\boldsymbol{\Psi}_1; \boldsymbol{\Psi}_2)$		(0,8; -0,1)	(0,9; -0,1)	(1,0; -0,1)
[0 0 0 0]	LR	5,6	4,7	4,4
	LR ^{BC}	5,8	5,0	4,4
[0,1 0,2 0,3 0,4]	LR	8,4	6,6	5,3
	LR ^{BC}	8,6	6,7	5,3
[0,3 0,4 0,5 0,6]	LR	41,5	32,4	19,7
	LR ^{BC}	36,2	28,0	17,3

Tabela 8.

Moc testu (w %), $P = 5$, $r = 0$, $R = 1$, $T = 100$, DGP (11) i (10)

$\boldsymbol{\Omega}_{\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2} \setminus (\boldsymbol{\Psi}_1; \boldsymbol{\Psi}_2)$		(0,8; -0,1)	(0,9; -0,1)	(1,0; -0,1)
[0 0 0 0]	LR	14,8	8,1	4,6
	LR ^{BC}	15,0	8,3	4,6
[0,1 0,2 0,3 0,4]	LR	26,4	14,2	6,6
	LR ^{BC}	26,6	14,2	6,6
[0,3 0,4 0,5 0,6]	LR	97,0	87,3	54,4
	LR ^{BC}	96,4	86,0	52,9

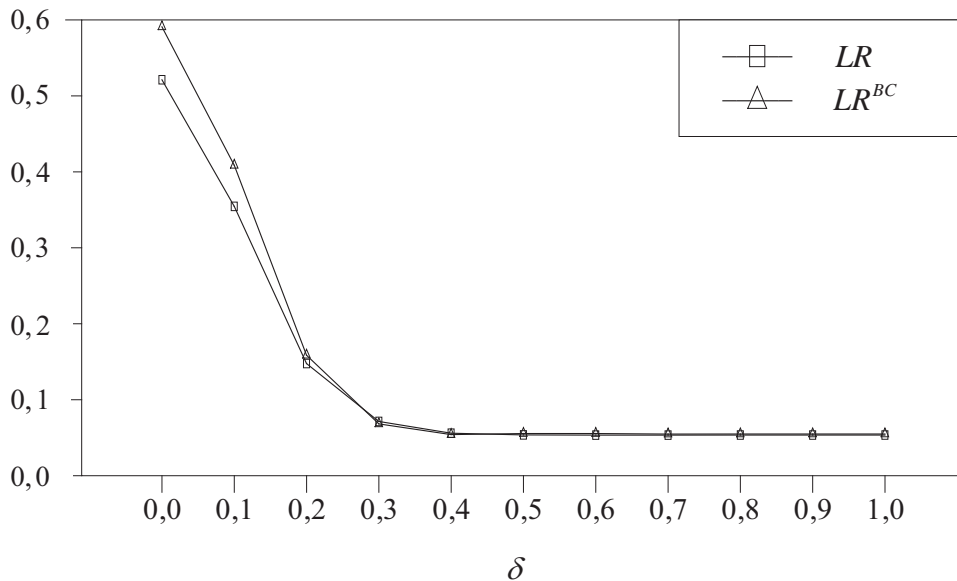
Wyniki zawarte w tabelach 7. i 8. wskazują, iż moc testów maleje wraz ze zbliżaniem się najmniejszego pierwiastka charakterystycznego wielomianu autoregresyjnego, odpowiadającego komponentowi stacjonarnemu, do koła jednostkowego. Z kolei wzrost korelacji składników losowych komponentu stacjonarnego i niestacjonarnego

powoduje, iż moc testów znacząco rośnie, przy czym test ilorazu wiarygodności z poprawką Bartletta cechuje się w małych próbach nieznacznie niższą mocą dla wysokiej korelacji składników losowych komponentów, niż pozostałe testy.

Przeprowadzono również analizę mocy testów dla bliskich hipotez alternatywnych przyjmując następujący proces generowania danych:

$$\Delta \mathbf{y}_t^{DGP} = (\mathbf{y}_{t-1}^{DGP} \mathbf{B} + \boldsymbol{\varphi}) \mathbf{A}^T + (\mathbf{y}_{t-1}^{DGP} \mathbf{B}_1 + \boldsymbol{\varphi}_1) \mathbf{A}_1^T T^{-\delta} + \Delta \mathbf{y}_{t-1}^{DGP} \boldsymbol{\Gamma}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad (12)$$

gdzie $\delta \geq 0$, a pozostałe parametry pozostają bez zmian. Dla $\delta = 1$ proces (12) zawiera składniki korekty błędem, które są prawie zintegrowane w sensie Phillipsa (1988). Z kolei dla $\delta = 0$ proces (12) upraszcza się do (9). Przyjęto następujące wartości dla parametrów DGP: $P = 5$, $R = 2$, $r = 1$, $\alpha = -0,8$, $\xi = 0,5$. Wyniki eksperymentów Monte Carlo dla $T = 50$ przedstawiono na rysunku 1.



Rysunek 1.

Moc testu dla rozmiaru próby 50, $P = 5$, $r = 1$, $R = 2$, $\alpha = -0,8$, $\xi = 0,5$, $T = 50$, DGP (12)

Wyniki dla kolejnych wartości parametru δ wskazują, po pierwsze, jaka jest moc testów dla bliskiej hipotezy alternatywnej w małych próbach, a po drugie, jak zmienia się moc testów wraz ze zbliżaniem się hipotezy alternatywnej do zerowej,

gdy $\delta \rightarrow \infty$. Wartości mocy testów dla $\delta = 1$ przedstawione na rysunku 1. wskazują, iż moc analizowanych testów dla bliskiej hipotezy alternatywnej jest zbliżona do rozmiaru nominalnego testu w krótkich próbach. Ponadto, spadek mocy spowodowany zbliżaniem hipotezy alternatywnej do zerowej jest stosunkowo szybki, bowiem dla $\delta = 0,3$ moc testu jest bliska rozmiarowi testu.

Należy zatem zauważyć, iż gdy siła mechanizmów korekty błędem jest bardzo mała i próba jest małowliczna, wówczas identyfikacja właściwej liczby relacji kointegrujących w systemie za pomocą statystyk opartych na regule ilorazu wiarygodności jest zasadniczo niemożliwa, ponieważ moc testu jest zbliżona do rozmiaru testu. W szczególności, test ilorazu wiarygodności z poprawką Bartletta wskazywać będzie zwykle rząd kointegracji niższy od prawdziwego.

5. PODSUMOWANIE

Stwierdzono, iż test ilorazu wiarygodności z poprawką Bartletta posiada zwykle najmniejsze zniekształcenie rozmiaru testu, które ponadto często nie różni się istotnie statystycznie od zera, gdy długość próby jest umiarkowana oraz wartości parametrów korekty błędem są co najmniej umiarkowane ($\alpha < -0,2$). Wskazano jednak, iż gdy wartości parametru korekty błędem są niskie ($\alpha \geq -0,2$) i jednocześnie efekty krótkookresowe są relatywnie słabe ($\xi < 0,5$), wówczas test ilorazu wiarygodności z poprawką Bartletta charakteryzuje się znacznym zniekształceniem rozmiaru testu w kierunku zera, a wnioskowanie statystyczne za pomocą standardowego testu ilorazu wiarygodności i testu z poprawką Hansena i Rahbeka jest w tym przypadku bardziej wiarygodne z uwagi na założony rozmiar testu. Pokazano ponadto, iż zniekształcenie rozmiaru testów z prostą poprawką, która zależy wyłącznie od liczby obserwacji i stopnia opóźnień procesu, jest niewielkie, gdy długość próby jest przynajmniej umiarkowana, parametry mechanizmów korekty błędem są co najmniej umiarkowane ($\alpha < -0,2$) i siła efektów krótkookresowych jest stosunkowo niewielka ($\xi < 0,5$).

Test ilorazu wiarygodności z poprawką Bartletta charakteryzuje się zwykle większą mocą w krótkich próbach, niż standardowy test bez poprawki. Jednakże, żaden z rozważanych testów nie posiada satysfakcjonującej mocy w krótkich próbach, liczących ok. 50 obserwacji. Z kolei dla umiarkowanie licznych prób – ok. 100 obserwacji, moc testów rzędu kointegracji, opartych na regule ilorazu wiarygodności, jest satysfakcjonująca, gdy szybkość mechanizmu korekty błędem jest duża ($\alpha \leq -0,6$), lub gdy siła mechanizmów korekty błędem oraz siła efektów krótkookresowych są przynajmniej umiarkowane ($\alpha < -0,2$, $\xi > 0,5$).

Pokazano, iż wzrost korelacji składników losowych komponentu stacjonarnego i niestacjonarnego, dekomponowanych zgodnie z formą kanoniczną, powoduje znaczący wzrost mocy rozważanych testów oraz wzrost rozmiaru empirycznego testów, przy czym w przypadku testu z poprawką Bartletta oraz testu bootstrapowego rozmiar

empiryczny testu dąży do rozmiaru nominalnego, w przeciwieństwie do pozostałych testów.

Stwierdzono, iż moc zarówno testu standardowego, jak i testu z poprawką jest bliska rozmiarowi nominalnemu testu dla przypadku bliskiej hipotezy alternatywnej. Wyniki eksperymentów Monte Carlo dla ciągu hipotez alternatywnych, od standardowej do bliskiej, wskazują przy tym, iż wraz ze zbliżaniem się do bliskiej hipotezy alternatywnej moc testów bardzo szybko dąży do rozmiaru nominalnego.

Uniwersytet Łódzki

LITERATURA

- [1] Ahlgren N., Antell J., (2008), Bootstrap and Fast Double Bootstrap Tests of Cointegration Rank with Financial Time Series, *Computational Statistics & Data Analysis*, 52, 4754-4767.
- [2] Ahlgren N., Antell J., (2013), The Power of Bootstrap Tests of Cointegration Rank, *Computational Statistics*, DOI 10.1007/s00180-013-0425-6.
- [3] Ahlgren N., Juselius M., (2012), Tests For Cointegration Rank and the Initial Condition, *Empirical Economics*, 42, 667-691.
- [4] Barndorff-Nielsen O. E., Hall P., (1988), On the Level-Error After Bartlett Adjustment of the Likelihood Ratio Statistic, *Biometrika*, 75, 374-378.
- [5] Bartlett M. S., (1937), Properties of Sufficiency and Statistical Tests, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 160, 268-282.
- [6] Bartlett M. S., (1954), A Note on the Multiplying Factors for Various χ^2 Approximations, *Journal of the Royal Statistical Society. Series B*, 16, 296-298.
- [7] Beran R., (1988), Prepivoting Test Statistics. A Bootstrap View of Asymptotic Refinements, *Journal of the American Statistical Association*, 83, 687-697.
- [8] Bravo F., (1999), A Correction Factor for Unit Root Test Statistics, *Econometric Theory*, 15, 218-227.
- [9] Cavaliere G., Rahbek A., Taylor A. M. R., (2010a), Testing for Cointegration in Vector Autoregressions with Non-stationary Volatility, *Journal of Econometrics*, 158, 7-24.
- [10] Cavaliere G., Rahbek A., Taylor, A. M. R., (2010b), Cointegration Rank Testing under Conditional Heteroskedasticity, *Econometric Theory*, 26, 1719-1760.
- [11] Cavaliere G., Rahbek A., Taylor A. M. R., (2012), Bootstrap Determination of the Co-integration Rank in Vector Autoregressive Model, *Econometrica*, 80, 1721-1740.
- [12] Cheung Y.-W., Lai K. S., (1993), Finite-Sample Sizes of Johansen's Likelihood Ratio Tests for Cointegration, *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 55, 313-328.
- [13] Cox D. R., Reid N., (1987), Parameter Orthogonality and Approximate Conditional Inference, *Journal of the Royal Statistical Society. Series B*, 49, 1-39.
- [14] Cox D. R., Reid N., (1992), A Note on the Difference Between Profile and Modified Profile Likelihood, *Biometrika*, 79, 408-411.
- [15] Cribari-Neto F., Cordeiro G. M., (1996), On Bartlett and Bartlett-type Corrections, *Econometric Reviews*, 15, 339-367.
- [16] Davidson R., MacKinnon J. G., (2000), Bootstrap Tests: How Many Bootstraps?, *Econometric Reviews*, 19, 55-68.
- [17] Edgeworth F. Y., (1905), The Law of Error, *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 20, 36-65 i 113-141.

- [18] Efron B., (1979), Bootstrap Methods: Another Look at the Jackknife, *The Annals of Statistics*, 7, 1–26.
- [19] van Giersbergen N. P. A., (1996), Bootstrapping the Trace Statistics in VAR Models. Monte Carlo Results and Applications, *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 58, 391–408.
- [20] Gonzalo J., Pitarakis J.-Y., (1999), Dimensionality Effect in Cointegration Analysis, w: R. F. Engle, H. White (ed.) *Cointegration, Causality, And Forecasting. A Festschrift in Honour of C.W.J. Granger*, Oxford University Press, New York, 212–229.
- [21] Hansen H., Rahbek A., (2002), Approximate Conditional Unit Root Inference, *Journal of Time Series Analysis*, 23, 1–28.
- [22] Haug A. A., (1996), Tests for Cointegration. A Monte Carlo Comparison, *Journal of Econometrics*, 71, 89–115.
- [23] Harris R. I. D., Judge G., (1998), Small Sample Testing for Cointegration Using the Bootstrap Approach, *Economics Letters*, 58, 31–37.
- [24] Hendry D. F., (1984), Monte Carlo Experimentation in Econometrics, w: Z. Griliches, M. D. Intriligator (ed.) *Handbook of Econometrics*, t. 2, 937–976.
- [25] Jensen J. L., Wood A. T. A., (1997), On the Non-Existence of a Bartlett Correction for Unit Root Tests, *Statistics & Probability Letters*, 35, 181–187.
- [26] Johansen S., (1996), *Likelihood-Based Inference in Cointegrated Vector Autoregressive Models*, Oxford University Press, Oxford.
- [27] Johansen S., (2002), A Small Sample Correction for the Test of Cointegrating Rank in the Vector Autoregressive Model, *Econometrica*, 70, 1929–1961.
- [28] Johansen S., Hansen H., Fachin S., (2005), *A Simulation Study of Some Functionals of Random Walks*, materiał powielony.
- [29] Kęłbowski P., (2006a), Moc testu śladu z poprawką Bartletta w krótkiej próbie, w: A. Welfe (red.) *Metody Ilościowe w Naukach Ekonomicznych*, Oficyna Wydawnicza SGH, Warszawa, 47–59.
- [30] Kęłbowski P., (2006b), Small Sample Power of Bartlett Corrected Likelihood Ratio Test of Cointegration Rank, w: A. Welfe (red.) *Proceedings of the Thirtieth Second International Conference Macromodels*, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź, 73–85.
- [31] Kęłbowski P., (2009), Małopróbkowe wnioskowanie o rzędzie kointegracji, rozprawa doktorska, UŁ.
- [32] Lawley D. N., (1956), A General Method for Approximating the Distribution of Likelihood Ratio Criteria, *Biometrika*, 43, 296–303.
- [33] Nielsen B., (1997), Bartlett Correction of the Unit Root Test in Autoregressive Models, *Biometrika*, 84, 500–504.
- [34] Omtzigt P., Fachin S., (2006), The Size and Power of Bootstrap and Bartlett-corrected Tests of Hypotheses on the Cointegration Vectors, *Econometric Reviews*, 25, 41–60.
- [35] Phillips P. C. B., (1988), Regression Theory for Near-Integrated Time Series, *Econometrica*, 56, 1021–1043.
- [36] Reimers H.-E., (1992), Comparisons of Tests for Multivariate Cointegration, *Statistical Papers*, 33, 335–359.
- [37] Reinsel G. C., Ahn S. K., (1989), Likelihood Ratio Test for Unit Roots and Forecasting Properties in the Nonstationary Vector AR Model, materiał powielony.
- [38] Reinsel G. C., Ahn S. K., (1992), Vector AR Models with Unit Roots and Reduced Rank Structure: Estimation, Likelihood Ratio Test, and Forecasting, *Journal of Time Series Analysis*, 13, 353–375.
- [39] Swensen A. R., (2006), Bootstrap Algorithms for Testing and Determining the Cointegration Rank in VAR Models, *Econometrica*, 74, 1699–1714.
- [40] Swensen, A. R., (2009), Corrigendum to 'Bootstrap Algorithms for Testing and Determining the Cointegration Rank in VAR Models, *Econometrica*, 77, 1703–1704.

- [41] Swensen A. R., (2011), A Bootstrap Algorithm for Testing Cointegration Rank in VAR Models in the Presence of Stationary Variables, *Journal of Econometrics*, 165, 152–162.
- [42] Toda H. Y., (1994), Finite Sample Properties of Likelihood Ratio Tests for Cointegrating Ranks when Linear Trends are Present, *The Review of Economics and Statistics*, 76, 66–79.
- [43] Toda H. Y., (1995), Finite Sample Performance of Likelihood Ratio Tests for Cointegrating Ranks in Vector Autoregressions, *Econometric Theory*, 11, 1015–1032.
- [44] Trenkler C., (2009), Bootstrapping Systems Cointegration Tests with a Prior Adjustment for Deterministic Terms, *Econometric Theory*, 25, 243–269.
- [45] Wilks S. S., (1938), The Large-Sample Distribution of the Likelihood Ratio for Testing Composite Hypotheses, *The Annals of Mathematical Statistics*, 9, 60–62.

WŁAŚCIWOŚCI WYBRANYCH METOD MAŁOPRÓBKOWEGO WNISKOWANIA O RZĘDZIE KOINTEGRACJI

S t r e s z c z e n i e

W artykule przedstawiono wyniki porównania właściwości małopróbkowych testów rzędu kointegracji. Przeprowadzone eksperymenty Monte Carlo dla różnych procesów generujących dane i różnych obszarów w przestrzeni parametrycznej wskazują, iż (i) test ilorazu wiarygodności z poprawką Bartletta posiada zwykle najlepsze własności, (ii) zastosowanie metody bootstrap dla testu z poprawką Bartletta nie prowadzi do poprawy własności testu, (iii) test asymptotyczny oraz testy z poprawkami na liczbę stopni swobody cechują się zwykle znacznym zniekształceniem rozmiaru testu, (iv) zastosowanie poprawki Bartletta prowadzi do nieznacznej poprawy mocy testu, (v) korelacja składników losowych komponentu stacjonarnego i niestacjonarnego formy kanonicznej powoduje znaczący wzrost mocy rozważanych testów oraz wzrost rozmiaru empirycznych testów, przy czym jedynie w przypadku testu z poprawką Bartletta oraz testu bootstrapowego rozmiar empiryczny testu dąży do rozmiaru nominalnego.

Słowa kluczowe: wnioskowanie małopróbkowe, rząd kointegracji, forma kanoniczna, bliskie hipotezy alternatywne

SMALL SAMPLE INFERENCE ON COINTEGRATION RANK

A b s t r a c t

In the paper, properties of small sample cointegration rank tests are compared. The Monte Carlo experiments conducted for different data generating processes and areas in the parametric space indicate that (i) the likelihood ratio test with Bartlett correction usually have the best properties, (ii) bootstrapping the Bartlett corrected test does not lead to improvement of test properties, (iii) size of asymptotic test and tests with degrees-of-freedom correction is usually heavily distorted, (iv) the Bartlett correction can lead to a small improvement of power, (v) correlation of error terms between stationary and non-stationary component of canonical form lead to a significant increase of power and size of test, but only size of Bartlett corrected test and bootstrapped test converge to nominal size.

Keywords: small sample inference, cointegration rank, canonical form, local alternatives

