

Andrzej Stryjek

Szkoła Główna Handlowa w Warszawie

O wyborze metody estymacji wartości zagrożonej na przykładzie portfela narażonego na ryzyko zmian kursów USD/PLN i EUR/PLN*

Streszczenie. W artykule rozważany jest problem wyboru optymalnej metody szacowania wartości zagrożonej. Na przykładzie portfela narażonego na ryzyko zmiany kursów USD/PLN i EUR/PLN pokazane jest, że średni poziom VaR w okresie testowym lub średnia z kwadratów odchyleń od rzeczywistych zysków i strat portfela w tym okresie mogą być użyte jako dodatkowe kryterium wyboru metody estymacji VaR. W badaniu porównywane były następujące metody estymacji VaR: metoda kowariancji, metoda historyczna oraz metody symulacyjne z wykorzystaniem kopuli Claytona, Franka i Ali-Mikhail-Haqa. Przy tym w metodach symulacyjnych w części przypadków użyto estymacji metodą minimalnej odległości Cramera von Mises równoległe z typowym sposobem estymacji parametru kopuli, tj. metodą największej wiarygodności.

Słowa kluczowe: wartość zagrożona, Value at Risk, VaR, kopula, metoda kowariancji, metoda historyczna, kopula Claytona, kopula Franka, kopula Ali-Mikhail-Haqa

Wstęp

W celu kontroli i ograniczania ryzyka inwestycji w instytucjach finansowych działających w wielu krajach Europy i USA, obecnie obowiązujące normy

* Prezentowane badanie empiryczne zostało opracowane w ramach badania statutowego nr 03/S/0021/11 w Instytucie Ekonometrii Szkoły Głównej Handlowej w Warszawie (por. A. Stryjek, *O pewnym problemie wyboru metody szacowania wartości zagrożonej*, Instytut Ekonometrii Szkoły Głównej Handlowej, Warszawa 2012).

prawne¹ dopuszczają stosowanie jako miary ryzyka wartości zagrożonej (*Value at Risk* – VaR). Wartość tej miary to kwota kapitału, którą inwestor powinien przetrzymać przez pewien okres (najczęściej przez 24 godziny) jako zabezpieczenie przed ryzykiem, przy czym wystąpienie w tym okresie straty większej niż VaR może zrealizować się z prawdopodobieństwem nie większym niż poziom tolerancji α . Zazwyczaj nadzór finansowy wymaga, aby $\alpha = 0,01$.

Naturalnie łatwo wyobrazić sobie sytuację, gdy kwoty zabezpieczenia są zawsze znacząco wyższe niż wynikałoby to z rzędu obserwowanych w historii strat na posiadanym portfelu. Takie podejście byłoby jednak niekorzystne dla inwestora, ponieważ zmuszałoby go do zamrażania kapitału. Z drugiej strony, jeśli inwestor zbyt często posługiwałby się źle oszacowaną wartością zagrożoną, to nadzór finansowy nie zezwoliłby w dłuższym okresie na stosowanie takiej metodologii i zobligował do przeznaczania dodatkowego kapitału na zabezpieczenie przed ryzykiem.

Bodźcem do podjęcia kwestii, którą metodę szacowania powinien wybrać inwestor, w przypadku gdy różne metody generują podobne liczby przekroczeń w okresie testowym są wyniki badań z prac R. Domana².

W odniesieniu do wspomnianych wyników, w bieżącym artykule zaproponowano na podstawie analiz empirycznych dla portfela złożonego z dwóch pozycji narażonych na ryzyko kursów USD/PLN i EUR/PLN, żeby dodatkowym kryterium wyboru metody estymacji VaR był średni poziom VaR w okresie testowym lub średnia z kwadratów odchyłeń prognoz VaR od rzeczywistych zysków i strat.

1. Wartość zagrożona

Od drugiej połowy ubiegłego wieku instytucje finansowe dążą do wprowadzenia w swojej działalności mechanizmów, które ograniczałyby ryzyko podjętych inwestycji. Jak wiadomo, niski poziom ryzyka zazwyczaj wiąże się z relatywnie niską stopą zwrotu inwestycji. Ze względu na globalny charakter działań na rynkach finansowych wszystkie przypadki podejmowania zbyt ryzykownych inwestycji mogą generować negatywne konsekwencje nie tylko dla instytucji podejmującej to ryzyko, lecz także dla całej branży, kraju lub regionu.

¹ J.C. Hull, *Zarządzanie ryzykiem instytucji finansowych*, Wydawnictwa Profesjonalne PWN, Warszawa 2011.

² R. Doman, *Estimating Value at Risk with Time Varying Copulas. Quantitative methods in economics*, „Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu” 2009, Issue 122, s. 54-67; R. Doman, *Zastosowania kopuli w modelowaniu dynamiki zależności na rynkach finansowych*, Wyd. Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu, Poznań 2011.

W ostatnich latach w bankach i innych instytucjach finansowych jedną z popularnych i często wykorzystywanych miar ryzyka inwestycji jest wartość zagrożona (VaR). Jej popularność wynika z kilku powodów. Miara ta ma prostą konstrukcję i może być stosowana dla szerokiego spektrum inwestycji finansowych. Może być ona zastosowana do pomiaru ryzyka dla całej instytucji, jak i wszystkich jej działów lub też może posłużyć do wyznaczenia limitów ryzyka dla tychże działów. Jest ona również zalecana jako jedno z podstawowych narzędzi zarządzania ryzykiem przez instytucje nadzorcze w tych krajach, w których są akceptowane i wprowadzane w życie zalecenia Bazylejskiego Komitetu ds. Nadzoru Bankowego.

W celu zdefiniowania pojęcia wartości zagrożonej należy założyć, że dla podjętej inwestycji jej potencjalne zyski lub straty, na koniec przyjętego *a priori* przez inwestora horyzontu czasowego, są realizacjami zmiennej losowej X . Zmienna ta jest określona na zbiorze wszystkich stanów natury Ω . W literaturze nazywana jest zmienną ryzyka lub zmienną zysków i strat. W praktyce najwygodniej jest przyjąć, że jej realizacja to zwrot inwestycji rozumiany jako różnica między wartością na końcu przyjętego horyzontu czasowego a wartością na jego początku. Niemniej jednak można znaleźć w literaturze podejścia zakładające, że jest ona np. stopą zwrotu, logarytmiczną stopą zwrotu itp. Należy również zauważyć, że w przypadku inwestycji zamiast bezpośrednio definiować zmienną ryzyka X , często łatwiej jest wyróżnić kilka zmiennych losowych, tzw. czynników ryzyka, które określają łączny poziom ryzyka dla zmiennej X . Na przykład dla portfela k instrumentów finansowych czynnikami ryzyka są zwroty poszczególnych instrumentów i wówczas zachodzi:

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_k. \quad (1)$$

Wartością zagrożoną dla zmiennej ryzyka X w ustalonym horyzoncie trwania inwestycji oraz przy założonym z góry przez inwestora małym poziomie tolerancji $\alpha \in (0,1)$ nazywamy liczbę zdefiniowaną jako:

$$\text{VaR}_\alpha(X) = -\inf\{t: P(X \leq t) > \alpha\}. \quad (2)$$

Innymi słowy wartość zagrożona to liczba, która dla zmiennej ryzyka X informuje o maksymalnym poziomie straty, jaka może powstać na końcu rozpatrywanego horyzontu, przy czym prawdopodobieństwo wystąpienia strat przekraczających wyznaczony poziom VaR nie jest większe niż α .

Powyższa definicja wartości zagrożonej jest uniwersalna w tym sensie, że może być stosowana zarówno gdy zmienna ryzyka jest typu skokowego, jak i w przypadku, gdy jej rozkład jest ciągły. Jak widać, bardzo ważną kwestią w szacowaniu wartości VaR jest odpowiednie modelowanie rozkładu zmiennej ryzyka.

Pierwsza podstawowa metoda szacowania VaR oparta jest na założeniu, że zmienna ryzyka ma rozkład normalny $N(\mu, \sigma)$ lub czynniki ryzyka mają normalne rozkłady prawdopodobieństwa $N(\mu_i, \sigma_i)$ dla $i = 1, 2, \dots, k$. Wówczas:

$$\text{VaR}_\alpha(X_1 + X_2 + \dots + X_k) = -\sum_{i=1}^k \mu_i - \phi^{-1}(\alpha) \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^k \sigma_i^2 + 2 \cdot \sum_{i<j} \sigma_{ij}}, \quad (3)$$

gdzie σ_{ij} to kowariancja czynników ryzyka X_i i X_j .

Druga z klasycznych metod estymacji VaR to metoda historyczna. Jest ona metodą nieparametryczną i dlatego nie wymaga żadnych założeń o rozkładzie zmiennej ryzyka, a jedynie szeregu danych empirycznych o zwrotach tej zmiennej. Wartość zagrożona wyznaczana jest wówczas jako liczba przeciwna do empirycznego kwantyla rzędu α z tego szeregu.

Obie wspomniane metody są krytykowane, ponieważ założenia tych metod nie są zazwyczaj spełnione dla zmiennych opisujących rynki finansowe. Poszukiwane są zatem inne metody estymacji VaR. Można wśród nich wymienić metody oparte na modelowaniu zmiennych ryzyka za pomocą GARCH oraz metody symulacyjne, w których rozkłady czynników ryzyka są inne niż rozkład normalny lub są modelowane za pomocą kopuli (funkcji łączącej).

Niezależnie od stosowanej metody estymacji wartości zagrożonej, osobną kwestią jest ocena efektywności każdej z tych metod. Standardowo przyjmuje się, że podstawowym kryterium, jakie musi spełniać metoda szacowania wartości zagrożonej jest warunek, iż udział liczby zarejestrowanych przekroczeń (wyjątków) w okresie testowym nie jest większy niż przyjęty poziom tolerancji α . Kryterium to wymaga dokładniejszego omówienia. Przy szacowaniu wartości zagrożonej, na podstawie szeregu empirycznych zwrotów zmiennej ryzyka, dokonuje się podziału tego szeregu na dwie części. Pierwsza część służy do wyznaczenia wartości zagrożonej. Otrzymana wartość jest wtedy porównywana z rzeczywistą zmianą wartości zmiennej X , czyli z pierwszym elementem w drugiej części szeregu (w tzw. części testowej, okresie testowym). Jeśli estymator wartości zagrożonej jest mniejszy od faktycznej straty, to odnotowuje się, że wystąpiło przekroczenie. Następnie procedura ta jest powtarzana, przy czym pierwsza część szeregu jest przesuwana o jeden okres do przodu, a w okresie testowym wybiera się kolejną wartość do porównania. Zgodnie z definicją wartości zagrożonej w okresie testowym częstość występowania zarejestrowanych wyjątków nie powinna istotnie odbiegać od α . Zazwyczaj przyjmuje się, że nie powinna przekraczać poziomu tolerancji.

2. Kopuła

Jednym z wariantów obliczania wartości zagrożonej są metody symulacyjne, w których rozkład prawdopodobieństwa jest opisany za pomocą kopuli (funkcji łączącej) dla czynników ryzyka.

W badaniu empirycznym opisanym w artykule występowały dwa czynniki ryzyka. Dlatego w tym miejscu podany zostanie opis i własności kopuli w przypadku dwuwymiarowym.

Dwuwymiarową kopułą C nazywamy każdą funkcję $C: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow R$, która spełnia następujące warunki:

A. $C(u, 0) = C(0, v) = 0$ dla dowolnych $u, v \in [0, 1]$,

B. $C(u, 1) = u$ oraz $C(1, v) = v$ dla dowolnych $u, v \in [0, 1]$,

C. $C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0$ dla $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq 1$ oraz $0 \leq v_1 \leq v_2 \leq 1$.

Użyteczność pojęcia funkcji łączącej w zastosowaniach praktycznych wynika z twierdzenia Sklara. Stwierdza ono bowiem, że jeśli dwuwymiarowa, ciągła zmienna losowa (X, Y) ma dystrybuantę $F_{XY}: R^2 \rightarrow R$ i dystrybuanty rozkładów brzegowych są funkcjami $F_X, F_Y: R \rightarrow R$, to istnieje dokładnie jedna kopuła C , taka że:

$$F_{XY}(x, y) = C(F_X(x), F_Y(y)). \quad (4)$$

Zachodzi również implikacja odwrotna, tzn. jeśli C jest kopułą oraz $F_X, F_Y: R \rightarrow R$ są, odpowiednio, dystrybuantami wektorów X i Y , to funkcja $H(x, y) = C(F_X(x), F_Y(y))$ jest dystrybuantą wektora (X, Y) .

Twierdzenie Sklara obowiązuje również w przypadku zmiennych, których rozkłady nie są ciągłe. Wtedy kopuła C nie jest określona w jednoznaczny sposób na zbiorze $[0, 1] \times [0, 1]$, lecz tylko na $\text{Ran } F_X \times \text{Ran } F_Y$, gdzie symbol $\text{Ran } f$ oznacza zbiór wartości funkcji f .

W praktyce wykorzystanie kopuli do szacowania poziomu ryzyka za pomocą VaR sprowadza się do utworzenia długiego szeregu zmian wartości zmiennej ryzyka. Szereg ów jest sumą odpowiednich składowych szeregów wygenerowanych za pomocą symulacji komputerowej dla poszczególnych czynników ryzyka. Przy tym symulacja szeregów dla czynników ryzyka dokonywana jest w ten sposób, aby łączny rozkład wielowymiarowego szeregu był opisany rozważaną kopułą.

W literaturze³ znajduje się wiele przykładów funkcji łączących, tj. funkcji, które spełniają warunki A - B. W prezentowanym niżej badaniu zastosowano trzy rodziny kopuli: kopułę Claytona, kopułę Franka i kopułę Ali-Mikhail-Haqa (zob. tab. 1).

W praktyce zazwyczaj, aby zastosować metodę symulacyjną z wykorzystaniem kopuli, zachodzi konieczność oszacowania na podstawie posiadanych

³ U. Cherubini, E. Luciano, W. Vecchiato, *Copula method in finance*, John Wiley and Sons Chichester 2004; P. Embrechts i in., *Modeling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management*, 2001, www.math.ethz.ch/finance [30.09.2012]; S. Heilpern, *Funkcje łączące*, Wyd. Akademii Ekonomicznej im. Oskara Langego, Wrocław 2007; R.B. Nelsen, *An introduction to copulas*, 2nd ed., Springer, New York 2006.

Tabela 1. Wybrane przykłady kopuli

Nazwa	Wzór	Parametr
Claytona	$C(u, v; \theta) = (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}}$	$\theta \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$
Franka	$C(u, v; \theta) = \frac{1}{\theta} \ln \left(1 + \frac{(e^{\theta u} - 1)(e^{\theta v} - 1)}{e^{\theta} - 1} \right)$	$\theta \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
Ali-Mikhail-Haq (AMH)	$C(u, v; \theta) = \frac{uv}{1 - \theta \cdot (1-u)(1-v)}$	$\theta \in (-1, 1)$

Źródło: opracowanie własne na podstawie S. Heilpern, op. cit.

danych empirycznych parametru kopuli θ . Dodatkową kwestią jest też sposób symulowania wartości z rozkładu określonego kopulą z zadany parametrem.

Ten drugi problem jest dobrze opisany w literaturze, gdzie można znaleźć algorytmy służące do generowania par liczb (u_1, u_2) , które są realizacjami wektora (U_1, U_2) o rozkładzie opisanym kopulą C_θ . Są one oparte na pojęciu dystrybuanty warunkowej zdefiniowanej jako⁴

$$P(U_2 < u_2 | U_1 = u_1) = \frac{\partial C}{\partial u_1}(u_1, u_2). \quad (5)$$

Co do kwestii estymacji parametru θ kopuli, to należy stwierdzić, że podstawową metodą jest metoda największej wiarygodności (MNW) oraz jej modyfikacja, tzw. wnioskowanie dla rozkładów brzegowych. Oba podejścia są szeroko omówione w literaturze⁵. Ponieważ wymagają one, żeby zakładać z góry, jakie są rozkłady czynników ryzyka i dodatkowo szacować parametry tych rozkładów, więc są kłopotliwe w praktycznym wykorzystaniu. Dlatego innym, popularnym podejściem do estymacji parametru jest użycie kanonicznej MNW. W tej modyfikacji MNW przyjmuje się, że każdy rozkład brzegowy jest reprezentowany przez dystrybuantę empiryczną utworzoną na podstawie szeregu danych empirycznych dla czynnika ryzyka, tj.

$$F(x) = \frac{1}{T+1} \cdot \sum_{i=1}^T 1_{(x_i \leq x)}, \quad (6)$$

gdzie T jest liczebnością próby (x_i) dla wybranego czynnika ryzyka, a 1_Z jest funkcją charakterystyczną zbioru Z . Estymator parametru θ to wartość, która maksymalizuje logarytm funkcji wiarygodności:

⁴ U. Cherubini, E. Luciano, W. Vecchiato, op. cit.; S. Heilpern, op. cit.; R. Doman, *Zastosowania kopuli...*

⁵ U. Cherubini, E. Luciano, W. Vecchiato, op. cit.; S. Heilpern, op. cit.

$$l(\theta) = \sum_{i=1}^T \ln \left(c_{\theta} \left(\frac{r_i}{T+1}, \frac{s_i}{T+1} \right) \right), \quad (7)$$

gdzie r_i to rangi obserwacji zwrotów pierwszego czynnika ryzyka, a s_i drugiego oraz

$$c_{\theta}(u, v) = \frac{\partial^2 C_{\theta}}{\partial u \partial v}(u, v) \quad (8)$$

jest gęstością kopuli.

3. Problem badawczy

Zgodnie z uwagami poczynionymi w paragrafie pierwszym artykułu, każda metoda szacowania wartości zagrożonej może zostać uznana za poprawny sposób estymacji VaR, gdy udział przekroczeń w okresie testowym nie przekracza poziomu tolerancji α . Oznacza to, że w przynajmniej $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ przypadkach w okresie testowym, kwota będąca zabezpieczeniem inwestora przed ryzykiem jest nie mniejsza niż wielkości strat (rozumianych tu w sensie wartości dodatniej) z tej inwestycji w tym okresie.

W pracy R. Domana⁶ badana jest wartość zagrożona dla dwuskładnikowego portfela walut narażonego na ryzyko zmiany kursów USD/PLN i EUR/PLN. Autor na podstawie dziennych logarymicznych stóp zwrotu dla obu walut z okresu od 2 października 2001 r. do 31 marca 2008 r. wyznaczył wartości VaR dla tego portfela na sto kolejnych dni.

Jako metody szacowania wartości zagrożonej zastosował trzy modele:

- dopasowanie do szeregu logarymicznych stóp zwrotu portfela modelu GARCH (1,1),
- użycie oszacowań macierzy kowariancji warunkowych otrzymanych za pomocą dopasowanego dwuwymiarowego modelu BEKK,
- dopasowanie do danych warunkowej kopuli t -Studenta z dynamicznym współczynnikiem korelacji i niezmiennym w czasie parametrem liczby stopni swobody.

Zainteresowany czytelnik szczegóły tych modeli znajdzie w źródłowej pracy R. Domana⁷.

Wymienione trzy metody estymacji VaR w tej analizie empirycznej nie wygenerowały dla $\alpha = 1\%$ i $\alpha = 2,5\%$ żadnych przekroczeń w okresie testowym.

⁶ R. Doman, *Zastosowanie kopuli...*

⁷ R. Doman, *Estimating Value at Risk...*

Dla $\alpha = 5\%$ udział przekroczeń wynosił, odpowiednio, 3%, 4% i 5%. Można zatem zauważyć, że wszystkie one spełniają podstawowe kryterium oceny jakości metody estymacji VaR.

W pracy R. Domana⁸ postawiono więc otwarty problem: która z alternatywnych metod szacowania wartości zagrożonej jest najlepsza? Innymi słowy, jeżeli kilka różnych metod estymacji VaR dla danego okresu testowego ma akceptowalny udział przekroczeń, to którą z nich powinien wybrać inwestor?

Badanie empiryczne zaprezentowane w następnym punkcie artykułu jest rozwinięciem badania z pracy R. Domana z 2009 r.⁹ i ma na celu wskazanie potencjalnego rozwiązania problemu sformułowanego w publikacji R. Domana z 2011 r.¹⁰.

4. Dane i opis badania

Zaprezentowane w tym punkcie badanie zostało przeprowadzone przez autora artykułu dla dwuskładnikowego portfela walut narażonego na ryzyko zmian kursów USD/PLN i EUR/PLN o jednakowych wagach obu pozycji. Dane zostały pobrane ze strony Narodowego Banku Polskiego¹¹. Wszystkie obliczenia zostały wykonane w pakiecie R wersja 2.15.1 za pomocą własnych, autorskich procedur, przy czym w celu numerycznego wyznaczenia maksimum lub minimum funkcji zastosowano metodę symulowanego wyżarzania (*simulated-annealing*) dostępną w pakiecie R w funkcji `optim` jako parametr `method="SANN"`.

Oprócz okresu rozważanego w pracy R. Domana¹² (okres A), analiza empiryczna została poszerzona o drugi okres (okres B), który odpowiada przesunięciu okresu A o cztery lata do przodu (zob. rys. 1). Ponadto ze względu na użycie w badaniu dwóch metod estymacji parametru kopuli, w ramach każdego z okresów A i B wyróżniono dwie próby – o długości $T = 1642$ i $T = 250$.

W odróżnieniu od badania empirycznego z pracy R. Domana z 2009 r.¹³ podstawą przeprowadzonych obliczeń były zwroty rozumiane jako różnice między wartością pozycji w dniu następnym a jej wartością w dniu obecnym.

W prezentowanym badaniu poziom tolerancji dla wartości zagrożonej przyjęty był w trzech wariantach: $\alpha = 1\%$, $\alpha = 2,5\%$ i $\alpha = 5\%$. Do estymacji VaR

⁸ R. Doman, *Zastosowania kopuli...*

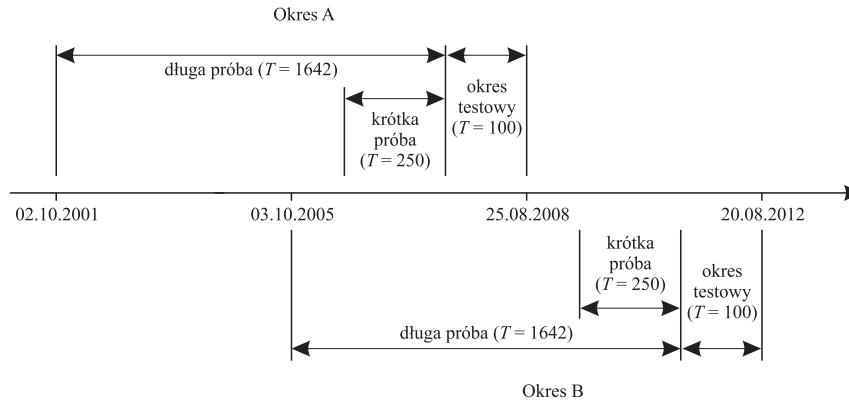
⁹ R. Doman, *Estimating Value at Risk...*

¹⁰ R. Doman, *Zastosowanie kopuli...*

¹¹ www.nbp.pl/home.aspx?f=/kursy/kursy_archiwum.html [1.09.2012].

¹² R. Doman, *Estimating Value at Risk...*

¹³ *Ibidem*.



Rys. 1. Ilustracja zakresu danych empirycznych zastosowanych w analizie empirycznej

Źródło: opracowanie własne.

zastosowano następujące metody: metodę kowariancji, metodę historyczną, metodę symulacyjną w oparciu o kopulę Claytona, Franka i Ali-Mikhail-Haqa (AMH).

Schemat symulacji przeprowadzonej za pomocą jednej z trzech wspomnianych kopuli realizował się w następujących etapach:

- 1) oszacowanie parametru kopuli,
- 2) wygenerowanie dwuwymiarowej próby o liczebności 10 000 z rozkładu zdefiniowanego przez kopulę o parametrze równym wartości otrzymanej w pierwszym etapie,
- 3) transformacja wygenerowanej próby za pomocą uogólnionej odwrotności empirycznych dystrybuant¹⁴ wyjściowych szeregów,
- 4) utworzenie na podstawie przetransformowanej próby szeregu symulacji wartości badanego portfela i odczytanie wartości zagrożonej jako liczby przeciwnej do empirycznego kwantyla rzędu α tego szeregu.

Parametr każdej kopuli był estymowany kanoniczną metodą największej wiarygodności. Dodatkowo zastosowano również estymację metodą minimalnej odległości z odległością Cramera von Mises. Ze względu na złożoność obliczeniową algorytmów estymacji parametru kopuli tą metodą, konieczne było zmniejszenie liczebności próby stosowanej do estymacji VaR, zatem oprócz próby złożonej z 1642 obserwacji (długa próba) rozważany był przypadek 250 obserwacji (krótka próba). Estymacja metodą minimalnej odległości Cramera von Mises parametru kopuli C_θ polega na wyborze takiej wartości θ , która minimalizuje wartość wyrażenia:

¹⁴ Jeżeli funkcja $F: \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ jest dystrybuantą pewnej zmiennej losowej, to uogólnioną odwrotnością dystrybuanty F nazywamy odwzorowanie $F^{[-1]}(y) = \inf\{x: F(x) \geq y\}$.

$$\sum_{i=1}^T \sum_{j=1}^T \left(C_{\theta} \left(\frac{i}{T}, \frac{j}{T} \right) - C_T \left(\frac{i}{T}, \frac{j}{T} \right) \right)^2, \quad (9)$$

gdzie C_T oznacza kopulę empiryczną, która jest wyznaczana na podstawie dwuwymiarowej próby o liczebności T . Kopuła C_T jest określona na zbiorze $\left\{ \left(\frac{i}{T}, \frac{j}{T} \right) : i, j = 0, 1, 2, \dots, T \right\}$ jako

$$C_T \left(\frac{i}{T}, \frac{j}{T} \right) = \frac{1}{T} \cdot \sum_{k=1}^T \mathbb{1}_{\{r_k \leq i\}} \cdot \mathbb{1}_{\{s_k \leq j\}}, \quad (10)$$

gdzie r_k i s_k oznaczają rangi obserwacji w szeregach zwrotów USD/PLN i EUR/PLN. Warto nadmienić, że estymacja parametru kopuli oparta na metodzie minimalnej odległości jest stosowana rzadko, a jej skuteczność nie jest wystarczająco zbadana i opisana w literaturze.

Próba generowana w drugim etapie sformułowanego wyżej schematu analizy empirycznej była otrzymana za pomocą algorytmu symulowania par liczb (u_1, u_2) pochodzących z rozkładu o zadanej kopuli. Zgodnie z uwagą poczynioną w punkcie drugim artykułu jest to algorytm oparty na zastosowaniu dystrybuanty warunkowej¹⁵. Symulacja sprowadza się do wylosowania liczb v_1 i v_2 z rozkładu jednostajnego na odcinku $[0, 1]$, a następnie przyjęcia $u_1 = v_1$, natomiast u_2 – wartości zgodnie ze wzorami z tabeli 2.

Tabela 2. Wartość u_2 dla kopuli wykorzystanych w badaniu empirycznym

Kopuła	u_2
Claytona	$(v_2^{-\theta(1+\theta)} \cdot u_1^{-\theta} - u_1^{-\theta} + 1)^{\frac{1}{\theta}}$
Franka	$\frac{1}{\theta} \cdot \ln \frac{e^{\theta u_1} \cdot (v_2 - 1) - e^{\theta} \cdot v_2}{e^{\theta u_1} \cdot (v_2 - 1) - v_2}$
AMH	$\frac{1 + 2\theta^2(1-u)^2 v_2 + \theta(2(u_1 - 1)v_2 - 1) - \sqrt{1 + \theta(4u_1 v_2 - 2) + \theta^2(1 - 4u_1 v_2 + 4u_1^2 v_2)}}{2\theta(\theta(u_1 - 1)^2 v_2 - 1)}$

Źródło: opracowanie własne na podstawie S. Heilpern, *Funkcje łączące*, Wyd. Akademii Ekonomicznej im. Oskara Langego, Wrocław 2007.

¹⁵ Por.: S. Heilpern, op. cit.; U. Cherubini, E. Luciano, W. Vecchiato, op. cit.

5. Wnioski

W okresie A (2.10.2001-25.08.2008) dla długiej próby (1642 obserwacje) wyniki otrzymane w badaniu empirycznym można porównać z wynikami w pracy R. Doman¹⁶. Są one zaprezentowane razem z wynikami dla okresu B (3.10.2005-20.08.2012) w tabeli 3.

Tabela 3. Liczba przekroczeń w studniowym okresie testowym w okresach A i B ($T = 1642$) – długa próba

Okres	A			B		
	1%	2,5%	5%	1%	2,5%	5%
Metoda kowariancji	0	0	0	0	1	3
Metoda historyczna	0	0	0	0	2	4
Clayton (MNW)	0	0	0	0	1	3
Frank (MNW)	0	0	0	0	2	3
AMH (MNW)	16	25	32	21	28	32
GARCH*	0	0	3			
BEKK*	0	0	4			
t-Studenta (MNW)*	0	0	5			

* Metody zastosowane w R. Doman, *Estimating Value at Risk with time varying copulas*. *Quantitative methods in economics*, „Zeszyty Naukowe” 2009, Issue 122, s. 54-67.

Źródło: opracowanie własne.

Zauważmy, że klasyczne metody, jak metoda kowariancji i metoda historyczna, okazały się w sensie tego kryterium tak samo dobre jak bardziej zaawansowane metody oparte na modelach GARCH lub pojęciu kopuli. Dla większości stosowanych metod i poziomów tolerancji bowiem liczba przekroczeń w okresie testowym wynosiła zero. Jedynie metoda z kopulą AMH wygenerowała liczby przekroczeń istotnie wyższe niż poziom tolerancji dla VaR. Dla prób z okresu B pojawiło się relatywnie więcej przekroczeń, ale poza metodą z użyciem kopuli AMH ich liczba wciąż mieściła się w przyjętej normie wyznaczonej przez poziom tolerancji.

Podobne wnioski można wyciągnąć z wyników badania liczby przekroczeń dla krótszej próby (zob. tab. 4). Skrócenie próby z 1642 do 250 obserwacji spowodowało, że stosowane metody zdecydowanie rzadziej miały zero przekroczeń w okresie testowym. W okresie A pod względem najmniejszej liczby przekroczeń

¹⁶ R. Doman, *Estimating Value at Risk...*

równorzędne okazały się: metoda kowariancji i metoda z kopułą Franka (parametr estymowany metodą minimalnej odległości Cramera von Mises), a w okresie B metoda kowariancji.

Tabela 4. Liczba przekroczeń VaR w studniowym okresie testowym w okresach A i B ($T = 250$) – krótka próba

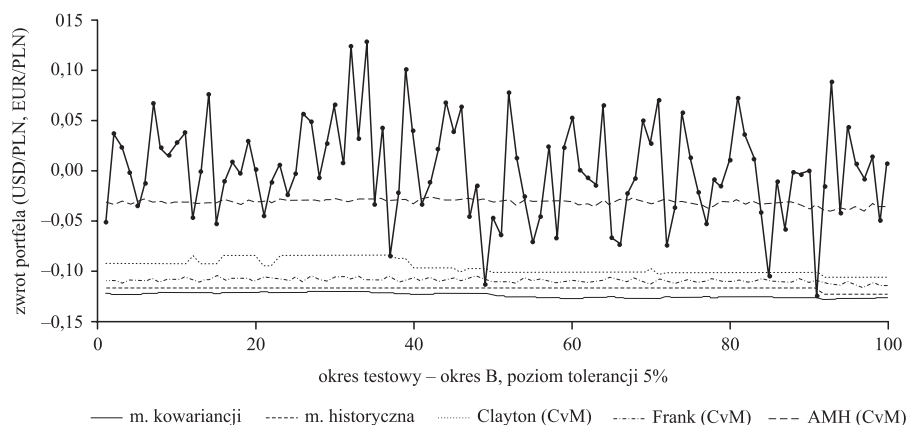
Okres	A			B		
	Poziom tolerancji	1%	2,5%	5%	1%	2,5%
Metoda kowariancji	0	1	2	0	2	4
Metoda historyczna	2	2	4	1	2	4
Clayton (MNW)	0	2	4	1	3	4
Clayton (CvM)	1	2	5	3	4	4
Frank (MNW)	2	2	5	2	3	4
Frank (CvM)	0	1	2	2	3	4
AMH (MNW)	26	30	33	26	29	31
AMH (CvM)	26	32	44	26	31	35

Źródło: opracowanie własne.

Z punktu widzenia nadzoru finansowego, dla wszystkich czterech analizowanych portfeli narażonych na ryzyko kursów USD/PLN i EUR/PLN, najlepszą metodą wyceny ryzyka za pomocą VaR jest metoda kowariancji. Okazuje się jednak, że metoda ta generuje tak wysokie wartości VaR, że w okresie testowym są one prawie zawsze wystarczające jako zabezpieczenie przed ryzykiem zmiany wartości portfela. Inne metody estymacji wartości zagrożonej mogą być również akceptowane pod względem liczby przekroczeń, lecz kwota potrzebna do zabezpieczenia przed ryzykiem częściej jest niższa niż przy metodzie kowariancji. Sytuacja ta jest widoczna na przykładowym wykresie zwierającym zwroty portfela i wartości VaR w okresie testowym na rysunku 2. Z punktu widzenia inwestora najlepiej, gdy kwota zabezpieczenia jest jak najmniejsza, ale jednocześnie akceptowana przez nadzór.

Należy zatem użyć dodatkowego wskaźnika, który porównywałby wyniki VaR z okresu testowego z poziomem faktycznych strat dla wszystkich metod estymacji VaR akceptowalnych z punktu widzenia liczby przekroczeń w okresie testowym. Najprostszym rozwiązaniem jest uwzględnienie średniego poziomu VaR w okresie testowym (zob. tab. 5).

Okazuje się, że biorąc pod uwagę kryterium najniższego średniego poziomu VaR nie zawsze optymalnym wyborem okazuje się metoda kowariancji. W przypadku krótkiej próby dla $\alpha = 0,01$ i $\alpha = 0,05$ w okresie A oraz $\alpha = 0,05$ w okresie B najlepszym wyborem jest metoda z wykorzystaniem kopuli Clayтона przy



Rys. 2. Oszacowania wartości zagrożonej i zwroty portfela dla krótkiej próby w okresie B. Poziom tolerancji 5%. Estymacja parametru kopuli metodą minimalnej odległości Cramera von Mises

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 5. Średni poziom VaR w studniowym okresie testowym w okresach A i B ($T = 1642$ lub $T = 250$)

Okres	długa próba					
	A			B		
Poziom tolerancji	1%	2,5%	5%	1%	2,5%	5%
Metoda kowariancji	0,0960	0,0811	0,0683	0,1436	0,1209	0,1014
Metoda historyczna	0,1041	0,0791	0,0639	0,1534	0,1154	0,0862
Clayton (MNW)	0,1063	0,0833	0,0664	0,1674	0,1187	0,0881
Frank (MNW)	0,0917	0,0765	0,0641	0,1531	0,1113	0,0871

Okres	krótka próba					
	A			B		
Poziom tolerancji	1%	2,5%	5%	1%	2,5%	5%
Metoda kowariancji	0,0665	0,0567	0,0483	0,1266	0,1062	0,0886
Metoda historyczna		0,0487	0,0452	0,1198	0,1027	0,0783
Clayton (MNW)	0,0624	0,0534	0,0449	0,1208		0,0795
Clayton (CvM)	0,0543	0,0495	0,0433			0,0731
Frank (MNW)		0,0496	0,0437			0,0788
Frank (CvM)	0,0607	0,0545	0,0478			0,0803

Źródło: opracowanie własne.

estymacji jej parametru metodą minimalnej odległości Cramera von Mises. W pozostałych przypadkach należy wybrać metodę historyczną. Dla dłuższej próby przy $\alpha = 0,05$ optymalnym wyborem jest metoda historyczna, a dla $\alpha = 0,025$ metoda z kopułą Franka (MNW). Dodatkowo metoda z kopułą Franka (MNW) okazała się najlepsza dla $\alpha = 0,01$ w okresie A.

Innym wskaźnikiem, który może być pomocny w ocenie jakości metody VaR na tle pozostałych jest średnia z kwadratów odchyłeń zaobserwowanych zysków i strat w okresie testowym od wyznaczonych wartości VaR (zob. tab. 6).

Tabela 6. Średnia z kwadratów odchyłeń VaR od rzeczywistych zwrotów portfela w studniowym okresie testowym w okresach A i B ($T = 1642$ lub $T = 250$)

długa próba						
Okres	A			B		
	1%	2,5%	5%	1%	2,5%	5%
Poziom tolerancji						
Metoda kowariancji	0,0096	0,0070	0,0052	0,0234	0,0174	0,0130
Metoda historyczna	0,0112	0,0067	0,0046	0,0264	0,0160	0,0101
Clayton (MNW)	0,0117	0,0074	0,0049	0,0309	0,0168	0,0104
Frank (MNW)	0,0089	0,0063	0,0046	0,0262	0,0151	0,0102

krótka próba						
Okres	A			B		
	1%	2,5%	5%	1%	2,5%	5%
Poziom tolerancji						
Metoda kowariancji	0,0049	0,0037	0,0029	0,0187	0,0139	0,0104
Metoda historyczna		0,0029	0,0026	0,0170	0,0131	0,0087
Clayton (MNW)	0,0044	0,0034	0,0026	0,0172		0,0089
Clayton (CvM)	0,0035	0,0030	0,0024			0,0079
Frank (MNW)		0,0030	0,0025			0,0088
Frank (CvM)	0,0042	0,0035	0,0028			0,0090

Źródło: opracowanie własne.

W przypadku długiej próby wyznaczone optymalne metody szacowania VaR na podstawie kryterium średniego poziomu VaR i kryterium średniej z kwadratów odchyłeń różnią się tylko w jednym przypadku. Mianowicie dla okresu A i $\alpha = 0,05$ zamiast metody kowariancji z pierwszego kryterium najlepszym wyborem jest metoda z kopułą Franka (MNW). W przypadku krótkiej próby uszeregowanie optymalnych metod jest identyczne jak na podstawie poprzedniego wskaźnika.

Podsumowanie

Z punktu widzenia nadzoru finansowego wystarczy, aby metoda szacowania wartości zagrożonej miała udział przekroczeń w okresie testowym nie większy niż poziom tolerancji α . Okazuje się jednak, że w praktyce wymaganie to może być spełnione dla kilku różnych metod szacowania VaR. Stąd powstaje pytanie, którą z metod powinien wybrać inwestor?

Zastosowanie kryterium średniego poziomu VaR lub średniej z kwadratów odchyłeń prognoz od rzeczywistych zmian pozwala na wybór metody estymacji korzystnej dla inwestora, jak i akceptowanej przez nadzór finansowy.

Zaprezentowane badanie stanowi analizę wartości zagrożonej dla stosunkowo prostego portfela. Warto byłoby przeprowadzić podobne badania większych portfeli i innych rodzajów ryzyka niż ryzyko walutowe. Innym aspektem, który wynika z analizy empirycznej jest porównanie jakości metody minimalnej odległości, jako sposobu estymacji parametru kopuli, na tle kanonicznej metody największej wiarygodności. W metodzie minimalnej odległości można użyć innych funkcji odległości, np. Kołmogorova-Smirnova lub normy z przestrzeni L^1 .

Zaproponowane kierunki badań miałyby na celu opracowanie takich metod pomiaru wartości zagrożonej, które mogłyby być zaakceptowane przez system regulacji i nadzoru, a zarazem byłyby korzystniejsze dla samych organizacji finansowych niż stosowane obecnie.

Literatura

- Cherubini U., Luciano E., Vecchiato W., *Copula method in finance*, John Wiley and Sons, Chichester 2004.
- Doman R., *Estimating Value at Risk with Time Varying Copulas*. *Quantitative methods in economics*, „Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu” 2009, Issue 122, s. 54-67.
- Doman R., *Zastosowania kopuli w modelowaniu dynamiki zależności na rynkach finansowych*, Wyd. Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu, Poznań 2011.
- Embrechts P. i in., *Modeling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management*, 2001, www.math.ethz.ch/finance [1.09.2012].
- Heilpern S., *Funkcje łączące*, Wyd. Akademii Ekonomicznej im. Oskara Langego, Wrocław 2007.
- Hull J.C., *Zarządzanie ryzykiem instytucji finansowych*, Wydawnictwa Profesjonalne PWN, Warszawa 2011.
- Nelsen R.B., *An introduction to copulas*, 2nd ed., Springer, New York 2006.
- Stryjek A., *O pewnym problemie wyboru metody szacowania wartości zagrożonej*, Instytut Ekonometrii Szkoły Głównej Handlowej, Warszawa 2012.

**About the choice of method for estimation on the basis
of the portfolio exposed to the risk of fixed rates fluctuations
for USD/PLN and EUR/PLN**

Summary. In the paper we investigate the problem of the optimal choice of the method for VaR estimation. On the basis of the portfolio exposed to the risk of fluctuations for USD/PLN and EUR/PLN fixed rates it is shown that the mean level of VaR or the mean squared error in the test period can be used as an additional criterion for choice of method for VaR estimation. The following VaR estimation methods were compared in the study: the covariance method, the historical method and the simulation methods based on the Clayton copula, the Frank copula and the Ali-Mikhail-Haq copula. Additionally, for the simulation methods in some cases the author uses the minimum distance estimation with Cramer von Mises distance function parallel to the standard way of the copula parameter estimation *i.e.* maximum likelihood estimation.

Key words: Value at Risk, VaR, copula, covariance method, historical method, Clayton copula, Frank copula, Ali-Mikhail-Haq copula