PRZEGLĄD STATYSTYCZNY
R. LXI – ZESZYT 4 – 2014

EMIL PANEK

MODEL GOSPODARKI GALE'A ZE ZMIENNĄ TECHNOLOGIĄ, ROSNĄCĄ EFEKTYWNOŚCIĄ PRODUKCJI I SZCZEGÓLNĄ POSTACIĄ KRYTERIUM WZROSTU. „SŁABY" EFEKT MAGISTRALI

1. WSTĘP

W pracach Panek (2014a, 2014b) przedstawiono model wzrostu niestacjonarnej gospodarki typu Gale'a z rosnącą efektywnością produkcji na magistrali, w którym do oceny procesów wzrostu posłużyła (mierzona w cenach von Neumanna) wartość produkcji wytworzonej w ostatnim okresie ustalonego horyzontu $T = \{0,1, \ldots, t_1\}$ funkcjonowania gospodarki (zadanie wzrostu docelowego). W niniejszym artykule prezentujemy tzw. „słabą" wersję twierdzenia o magistrali w modelu niestacjonarnej gospodarki typu Gale'a, w którym rolę kryteriów wzrostu gra łączna wartość produkcji (mierzonej w cenach von Neumanna) wytworzonej w całym horyzoncie *T*.

Pokazujemy, że w niestacjonarnej gospodarce Gale'a ze zmienną technologią, mimo zmiany kryterium wzrostu, w długich okresach czasu optymalne procesy "prawie zawsze"[1] przebiegają w dowolnie bliskim otoczeniu ścieżek wzrostu zwanych magistralami (w szczególności, po takich ścieżkach).

2. MODEL

Zakładamy, że czas *t* zmienia się skokowo, $t = 0, 1, 2, \ldots$. W gospodarce wytwarza się i zużywa n < +∞ towarów. Przez $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)) \geqq 0$ oznaczamy wektor towarów zużywanych w gospodarce w okresie *t* (wektor nakładów), przez $y(t) = (y_1(t), \ldots, y_n(t)) \geqq 0$ oznaczamy wektor towarów wytwarzanych w tym okresie w gospodarce (wektor produkcji). Jeżeli z wektora nakładów $x(t)$ można wytworzyć wektor produkcji $y(t)$, wówczas mówimy, że para $(x(t), y(t))$ opisuje technologicznie dopuszczalny proces produkcji. Zbiór wszystkich technologicznie dopuszczalnych procesów produkcji w gospodarce w okresie *t* oznaczamy przez $Z(t) \subset R_+^{2n}$. Warunek $(x(t), y(t)) \in Z(t)$ (równoważnie: $(x, y) \in Z(t)$) oznacza, że w okresie *t* z nakładów

[1] Tzn. we wszystkich okresach horyzontu *T* za wyjątkiem ich skończonej liczby, niezależnej od długości horyzontu.

$x(t)$ w gospodarce możliwe jest wytworzenie produkcji $y(t)$. Przestrzenie produkcyjne $Z(t)$, $t = 0, 1, 2,\ldots$, mają następujące własności[2]:

(G1) $\forall (x^1, y^1) \in Z(t)\ \forall (x^2, y^2) \in Z(t)\ \forall \alpha, \beta \geq 0 \big((\alpha x^1 + \beta x^2, \alpha y^1 + \beta y^2) \in Z(t)\big)$.

(G2) $\forall (x, y) \in Z(t)\ (x = 0 \Longrightarrow y = 0)$.

(G3) $\forall (x, y) \in Z(t)\ \forall x' \geqq x\ \forall\ 0 \leqq y' \leqq y\ \big((x', y') \in Z(t)\big)$.

(G4) Zbiory $Z(t)$ są domknięte w R^{2n}.

(G5) $Z(t) \subseteq Z(t+1), t = 0,1,\ldots,t_1 - 1$.

Zauważmy, że jeżeli $0 \neq (x, y) \in Z(t)$, to zgodnie z (2) $x \neq 0$. Interesują nas wyłącznie takie niezerowe (nietrywialne) procesy. Liczbę

$$\alpha\big(x(t), y(t)\big) = \max\ \{\alpha |\ \alpha x(t) \leqq y(t)\}$$

nazywamy optymalnym wskaźnikiem technologicznej efektywności procesu $(x(t), y(t)) \in Z(t) \setminus \{0\}$ Funkcja α jest ciągła i dodatnio jednorodna stopnia 0 na obszarze określoności (Panek, 2003, tw. 5.2). Liczbę

$$\alpha_{M,t} = \max_{(x,y) \in Z(t) \setminus \{0\}} \alpha(x, y)$$

nazywamy optymalnym wskaźnikiem technologicznej efektywności produkcji w niestacjonarnej gospodarce Gale'a w okresie t. Przy przyjętych założeniach, w każdym okresie t istnieje taki proces produkcji $\big(\bar{x}(t), \bar{y}(t)\big) \in Z(t)$, że $\alpha\big(\bar{x}(t), \bar{y}(t)\big) = \alpha_{M,t}$, zob. Panek (2013, tw.2) . Nazywamy go optymalnym procesem produkcji w okresie t. Wobec dodatniej jednorodności stopnia 0 funkcji α, w każdym okresie t proces ten jest określony z dokładnością do struktury:

$$\forall \lambda > 0\ \forall t\ \Big(\alpha\big(\lambda \bar{x}(t), \lambda \bar{y}(t)\big) = \alpha\big(\bar{x}(t), \bar{y}(t)\big) = \alpha_{M,t}\Big).$$

[2] Zob. Panek (2014a). Z interpretacją ekonomiczną i niektórymi innymi własnościami podobnych przestrzeni produkcyjnych typu Gale'a można zapoznać się np. w pracy Panek (2003, rozdz.5). W sensie geometrycznym są one stożkami domkniętymi w R^n (zawartymi w R^n_+) z wierzchołkami w 0.

Nietrudno zauważyć, że wobec **(G5)**: $\alpha_{M,t+1} \geq \alpha_{M,t}$, $t = 0, 1, 2,\dots$. Jeżeli w szczególności $\alpha_{M,t} > 1$, wtedy o gospodarce mówimy, że jest produktywna w okresie t. Gospodarkę Gale'a nazywamy produktywną, jeżeli jest produktywna w każdym okresie $t = 0, 1, 2,\dots$. Zakładamy ponadto, że w niestacjonarnej gospodarce Gale'a przestrzenie produkcyjne $Z(t)$, $t = 0, 1, 2,\dots$, spełniają tzw. warunek regularności:

(G6) W optymalnym procesie produkcji wytwarzane są wszystkie towary (Gale, 1956; Makarow, Rubinow, 1973; Panek, 2003, rozdz. 5). Z warunku tego oraz **(G3)** wynika, że

$$\forall t\ \exists\big(\bar{x}(t), \bar{y}(t)\big) \in Z(t)\ \big(\ \alpha_{M,t}\bar{x}(t) = \bar{y}(t) > 0\big). \tag{1}$$

Oznaczając przez $p(t) = (p_1(t),..., p_n(t) \geq 0$ wektor cen towarów w okresie t oraz biorąc dowolny proces $(x(t), y(t)) \in Z(t)$ możemy zdefiniować następującą liczbę:

$$\beta\big(x(t), y(t), p(t)\big) = \frac{\langle p(t), y(t)\rangle}{\langle p(t), x(t)\rangle}$$

(tam gdzie jest określona), którą nazywamy wskaźnikiem ekonomicznej efektywności procesu $(x(t), y(t))$ przy cenach $p(t)$ (tutaj i wszędzie dalej symbol $\langle a, b\rangle$ oznacza iloczyn skalarny wektorów a, b: $\langle a, b\rangle = \sum_i a_i\, b_i$). Można udowodnić, że w regularnej, niestacjonarnej gospodarce Gale'a w każdym okresie t istnieją takie ceny $\bar{p}(t) \geq 0$, przy których:

$$\beta\big(\bar{x}(t), \bar{y}(t), \bar{p}(t)\big) = \max_{(x,y)\in Z(t)\setminus\{0\}} \beta\big(x, y, \bar{p}(t)\big) = \ \alpha_{M,t} \tag{2}$$

Panek (2003, tw. 5.3)[3]. O trójce $\{\alpha_{M,t}, \big(\bar{x}(t), \bar{y}(t)\big), \bar{p}(t)\}$ mówimy, że opisuje stan chwilowej równowagi von Neumanna w niestacjonarnej gospodarce Gale'a[4]. Ceny równowagi chwilowej $\bar{p}(t)$ nazywamy cenami von Neumanna w momencie t. Podobnie jak optymalny proces produkcji $\big(\bar{x}(t), \bar{y}(t)\big)$, są one określone z dokładnością do struktury (mnożenia przez dowolną liczbę dodatnią). Interesuje nas niestacjonarna gospodarka, w której ceny von Neumanna są nierosnące[5]:

---

[3] Zob. także Panek (2014a, przypis 2).

[4] W równowadze takiej dochodzi do zrównania ekonomicznej efektywności produkcji z efektywnością technologiczną na najwyższym, możliwym do osiągnięcia przez gospodarkę poziomie.

[5] Zob. Panek (2014a, 2014b). Wobec tego, że ceny gospodarce Gale'a są określone z dokładnością do struktury, warunek ten zachodzi np. gdy w każdym okresie t ceny $\bar{p}(t)$ są dodatnie.

(G7) $\forall t\ \big(\bar{p}(t+1) \leqq \bar{p}(t)\big)$.

Weźmy dowolny okres $t_1 < +\infty$. Przez $T = \{0,1,,..., t_1\}$ oznaczamy zbiór okresów czasu, który nazywamy horyzontem gospodarki (długości t_1). Gospodarka jest zamknięta w tym sensie, że nakłady $x(t + 1)$ (ponoszone w okresie następnym) mogą pochodzić w niej wyłącznie z produkcji $y(t)$ (wytworzonej w okresie poprzednim), czyli $x(t + 1) \leqq y(t)$, a stąd i z **(G3)** wynika, że

$$\big(y(t), y(t+1)\big) \in Z(t+1), \quad t = 0,1,\ldots,t_1 - 1. \tag{3}$$

Niech

$$y(0) = y^0 > 0 \tag{4}$$

będzie danym (ustalonym) wektorem produkcji w okresie $t = 0$. Ciąg wektorów produkcji $\{y(t)\}_{t=0}^{t_1}$ spełniający warunki (3), (4) nazywamy (y^0, t_1) – dopuszczalnym procesem wzrostu (lub (y^0, t_1) – dopuszczalną trajektorią produkcji) w niestacjonarnej gospodarce Gale'a. Przy przyjętych założeniach procesy takie istnieją niezależnie od długości horyzontu T.

Z regularności gospodarki Gale'a i tego, że optymalne procesy są w niej określone z dokładnością do struktury wynika, że zawsze można wskazać taki ciąg optymalnych procesów $\big\{\big(\bar{x}(t), \bar{y}(t)\big)\big\}_{t=0}^{t_1}$, w którym $\bar{x}(t+1) \leqq \bar{y}(t)$. Postulujemy więcej, a mianowicie:

(G8) Niezależnie od długości horyzontu $T = \{0,1,,..., t_1\}$ istnieje taki ciąg optymalnych procesów produkcji $\big\{\big(\bar{x}(t), \bar{y}(t)\big)\big\}_{t=0}^{t_1}$, w którym

$$\bar{x}(t+1) = \bar{y}(t), t = 0,1,\ldots,t_1 - 1.$$

Ciąg wektorów $\{\bar{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$ tworzy wówczas $(\bar{y}^0, t_1)$ dopuszczalny proces wzrostu postaci:

$$\bar{y}(t) = \left(\prod_{\tau=1}^{t} \alpha_{M,\tau}\right)\bar{y}^0, \quad t = 1,\ldots,t_1 \tag{5}$$

gdzie $\bar{y}^0$ jest dowolnym wektorem produkcji w optymalnym procesie w okresie początkowym $t = 0$ (nie należy go mylić z początkowym wektorem produkcji (4)). Proces ten jest określony z dokładnością do mnożenia przez stałą dodatnią. Każdy ciąg $\{\tilde{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$, w którym $\tilde{y}(t) = \lambda\bar{y}(t) > 0$, też tworzy $(\tilde{y}^0, t_1)$ – dopuszczalny proces wzrostu z wektorm $\tilde{y}^0 = \lambda\bar{y}^0$, czyli

$$\forall\, \lambda > 0\ \forall t_1\ \forall t \in \{0, 1, \dots, t_1\}\ \left(\frac{\tilde{y}(t)}{\|\tilde{y}(t)\|} = \frac{\lambda\bar{y}(t)}{\|\lambda\bar{y}(t)\|} = \frac{\bar{y}(t)}{\|\bar{y}(t)\|} = \frac{\bar{y}(0)}{\|\bar{y}(0)\|} = \bar{s} = const. > 0\right), \quad (6)$$

zatem niezależnie od długości horyzontu *T* charakteryzuje się stałą w czasie strukturą produkcji (tutaj i dalej $\|a\| = \sum_i |a_i|$). Półprostą

$$N = \{\lambda\bar{s} |\ \lambda > 0\}$$

nazywamy magistralą produkcyjną (promieniem von Neumanna). Tak opisana niestacjonarna gospodarka Gale'a osiąga na magistrali maksymalne (różne w różnych okresach, generalnie rosnące) tempo wzrostu[6] oraz najwyższą efektywność ekonomiczną produkcji, równą efektywności technologicznej (zob. (2)). Poza magistralą efektywność ekonomiczna produkcji nigdzie nie jest wyższa od jej efektywności na magistrali. Zakładamy, że wszędzie poza magistralą efektywność ekonomiczna gospodarki Gale'a jest niższa od optymalnej:

(G9) $\forall t\ \forall\,(x, y) \in Z(t) \setminus \{0\}\ \left(x \notin N \Rightarrow \beta(x, y, \bar{p}(t)) < \alpha_{M,t}\right.$

(dokładniej: efektywność ekonomiczna dowolnego procesu, w którym struktura nakładów różni się od magistralnej, jest niższa od optymalnej)[7]. Wówczas:

$$\forall \varepsilon > 0\ \forall t\ \exists \delta_{\varepsilon,t} \in \left(0, \alpha_{M,t}\right)\ \forall (x, y) \in Z(t)$$

$$\left(\left\|\frac{x}{\|x\|} - \bar{s}\right\| \geq \varepsilon \Rightarrow\ \beta\left(x, y, \bar{p}(t)\right) \leq \alpha_{M,t} - \delta_{\varepsilon,t}\right), \quad (7)$$

(Panek, 2003, lemat 5.2; zob. także Panek, 2014a, przypis 5).

---

[6] Zachowując jednak strukturę produkcji, co jest pewną słabością modelu i wymaga dalszych badań.

[7] Warunek ten zapewnia jednoznaczność magistrali. W ogólnym przypadku może być pominięty.

Ostatni warunek, który formułujemy poniżej, wyklucza taką nierealistyczną sytuację, gdy mimo że struktura procesu produkcji odbiega od optymalnej o pewną ustaloną wielkość $\varepsilon > 0$, jego efektywność ekonomiczna może nieskończenie mało różnić się od optymalnej efektywności osiąganej przez gospodarkę na magistrali:

(G10) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \nu_\varepsilon > 0 \;\; \forall t \geq 0 \left(\frac{\delta_{\varepsilon,t}}{\alpha_{M,t}} \geq \nu_\varepsilon \right)$.

Jeżeli spełniony jest ten warunek, wtedy ciąg $\left\{ \frac{\delta_{\varepsilon,t}}{\alpha_{M,t}} \right\}_{t=0}^{\infty}$ jest jednostajnie ograniczony z dołu przez liczbę $\upsilon_\varepsilon > 0$. Łatwo zauważyć, że $\upsilon_\varepsilon \in (0,1)$

3. OPTYMALNY PROCES WZROSTU. „SŁABY" EFEKT MAGISTRALI

Rozpatrzmy następujące zadanie maksymalizacji łącznej wartości produkcji, mierzonej w cenach von Neumanna, wytworzonej w gospodarce w całym horyzoncie T[8]

$$\max \sum_{t=1}^{t_1} \langle \bar{p}(t), y(t) \rangle \tag{8}$$

$$\text{p. w. (3) – (4).}$$

Przy przyjętych założeniach zadanie to ma rozwiązanie $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$, które nazywamy (y^0, t_1) – optymalnym procesem wzrostu (trajektorią produkcji). O tzw. „słabej" zbieżności optymalnych procesów wzrostu do magistrali w niestacjonarnej gospodarce Gale'a mówi następujące twierdzenie.

□ **Twierdzenie** („Słabe" twierdzenie o magistrali)

Jeżeli niestacjonarna gospodarka Gale'a, spełniająca warunki **(G1) – G(10),** jest produktywna oraz niezależnie od długości horyzontu T ceny von Neumanna są w niej jednostajnie ograniczone (z góry i z dołu)[9]:

$$\forall t_1 > 0 \; \forall t \in T \; (0 \leq \pi_{min} \leqq \bar{p}(t) \leqq \pi_{max}) \tag{9}$$

to $\forall \varepsilon > 0$ istnieje taka liczba k_ε, że liczba okresów czasu w których (y^0, t_1) – optymalny proces wzrostu $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ spełnia warunek

[8] Pomijamy okres początkowy $t = 0$, w którym produkcja y^0 jest dana (zob. (4)).

[9] W wektorze $\pi_{min} \geq 0$ przynajmniej jedna współrzędna powinna być dodatnia.

$$\left\|\frac{y^*(t)}{\|y^*(t)\|}-\bar{s}\right\|\geq\varepsilon \tag{10}$$

nie przekracza k_ε. Liczba k_ε nie zależy od długości horyzontu T.

Dowód. Początkowy wektor produkcji y^0 oraz wektor $\bar{s}$ struktury produkcji na magistrali są dodatnie, zob. (4), (6), więc $\exists\ \sigma>0\ (y^0\geqq\sigma\bar{s}>0)$. Zgodnie z **(G3)**, (3) i (4), przyjmując w (5) $\bar{y}(0)=\sigma\bar{s}$, otrzymujemy (y^0, t_1) – dopuszczalny proces wzrostu $\{\tilde{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$:

$$\tilde{y}(t)=\begin{cases} y^0, & \text{dla } t=0,\\ \sigma\bar{s}\left(\prod_{\tau=1}^{t}\alpha_{M,\tau}\right), & \text{dla } t=1,2,\dots,t_1.\end{cases}$$

Z definicji procesu optymalnego oraz (9) wynika, że:

$$\sum_{t=1}^{t_1}\langle\bar{p}(t),y^*(t)\rangle\geq\sum_{t=1}^{t_1}\langle\bar{p}(t),\tilde{y}(t)\rangle=\sum_{t=1}^{t_1}\langle\bar{p}(t),\left(\sigma\prod_{\tau=1}^{t}\alpha_{M,\tau}\right)\bar{s}\rangle\geq$$

$$\geq\sigma\langle\bar{p}(1),\bar{s}\rangle\sum_{t=1}^{t_1}\prod_{\tau=1}^{t}\alpha_{M.\tau}\geq\sigma\langle\pi_{min},\bar{s}\rangle\sum_{t=1}^{t_1}\prod_{\tau=1}^{t}\alpha_{M.\tau}>0. \tag{11}$$

Z drugiej strony, zgodnie z (2), (3) mamy:

$$\beta\left(y^*(t),y^*(t+1),\bar{p}(t+1)\right)=\frac{\langle\bar{p}(t+1),y^*(t+1)\rangle}{\langle\bar{p}(t+1).y^*(t)\rangle}\leq\alpha_{M,t+1}$$

dla t = 0,1, …, t_1 czyli:

$$\langle\bar{p}(t+1),y^*(t+1)\rangle\leq\alpha_{M,t+1}\langle\bar{p}(t+1),y^*(t)\rangle,\ t=0,1,\dots,t_1-1. \tag{12}$$

Ustalmy liczbę $\varepsilon>0$ i oznaczmy przez $\tau_1<\tau_2<\dots<\tau_k$ $(0\leq\tau_i<t_1,\ i=1,\dots,k)$ okresy, w których zachodzi warunek (10). Wówczas, zgodnie z (7):

$$\langle\bar{p}(t+1),y^*(t+1)\rangle\leq\left(\alpha_{M,t+1}-\delta_{\varepsilon,t+1}\right)\langle\bar{p}(t+1),y^*(t)\rangle,\ \ t=\ \tau_1,\dots,\tau_k. \tag{13}$$

Łącząc (12), (13) oraz uwzględniając **(G7)**, **(G10)** po przekształceniach dochodzimy do nierówności:

$$\sum_{t=1}^{t_1}\langle \bar{p}(t), y^*(t)\rangle \leq \langle \bar{p}(1), y^0\rangle\Big[\alpha_{M,1} + \alpha_{M,1}\alpha_{M,2} + \dots + \prod_{\tau=1}^{t_1-k}\alpha_{M,\tau} + \\ +(1-\nu_\varepsilon)\prod_{\tau=1}^{t_1-k+1}\alpha_{M,\tau} + (1-\nu_\varepsilon)^2\prod_{\tau=1}^{t_1-k+2}\alpha_{M,\tau} + \dots + (1-\nu_\varepsilon)^k\prod_{\tau=1}^{t_1}\alpha_{M,\tau}\Big]. \tag{14}$$

Z (11), (14) wynika, że:

$$G_\varepsilon(t_1,k) = \frac{B_\varepsilon(t_1,k)}{A(t_1)} \geq \frac{\sigma\langle \bar{p}(1), \bar{s}\rangle}{\langle \bar{p}(1), y^0\rangle} \geq \frac{\sigma\langle \pi_{min}, \bar{s}\rangle}{\langle \pi_{max}, y^0\rangle} = C = const. > 0,$$

gdzie

$$A(t_1) = \sum_{t=1}^{t_1}\prod_{\tau=1}^{t}\alpha_{M,\tau},$$

$$B_\varepsilon(t_1,k) = \alpha_{M,1} + \alpha_{M,1}\alpha_{M,2} + \dots + \prod_{\tau=1}^{t_1-k}\alpha_{M,\tau} + (1-\nu_\varepsilon)\prod_{\tau=1}^{t_1-k+1}\alpha_{M,\tau} + \\ + (1-\nu_\varepsilon)^2\prod_{\tau=1}^{t_1-k+2}\alpha_{M,\tau} + \dots + (1-\nu_\varepsilon)^k\prod_{\tau=1}^{t_1}\alpha_{M,\tau} > 0$$

lub równoważnie, po podstawieniu $\delta_\varepsilon = 1 - \nu_\varepsilon \in (0,1)$:

$$G_\varepsilon(t_1,k) = \frac{A(t_1) - D_\varepsilon(t_1,k)}{A(t_1)} \geq C, \tag{15}$$

gdzie

$$D_\varepsilon(t_1,k) = (1-\delta_\varepsilon)\prod_{\tau=1}^{t_1-k+1}\alpha_{M,\tau} + (1-\delta_\varepsilon^2)\prod_{\tau=1}^{t_1-k+2}\alpha_{M,\tau} + \dots + (1-\delta_\varepsilon^k)\prod_{\tau=1}^{t_1}\alpha_{M,\tau}$$

gdy $t_1 \geq k > 0$ oraz

$D_\varepsilon(t_1, k) = 0$ dla $k = 0$[10]

Załóżmy, że warunek (15) zachodzi k razy ($t_1 \geq k$). Dzieląc w (15) licznik i mianownik przez $\prod_{\tau=1}^{t_1}\alpha_{M,\tau} > 0$ otrzymujemy:

$$G_\varepsilon(t_1,k) = \frac{\frac{1}{\prod_{\tau=2}^{t_1}\alpha_{M,\tau}} + \frac{1}{\prod_{\tau=3}^{t_1}\alpha_{M,\tau}} + \dots + 1 - \frac{1-\delta_\varepsilon}{\prod_{\tau=t_1-k+2}^{t_1}\alpha_{M,\tau}} - \frac{1-\delta_\varepsilon^2}{\prod_{\tau=t_1-k+3}^{t_1}\alpha_{M,\tau}} - \dots - (1-\delta_\varepsilon^k)}{\frac{1}{\prod_{\tau=2}^{t_1}\alpha_{M,\tau}} + \frac{1}{\prod_{\tau=3}^{t_1}\alpha_{M,\tau}} + \dots + 1}.$$

[10] Dla $k = 0$ nierówność (15) jest spełniona zawsze (dla dowolnego $t_1 > 0$).

Ponieważ $\alpha_{M,t+1} \geq \alpha_{M,t}$, $t = 0,1, \ldots, t_1 - 1$ (zgodnie z (**G5**)), więc wbrew (15):

$$G_\varepsilon(t_1, k) < C, \tag{16}$$

gdy tylko liczba k jest dostatecznie duża (oraz $t_1 \geq k$)[11]. Istnieje więc taka liczba naturalna k_ε, niezależna od długości horyzontu t_1, że liczba okresów czasu, w których zachodzi warunek (10), nie przekracza k_ε.

■

Twierdzenie 1 głosi, że niezależnie od długości horyzontu T, we wszystkich okresach $t \in T$, za wyjątkiem ich pewnej skończonej liczby (niezależnej od długości horyzontu), struktura produkcji $\frac{\boldsymbol{y}^*(\boldsymbol{t})}{\|\boldsymbol{y}^*(\boldsymbol{t})\|}$ w optymalnych procesach wzrostu różni się dowolnie mało od struktury produkcji $\bar{s}$ na magistrali. W jego świetle magistrala staje się więc swoistą „drogą szybkiego ruchu" gospodarki.

4. UWAGI KOŃCOWE

W artykule Panek (2014a) udowodniono „słaby" efekt magistrali w niestacjonarnej gospodarce Gale'a ze zmienną technologią, rosnącym tempem wzrostu produkcji na magistrali i kryterium maksymalizacji produkcji wytworzonej w ostatnim okresie horyzontu T. Jego kontynuacją jest artykuł Panek (2014b), zawierający dowód wersji pośredniej – między „silną" i „bardzo silną" – twierdzenia o magistrali w niestacjonarnej gospodarce Gale'a. Natomiast w niniejszym artykule została zaprezentowana „słaba" wersja twierdzenia o magistrali w gospodarce Gale'a ze zmienną technologią, w której w odróżnieniu od wcześniejszych prac rolę kryterium wzrostu gra wartość produkcji wytworzonej we wszystkich okresach ustalonego horyzontu T. W odróżnieniu od prac Panek (2014a, 2014b) przy dowodzie twierdzenia istotna jest obecnie produktywność gospodarki.

Własności optymalnych procesów wzrost w gospodarce typu Gale'a z technologią zbieżną do pewnej technologii granicznej zostały wcześniej prześledzone w artykule Panek (2013). Hipoteza granicznej technologii jest trudna do zweryfikowania. Okazuje się, że o magistralnych własnościach gospodarki można wnioskować bez potrzeby rozstrzygania tej hipotezy, także – jak w artykule – w przypadku niestacjonarnej gospodarki z **dowolnie** zmieniającą się technologią. Na tym polega wartość udowodnionego twierdzenia.

Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu

---

[11] Jeżeli $k \to +\infty$ oraz $t_1 - k \to +\infty$, wtedy $G_\varepsilon(t_1, k) \to 0 < C$. W pozostałych przypadkach, gdy tylko liczby t_1 i k są dostatecznie duże, zachodzi warunek (16), choć sam ciąg $G_\varepsilon(t_1, k)$ nie musi być zbieżny.

LITERATURA

Gale D., (1956), The Closed Linear Model of Production, w: Kuhn H. W., Tucker A. W., (red.), *Linear Inequalities and Related Systems*, Princeton Univ. Press, Princeton, 285–303.
Makarow W. L., Rubinow A. M., (1973), *Matiematiczeskaja Tieoria Ekonomiczeskoj Dynamiki i Rawnowiesija*, Nauka, Moskwa.
Panek E., (2003), *Ekonomia matematyczna*, Wyd. AE, Poznań.
Panek E., (2013), „Słaby" i „bardzo silny" efekt magistrali w niestacjonarnej gospodarce Gale'a z graniczną technologią, *Przegląd Statystyczny*, 60 (3), 291–30.
Panek E., (2014a), Niestacjonarna gospodarka Gale'a z rosnącą efektywnością produkcji na magistrali, *Przegląd Statystyczny*, 61 (1), 5–14.
Panek E., (2014b), O pewnej wersji twierdzenia o magistrali w gospodarce Gale'a ze zmienną technologią, *Przegląd Statystyczny,* 61 (2), 105–114.
Takayama A., (1985), *Mathematical Economics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge.

MODEL GOSPODARKI GALE'A ZE ZMIENNĄ TECHNOLOGIĄ, ROSNĄCĄ EFEKTYWNOŚCIĄ PRODUKCJI I SZCZEGÓLNĄ POSTACIĄ KRYTERIUM WZROSTU. „SŁABY" EFEKT MAGISTRALI

Streszczenie

W nawiązaniu do prac Panek (2014a, 2014b) udowodniono tzw. „słabą" wersję twierdzenia o magistrali w niestacjonarnym modelu dynamiki ekonomicznej typu Gale'a z kryterium maksymalizacji wartości produkcji, mierzonej w cenach von Neumanna, w ustalonym horyzoncie $T = \{0,1, ..., t_1\}$ funkcjonowania gospodarki. Przy dowodzie twierdzenia istotną rolę gra produktywność gospodarki oraz jej rosnąca technologiczna efektywność na magistrali.

Słowa kluczowe: niestacjonarna gospodarka Gale'a, techniczna i ekonomiczna efektywność produkcji, równowaga von Neumanna, magistrala produkcyjna

GALE'S ECONOMY MODEL WITH CHANGEABLE TECHNOLOGY, INCREASING PRODUCTION EFFICIENCY AND PARTICULAR FORM OF THE GROWTH CRITERION. „WEAK" TURNPIKE EFFECT

Abstract

In reference to papers Panek (2014a, 2014b) we proved the so called „weak" version of the turnpike theorem in the non-stationary model of economic dynamics of the Gale type with the criterion of maximization of the production value, measured in von Neumann's prices and with the fixed economy horizon $T = \{0,1, ..., t_1\}$. In the proof of the theorem the efficiency of the economy and its increasing technological efficiency on the turnpike play both significant roles.

Keywords: non-stationary Gale's economy, technological and economical production efficiency, von Neumann equilibrium, production turnpike