METODY ILOŚCIOWE W BADANIACH EKONOMICZNYCH
Tom XVI/4, 2015, str. 230 – 241

SZACOWANIE KOSZTU SPRAWIEDLIWOŚCI ALOKACJI OBCIĄŻEŃ W SIECI DLA METODY OPTYMALIZACJI UPORZĄDKOWANEJ ŚREDNIEJ WAŻONEJ

Grzegorz Zalewski
Instytut Łączności – Państwowy Instytut Badawczy
e-mail: g.zalewski@itl.waw.pl
Włodzimierz Ogryczak
Instytut Automatyki i Informatyki Stosowanej, Politechnika Warszawska
e-mail: wogrycza@elka.pw.edu.pl

Streszczenie: Jednym z wielu problemów podczas wymiarowania sieci telekomunikacyjnych jest optymalizacja przepływów zapotrzebowań między zadanymi węzłami. Jednym ze sposobów wykorzystywanych do tego celu jest formułowanie zadania programowania liniowego. W niniejszej pracy skupiono się na optymalizacji ulokowania przepływów na danych ścieżkach w grafie nieskierowanym. Dodatkowo ważnym elementem zadania jest fakt, że ścieżki dzielą między sobą ograniczone zasoby przepustowości, co sprawia zaistnienie rzeczywistego problemu decyzyjnego. Dla tak sformułowanego problemu wykorzystano formułę krawędź-ścieżka programowania liniowego oraz implementację zadania w standardzie AMPL. W pracy oszacowano koszt rozwiązania sprawiedliwego dla modelu OWA (Ordered Weighted Averaging) w porównaniu do rozwiązania maksymalizującego przepływy na ścieżkach oraz do rozwiązania modelu MMF (maximin fairness). Efektem końcowym pracy jest przedstawienie wyników oraz podsumowanie analizy otrzymanych rozwiązań na bazie danych przykładowych, stanowiących odniesienie do sieci telekomunikacyjnej szkieletowej Polski, gdzie głównym miernikiem jest różnica wartości funkcji celu dla wymienionych metod sprawiedliwej optymalizacji oraz rozwiązania maksymalizującego przepływ całkowity.

Słowa kluczowe: metoda optymalizacji średniej ważonej, OWA, optymalizacja sprawiedliwa, optymalizacja wielokryterialna, optymalizacja sieci, koszt sprawiedliwości, problemy decyzyjne, programowanie liniowe, algorytmy

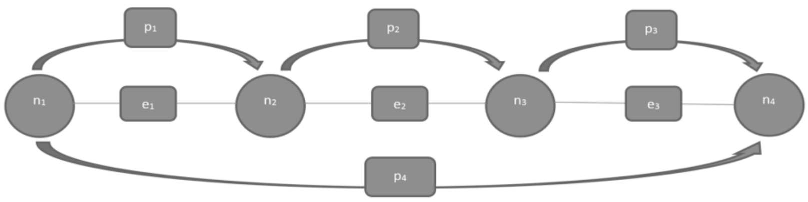
WSTĘP

Rozważmy problem alokacji zapotrzebowań na przepływ w grafie o zadanej strukturze. Dwie podstawowe metody formułowania, w zależności od zamierzonych celów to podejście:

- krawędź-ścieżka,
- węzeł-krawędź.

Powyższe dwa podejścia różnią się między sobą implementacją jak również złożonością obliczeniową. W pracy przyjęto nomenklaturę link-path. Krawędzie w grafie są nieskierowane, tzn. ruch po nich możliwy jest w obydwu kierunkach. Każda krawędź posiada ograniczoną pojemność. W grafie zadany jest również zbiór ścieżek, po których należy przeprowadzić możliwie największą wartość zapotrzebowania, biorąc pod uwagę rozwiązanie sprawiedliwe. Skrajny przypadek gdzie jedna ścieżka maksymalizująca funkcję kryterium, blokuje zapotrzebowanie innej ścieżki jest niesprawiedliwe i niemożliwe do przyjęcia. Wyobraźmy sobie przypadek sieci tak jak na Rysunku 1.

Rysunek 1. Struktura przykładu ilustrującego problem alokacji zapotrzebowań na przepustowość na zdefiniowanych ścieżkach



Źródło: opracowanie własne

Dla przykładu przedstawionego na Rysunku 1 zdefiniowane zostały cztery drogi ($P \in \{ p_1, p_2, p_3, p_4 \}$), dla których należy rozdysponować obciążenie dostępnych łączy ($E \in \{e_1, e_2, e_3\}$). Drogi te to: $p_1=\{ e_1 \}$, $p_2=\{ e_2 \}$, $p_3=\{ e_3 \}$, $p_4=\{ e_1, e_2, e_3 \}$. Ważnym ograniczeniem zadania jest maksymalna pojemność łączy, która oznaczona została jako C_e, $e \in E$. Całkowity przepływ realizowany przez wszystkie ścieżki zawierające w sobie *e-tą* krawędź nie może być większy niż pojemność tej krawędzi. Przyjmijmy, że zadanie polega na maksymalizacji sumy przepustowości jaką należy zapewnić *p-tej* drodze. Dla dodatkowego uproszczenia problemu przyjęto równe wartości pojemności dla każdej krawędzi grafu $C_e=10$ *j*. Dla tak trywialnego zadania łatwo zauważyć że optymalnym rozwiązaniem będzie przypisanie wartości 10 jednostek drodze p_1, p_2 oraz p_3, natomiast przypisanie wartości 0 jednostek dla drogi p_4. W praktyce rozwiązanie to zablokuje całkowicie jakikolwiek przepływ bezpośredni z wierzchołka n_1 do n_4. Należy więc rozważyć możliwość przydzielenia określonej wielkości przepustowości do drogi p_4. Każda jednostka przydzielona do tej drogi powoduje jednak zmniejszenie wartości funkcji celu o trzy jednostki. Zaobserwować tutaj można realny konflikt pomiędzy rozwiązaniem maksymalizującym oczekiwany zysk z przepuszczonego zapotrzebowania o maksymalnej wartości, a rozwiązaniem sprawiedliwym. Wielkości te są odwrotnie proporcjonalne. W literaturze można znaleźć liczne publikacje na ten temat. Według jednej z definicji kosztu sprawiedliwości (ang. Price of Fairness – POF) jest to iloraz różnicy pomiędzy wartością maksymalną zadania optymalizacji i rozwiązania sprawiedliwego w stosunku do wartości rozwiązania maksymalnego[1]. Definicję powyższą opisuje następujący wzór (1).

$$POF(U;\alpha) = \frac{max(U) - fair(U,\alpha)}{max(U)} \tag{1}$$

gdzie:

POF(U;α) - koszt rozwiązania sprawiedliwego,

max(U) - rozwiązanie optymalne w sensie maksymalizacji funkcji kryterium

fair(U,α) - rozwiązanie sprawiedliwe z uwzględnieniem współczynnika sprawiedliwości α.

W przypadku problemu sieciowego jako rozwiązanie optymalne maksymalizujące funkcję celu można rozumieć takie, którego funkcja kryterium przyjmuje postać jak we wzorze (2).

$$max \sum_{p \in P} x_p \tag{2}$$

gdzie:

P - zbiór ścieżek w grafie dla których należy dobrać wartości przepuszczanych przepustowości,

x_p - zmienna decyzyjna określająca wartość przepływu na *p-tej* ścieżce.

Rozwiązanie utożsamiane ze sprawiedliwym w zależności od wyboru koncepcji sprawiedliwości posiada już inne, bardziej lub mniej skomplikowane formy. Do rozwiązań sprawiedliwych zaliczyć możemy rozwiązanie zadania maksymalizacji leksykograficznej, zadania maximin, modyfikacje tych sumą wersji powyższych zadań, jak również rozwiązanie zadania sformułowanego według koncepcji OWA (z ang. Ordered Weighted Averaging). W pracy skupiono uwagę właśnie na tym ostatnim podejściu do zadanego problemu.

DOTYCHCZASOWE PRACE NAD PROBLEMEM

Problem sprawiedliwego podziału był już poruszany w opracowaniach naukowych. Dotyczy on nie tylko tematów związanych z modelowaniem sieci telekomunikacyjnych. Przykładem może być cała dziedzina zadań związanych z alokacją zasobów na określonym terenie w taki sposób, aby każda z osób losowo na nim rozmieszczonych mogła z nich skorzystać w równym stopniu. Jedną

[1] Ogryczak W., Luss H., Pióro M., Nace D., Tomaszewski A. (2014) Fair Optimization and Networks: A Survey, Journal of Applied Mathematics, Vol. 2014, pp. 2-8.

z metod uzyskania rozwiązania efektywnego takiego zadania jest metoda maximin (MMF)[2] (3) oraz jej regularyzacja sumą poszczególnych wartości funkcji realizacji podjętych decyzji (4).

$$max\{\min_{i=1,\dots,m} f_i(x) : x \in Q\} \tag{3}$$

$$lexmax\{(max\{\min_{i=1,\dots,m} f_i(x)\}, \textstyle\sum_{i=1,\dots,m} f_i(x)) : x \in Q\} \tag{4}$$

lub leksykograficzny maximin[3] (5):

$$lexmax\{\theta\left(f(x)\right) : x \in Q\} \tag{5}$$

gdzie: $\theta\left(f(x)\right) = \left(f_{i_1}\left(x_{i_1}\right), f_{i_2}\left(x_{i_2}\right), \dots, f_{i_m}\left(x_{i_m}\right)\right)$,

$f_{i_1}\left(x_{i_1}\right) \le f_{i_2}\left(x_{i_2}\right) \le \dots \le f_{i_m}(x_{i_m})$

Z problemem tym stykają się kontrolerzy lotów obsługujący przyloty oraz odloty samolotów na lotniskach. Dobrym przykładem sprawiedliwego rozmieszczenia są również problemy służb interwencyjnych, które muszą rozmieścić swoje posterunki właśnie w taki „sprawiedliwy" sposób. Rozwiązanie takiego problemu można również osiągnąć przy pomocy sformułowania zadania „proporcjonalnej sprawiedliwości" (z ang. Proportional Fairness) (PF). Funkcja celu takiego zadania określona jest we wzorze (6):

$$max\{\textstyle\sum_{i=1,\dots,m} log\, f_i(x) : x \in Q\} \tag{6}$$

Dla zadań wypukłych, związanych z problemem alokacji zasobów (n), których liczba jest większa niż 2 wyznaczono maksymalne wartości kosztu sprawiedliwości[4]:

- Dla sformułowania proporcjonalnej sprawiedliwości (PF) (7):

$$POF(U; PF) \le 1 - \frac{2\sqrt{n}-1}{n} \tag{7}$$

- Dla sformułowania maximin regularyzowanego sumą (MMF) (8):

$$POF(U; MMF) \le 1 - \frac{4n}{(n+1)^2} \tag{8}$$

MODEL UPORZĄDKOWANYCH ŚREDNICH WAŻONYCH

Model uporządkowanych średnich ważonych bazuje na porównywaniu uporządkowanych sum częściowych wektorów ocen[5]. W zależności czy

---

[2] Ogryczak W. (2014) Fair Optimization – Methodological Foundations of Fairness in Network Resource Allocation, IEEE 38th Annual International Computers, Software and Applications Conference Workshops.

[3] Luss H. (1999) On Equitable Resource Allocation Problems: A Lexicographic Minimax Approach, Operation Research, Vol. 47, No. 3.

[4] Bertsimas D., Farias Vivek F., Trichakis N. (2011) The Price of Fairness, Operations Research, Vol. 59, No. 1, pp. 17-31.

optymalizacja polega na maksymalizacji czy na minimalizacji funkcji kryteriów mamy do czynienia z uporządkowaniem niemalejącym lub nierosnącym wektorów ocen. Ciąg uporządkowanych niemalejąco poszczególnych wektorów ocen oznaczony został jako $\theta(y) = (\theta_1(y), \theta_2(y), \dots, \theta_m(y))$, gdzie $\theta_1(y) \leq \theta_2(y) \leq \dots \leq \theta_m(y)$. Kolejne wartości funkcji oceny spełniają założenia anonimowej relacji dominacji. Z tego faktu wynika również to że każdy podproblem decyzyjny jest traktowany jednakowo. Model matematyczny sformułowany ogólnie wygląda następująco:

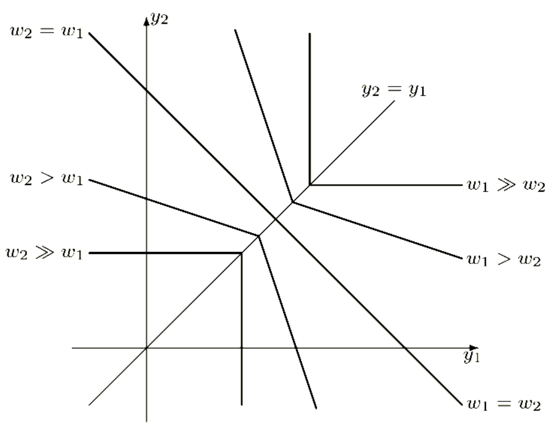
$$max\{\sum_{i=1}^{m} w_i \theta_i(f(x)) : x \in Q\} \quad (9)$$

gdzie: $w_1 > w_2 > \cdots > w_m$, $\sum_{i=1}^{m} w_i = 1$.

Warstwice agregacji OWA przedstawiono na rysunku poniżej (Rysunek 2). Wprowadzenie wag wartościujących poszczególne wartości skumulowanych ocen pozwala na dość elastyczne sterowanie modelem. Wyróżniamy dwa modele dla metody optymalizacji średnich ważonych:

- Model standardowy uporządkowanych średnich ważonych,
- Model uporządkowanych skumulowanych średnich ważonych.

Rysunek 2. Ilustracja przykładowych warstwic modelu OWA



Źródło: opracowanie własne

Zadanie optymalizacji dla modelu standardowego OWA wygląda następująco:

$$\max\{\sum_{i=1}^{m} w_i \theta_i(y)\} = \min_{\tau \epsilon \pi} \sum_{i=1}^{m} w_{\tau(i)} y_i \quad (10)$$

[5] Yager R. R. (1988) On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decision making, IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Vol. 18, No. 1, pp. 183–190.

Takie sformułowanie problemu generuje *m!* nierówności liniowych oraz wykorzystuje technikę relaksacji w postaci generacji kolumn w zadaniu dualnym.

Zadanie optymalizacji modelu uporządkowanych, skumulowanych średnich ważonych przedstawiono poniżej:

$$\max\{\textstyle\sum_{i=1}^{m} \overline{w_i}\overline{\theta_i}(y)\} \tag{11}$$

gdzie: $\bar{\theta}_i(y) = \sum_{k=1}^{i} \theta_k(y)\,, \bar{w}_m = w_m \; i \; \bar{w}_i = w_i - w_{i+1} \; dla \; i = 1, \dots, m$

Dla funkcji oceny wklęsłej oraz wag dodatnich, model uporządkowanych średnich ważonych skumulowanych można zapisać w postaci programowania liniowego (LP). Do badań wykorzystano, więc poniższe sformułowanie zadania pozwalające na jego implementację w standardzie AMPL.

$$\max \textstyle\sum_{i=1}^{m} \bar{w}_i \eta_i \tag{12}$$

Przy ograniczeniach:

$$x \in Q,$$

$$\eta_k = kt_k - \sum_{i=1}^{m} d_{ik} \text{ dla } k = 1, \dots, m$$

$$t_k - d_{ik} \leq f_i(x), d_{ik} \geq 0 \text{ dla } i, k = 1, \dots, m$$

Aby zapisać model uporządkowanych średnich ważonych w postaci programowania liniowego wykorzystano zmienną nieograniczoną t, która pozwala w dość efektywny sposób na wyznaczanie kolejnych k najmniejszych wartości przypisanych do ścieżek zapotrzebowań[6,7]. Należy zauważyć, że w powyższym modelu nie występują zmienne binarne, które są niezbędne przy implementacji klasycznej metody uporządkowanych średnich ważonych[8,9]. Do rozważań nad problemem kosztu sprawiedliwości przyjęto model sieci telekomunikacyjnej szkieletowej polski, który jest opublikowany na stronie *sndlib.zib.de.*

---

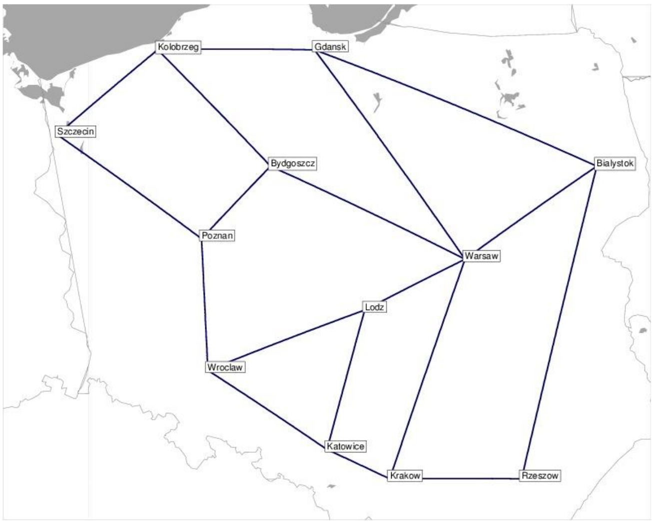
[6] Ogryczak W. (2014) Tail mean and related robust solution concepts, International Journal of Systems Science: Principles and Applications of Systems and Integration, Tom 45, No. 1, pp. 29–38.

[7] Ogryczak W. and Tamir A. (2003) Minimizing the sum of the k largest functions in linear time, Information Processing Letters, Tom 85, No. 3, pp. 117–122.

[8] Ogryczak W. and Śliwiński T. (2003) On solving linear programs with the ordered weighted averaging objective, European Journal of Operational Research, Tom 148, No. 1, pp. 80–91.

[9] Yager R. R. (1996) Constrained OWA aggregation, Fuzzy Sets and Systems, Tom 81, No. 1, pp. 89–101.

Rysunek 3. Przykład sieci telekomunikacyjnej szkieletowej na terenie Polski



Źródło: http://www.zib.de

Oznaczenia przyjęte do obliczeń:
N – zbiór wierzchołków (n_i – *i-ty* węzeł sieci),
E – zbiór łuków (e_i – *i-ta* krawędź sieci),
P – zbiór wyznaczonych ścieżek dla których należy zapewnić przepustowość (p_i – *i-ta* ścieżka zapotrzebowania sieci).
Parametry wykorzystane w modelu:

$$\delta_{ep} = \begin{cases} 1, \text{gdy } e - ta \text{ krawędź należy do } p - tej \text{ ścieżki} \\ 0, \text{gdy } e - ta \text{ krawędź nie należy do } p - tej \text{ ścieżki} \end{cases}$$

Zmienne decyzyjne:
x_p – obciążenie *p-tej* ścieżki
Ograniczenia:

$$\sum_{e \in E} \sum_{p \in P} \delta_{ep} x_p \le c_e \tag{13}$$

Celem pracy jest oszacowanie kosztu sprawiedliwości dla modelu OWA. Do jego osiągnięcia wygenerowano zbiór rozwiązań oraz porównano każde z nich do rozwiązań innych sformułowań sprawiedliwych zadań optymalizacji sieci oraz zadania maksymalizującego funkcję celu bez względu na sprawiedliwość. Do porównania wykorzystano metody:

- Miximin,
- Maximin regularuzowany sumą pojedynczych wartości funkcji realizacji,
- Maximum sumy pojedynczych wartości funkcji realizacji.

Dla metody OWA model optymalizacyjny został określony wzorem (12). Model sieci oparto na nomenklaturze krawędź–ścieżka. Dane do modelu generowano przy pomocy implementacji generatora danych wejściowych. Wykorzystano do tego język programowania Python w wersji 2.7 oraz narzędzie GLPK wyposażone w solver glpsol. Dla przedstawionej we wcześniejszej części pracy sieci telekomunikacyjnej wyznaczono kilka zbiorów połączeń między określonymi węzłami. Generowane ścieżki między parą wierzchołków grafu są ścieżkami pojedynczymi (bez rozgałęzień). Wygenerowane połączenia nakładają się na siebie co wpływa na zaistnienie problemu decyzyjnego. Zwiększenie przepustowości jednej ścieżki wiąże się ze zmniejszeniem przepustowości innej. Wyznaczone ścieżki nie mogą ulegać bifurkacji. Motywacją do wyboru metody uporządkowanych średnich ważonych były jej charakterystyczne właściwości:

- Rozchylone warstwice dla wag ściśle malejących
- Wykorzystywanie dominacji wyrównującej[10]

WYNIKI I OBSERWACJE

Analiza została oparta na 11 osobno wygenerowanych przypadkach rozmieszczenia ścieżek w grafie. Przykładowa tabela alokacji obciążeń na kolejnych ścieżkach dla jednego z przykładów została przedstawiona w Tabeli 1.

Tabela 1. Wyniki dla jednego z wygenerowanych przypadków

ŚCIEŻKA	MAX	MAXMIN	MAXMIN REG	OWA
p_1	0	142	142	150
p_2	0	142	142	126
p_3	426	142	142	150
p_4	816	142	390	204
p_5	159	142	182	150
p_6	156	142	142	150
p_7	0	142	142	204
p_8	435	142	142	150
p_9	750	142	608	459
p_{10}	0	142	142	204
p_{11}	0	142	142	150
p_{12}	468	142	390	336
p_{13}	348	142	142	204
p_{14}	0	142	142	150
p_{15}	0	142	142	204
p_{16}	0	142	142	291
$\sum$	**3558**	**2272**	**3274**	**3282**

Źródło: opracowanie własne

[10] Ogryczak W. (1997) Wielokryterialna Optymalizacja Liniowa i Dyskretna, modele preferencji i zastosowania do wspomagania decyzji, Wydawnictwa Uniwersytetu Warszawskiego, Warszawa.

Analiza otrzymanych wyników dla kolejnych przykładów pozwoliła stwierdzić. że metoda maxmin w czystej postaci daje najniższą wartości sumarycznych przepływów. Wartości funkcji kryterium będącej sumą obciążeń poszczególnych ścieżek w przypadku tej metody nigdy nie przyjmuje natomiast wartości równej 0, co gwarantuje wynik „sprawiedliwy”. Wyniki zadań sformułowanych przy pomocy metody maxmin z regularyzacją w postaci sumy również w każdym przypadku przypisują ścieżkom wartości większe niż 0. Zgodnie z oczekiwaniami model OWA pozwolił wyznaczyć rozwiązania o lepszej wartości sumy obciążeń dla wyznaczonych ścieżek w grafie przy zachowaniu odpowiedniej sprawiedliwości. Zaobserwowano jednak rozwiązania, w których model uporządkowanych średnich ważonych daje rozwiązanie o wartości sumy obciążeń ścieżek mniejszej niż w przypadku maxmin regularyzowanego sumą. Wśród przykładów były również przypadki gdzie rozwiązanie problemu przy pomocy maksymalizacji uporządkowanych średnich ważonych nie gwarantowało obciążenia dla niektórych ścieżek większego od 0. Dla wszystkich wyników wyznaczono wartości średnie oraz odchylenia standardowe co przedstawiono w Tabeli 2. Na podstawie wartości średnich oraz odchyleń standardowych wyznaczono górne granice oszacowanych średnich kosztów sprawiedliwości dla kolejnych metod. Wyniosły one odpowiednio:

- Maxmin – 0,66
- Maxmin regularyzowany sumą poszczególnych ocen – 0,13
- OWA – 0,11

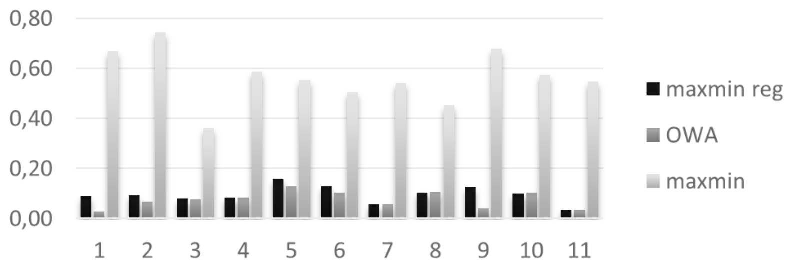
Tabela 2. Wartości sum obciążeń dla poszczególnych metod oraz odpowiadające im wartości średnie oraz odchylenia standardowe

PRZYKŁAD	MAXMIN	MAXMIN REG	OWA
1	0.67	0.09	0.03
2	0.74	0.09	0.07
3	0.36	0.08	0.08
4	0.59	0.08	0.09
5	0.56	0.16	0.15
6	0.50	0.13	0.12
7	0.54	0.06	0.06
8	0.45	0.10	0.12
9	0.68	0.12	0.05
10	0.57	0.10	0.11
11	0.55	0.03	0.04
średnia	**0.56**	**0.10**	**0.08**
odchylenie st.	**0.10**	**0.03**	**0.03**

Źródło: opracowanie własne

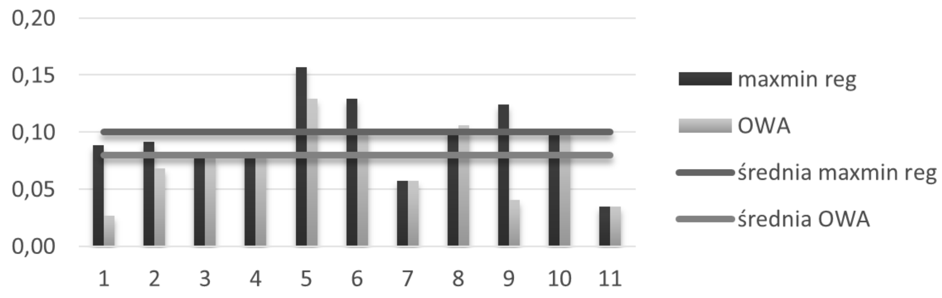
Porównując metody dla problemu alokacji obciążeń na ścieżki pojedyncze między odpowiednimi węzłami sieci należy stwierdzić, że metoda maxmin posiada nieakceptowalnie większą wartość kosztu sprawiedliwości względem pozostałych metod (Rysunek 4). Rysunek 5 przedstawia porównanie dwóch pozostałych metod gdzie zauważyć można zarówno przykłady gdzie koszt sprawiedliwości dla metody OWA był większy jak i mniejszy.

Rysunek 4. Porównanie wyników POF dla wybranych metod



Źródło: opracowanie własne

Rysunek 5. Porównanie wyników POF dla wybranych metod wraz ze średnią i odchyleniem standardowym



Źródło: opracowanie własne

PODSUMOWANIE

Powyższa praca miała na celu przedstawienie problemu sprawiedliwej optymalizacji. Wyniki obliczeń wskazały na wiele zalet metody uporządkowanych średnich ważonych. Jedną z głównych zalet tej metody jest duża elastyczność pod względem sterowania wynikiem. Dla wag dodatnich oraz wklęsłego charakteru funkcji ocen, możliwy jest również zapis modelu w postaci programowania liniowego. Metoda OWA dzięki tym cechom pozwala na wyznaczenie w stosunkowo krótkim czasie obliczeń, rozwiązania satysfakcjonującego decydenta. Preferencje decydenta określają tutaj stopień chęci osiągniecia rozwiązania bardziej sprawiedliwego, kosztem wartości sumy wszystkich obciążeń ścieżek grafu. Modelowanie tych preferencji odbywa się przy pomocy odpowiedniego doboru wag kolejnych wartości uporządkowanych funkcji oceny, odpowiadającej w niniejszej pracy wartościom obciążeń każdej z wygenerowanych ścieżek. Bardzo zadowalający wynik badań nad implementacją metody OWA do tego specyficznego problemu powinien stać się motywacją do kolejnych badań nad problemami sieciowymi jak również problemami alokacji zasobów. Rozpatrywany przypadek miał charakter liniowy. Jest więc również pole do prac badawczych w zakresie problemów dyskretnych bądź bardziej skomplikowanych problemów nieliniowych. Wartości wag w rozpatrywanym problemie były szeregowane malejąco. W przypadku zadania minimalizacji wagi należałoby dobierać nierosnąco. Dobór wag o większych wartościach dla początkowych wartości funkcji skumulowanych będzie zbliżało rozwiązanie do rozwiązania maksymalizacji wartości minimalnej funkcji osiągnięcia. Dobór wag o większych wartościach dla końcowych funkcji skumulowanych, przybliży rozwiązanie do rozwiązania maksymalizacji sumy wartości wszystkich funkcji osiągnięcia.

BIBLIOGRAFIA

Bertsimas D., Farias Vivek F., Trichakis N. (2011) The Price of Fairness, Operations Research, Vol. 59, No. 1, pp. 17-31.

Liu X. (2006) Some Properties of the Weighted OWA Operator, IEEE Trans. Syst. Man Cyber. B, Vol. 368, pp. 118–127.

Luss H. (1999) On Equitable Resource Allocation Problems: A Lexicographic Minimax Approach, Operation Research, Vol. 47, No. 3, pp. 361-378.

Ogryczak W. (1997) Wielokryterialna Optymalizacja Liniowa i Dyskretna, modele preferencji i zastosowania do wspomagania decyzji, Wydawnictwa Uniwersytetu Warszawskiego, Warszawa.

Ogryczak W. (2014) Fair Optimization – Methodological Foundations of Fairness in Network Resource Allocation, IEEE 38th Annual International Computers, Software and Applications Conference Workshops.

Ogryczak W. (2014) Tail mean and related robust solution concepts, International Journal of Systems Science: Principles and Applications of Systems and Integration, Vol. 45, No. 1, pp. 29–38.

Ogryczak W. and Śliwiński T. (2003) On solving linear programs with the ordered weighted averaging objective, European Journal of Operational Research, Vol. 148, No. 1, pp. 80–91.

Ogryczak W. and Tamir A. (2003) Minimizing the sum of the k largest functions in linear time, Information Processing Letters, Vol. 85, No. 3, pp. 117–122.

Ogryczak W., Luss H., Pióro M., Nace D., Tomaszewski A. (2014) Fair Optimization and Networks: A Survey, Journal of Applied Mathematics, Vol. 2014, pp. 1-25.

Yager R. R. (1988) On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decision making, IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Vol. 18, No. 1, pp. 183–190.

Yager R. R. (1996) Constrained OWA aggregation, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 81, No. 1, pp. 89–101.

Yager R. R., Kacprzyk J. and Beliakov G. (2011) Recent Developments in the Ordered Weighted Averaging Operators: Theory and Practice, Springer.

ESTIMATION THE PRICE OF FAIRNESS FOR NETWORK BANDWIDTH ALLOCATION BY THE OWA OPTIMIZATION

Abstract: An important problem when designing a telecommunication network is to optimize the flow demands at the network between pre-defined nodes. One of the solutions used for this purpose is to formulate the linear programming. In this paper we focus on the optimization of locating the data flow path in an undirected network. It provides an actual decision-making problem. For such a problem the link-path formula has been chosen. Problem also has brought to linear programming and implemented in AMPL standard. The study estimated the price of fairness for the considered model OWA (Ordered Weighted Averaging) compared to solve maximizing flows on the paths and to solve the model MMF (Maximin fairness). The final effect of the work is to present the results and a summary of the analysis, obtained solutions based on sample data by reference to the telecommunication network which in this case was the backbone Polish net. The main measure is the difference between the value of the objective function for these fair methods and solutions maximizing total flow.

Keywords: optimization, ordered weighted averaging, OWA, fair optimization, multi-criteria optimization, network optimization, the price of fairness, decision-making problems, linear programming, algorithms