

STUDIA METODOLOGICZNE

Andrzej MŁODAK, Tomasz JÓZEFOWSKI, Łukasz WAWROWSKI

Zastosowanie metod taksonomicznych w estymacji wskaźników ubóstwa¹

Streszczenie. *W artykule opisano możliwości wykorzystania metod taksonomicznych do konstrukcji kompleksowych mierników poziomu ubóstwa. Mogą one służyć jako zmienne pomocnicze w estymacji wskaźników ubóstwa na różnych poziomach przestrzennych. Zastąpienie szeregu zmiennych objaśniających przez jeden starannie wyznaczony miernik syntetyczny ułatwia dokonanie estymacji, a przy tym pozwala spojrzeć na każdy model jako na integralną całość. Konstrukcję mierników kompleksowych do różnych zbiorów danych oparto na podejściu wykorzystującym metodę odwróconej macierzy korelacji w procesie weryfikacji korelacyjnej, medianę Webera w normalizacji oraz na wzorcu rozwojowym. Zbiory te miały zarówno charakter jednolitych, jak również bardzo obszernych i zróżnicowanych dziedziny zasobów. W drugim przypadku zastosowano podejście wielokryterialne. Rozpatrywane dane miały formę panelową, co*

¹ Opracowanie powstało w wyniku pracy badawczej pt. *Dezagregacja wskaźników Strategii Europa 2020 na poziom NTS 2 z zakresu pomiaru ubóstwa i wykluczenia społecznego*, prowadzonej w ramach projektu *Wsparcie systemu monitorowania polityki spójności w perspektywie finansowej 2007–2013 oraz programowania i monitorowania polityki spójności w perspektywie finansowej 2014–2020*. Projekt był współfinansowany przez Unię Europejską ze środków Programu Operacyjnego Pomoc Techniczna 2007–2013. Zawarte tu treści zostały zaprezentowane przez autorów podczas ogólnopolskiej konferencji naukowej *Pomiar ubóstwa i wykluczenia społecznego w układach regionalnych i lokalnych*, która odbyła się w Poznaniu 11 i 12 czerwca 2015 r. Zawarte w artykule opinie są wyłącznie opiniami jej autorów, a uzyskane wyniki nie mają charakteru oficjalnych danych statystyki publicznej.

wymagało zmodyfikowania tradycyjnego podejścia w zakresie weryfikacji zmiennościowej i korelacyjnej. W opracowaniu ukazano efekty wykorzystania uzyskanych mierników w estymacji wskaźnika bardzo niskiej intensywności pracy oraz wskaźnika pogłębionej deprivacji materialnej, dokonanej przy użyciu modelu Faya-Herriota. Porównano je też z wynikami estymacji bezpośredniej.

Słowa kluczowe: wskaźnik bardzo niskiej intensywności pracy, wskaźnik pogłębionej deprivacji materialnej, miernik taksonomiczny, estymacja bezpośrednia, model Faya-Herriota.

We współczesnym świecie skuteczne zwalczanie ubóstwa i wykluczenia społecznego wymaga wiedzy o jego natężeniu i przestrzennym zróżnicowaniu. Ma to swoje odzwierciedlenie w przyjętej strategii *Europa 2020*, do której włączono cztery wskaźniki mające monitorować zmiany w tej dziedzinie. Przedmiotem opisanej tu analizy są dwa wskaźniki:

- **bardzo niskiej intensywności pracy w gospodarstwach domowych** — definiowany jako udział osób w wieku 0—59 lat mieszkających w gospodarstwach domowych, w których osoby dorosłe (w wieku 18—59 lat) pracują nie mniej niż wynosi 20% ich całkowitego potencjału pracy w liczbie ludności ogółem w tej grupie wieku,
- **pogłębionej deprivacji materialnej** — określany jako odsetek osób, które deklarują brak możliwości realizacji ze względów finansowych przynajmniej czterech z dziewięciu następujących potrzeb: 1) terminowych opłat związanych z mieszkaniem, spłatach rat, kredytów; 2) ogrzewania mieszkania odpowiednio do potrzeb; 3) pokrycia niespodziewanego wydatku; 4) spożywania mięsa lub ryb co drugi dzień; 5) opłacenia tygodniowego wyjazdu wszystkich członków gospodarstwa domowego na wypoczynek raz w roku; 6) posiadania telewizora kolorowego, jak również posiadania: 7) pralki; 8) samochodu; 9) telefonu.

Rosnące potrzeby informacyjne w zakresie między innymi owych dwóch wskaźników są szczególnie zauważane w ujęciu regionalnym. Stanowią one w ostatnich latach istotny impuls do poszukiwania nowych, lepszych metod uzyskiwania i szacowania takich danych. Ważną rolę w tej mierze odgrywa statystyka małych obszarów (SMO). Ze względu na jej własności może pełnić coraz ważniejszą rolę w kształtowaniu nowoczesnych technik uzyskiwania informacji. Jej metody ukierunkowane są na obniżenie kosztów badań przy jednoczesnym zmniejszeniu obciążeń respondentów poprzez wykorzystanie dodatkowych informacji pochodzących spoza badanej domeny, zwiększając dzięki temu efektywnie wielkość próby, a w konsekwencji precyzję uzyskiwanych oszacowań.

Efektywność stosowania metody SMO zależy jednak od wielu czynników. Oprócz klasycznych uwarunkowań istotne znaczenie ma także właściwy dobór

zmiennych pomocniczych. Wymaga to nierzadko analizy obszernych zasobów informacji statystycznych opisujących rozmaite złożone zjawiska społeczno-gospodarcze (jak np. rynek pracy, infrastruktura, gospodarka komunalna itp.).

Z uwagi na charakter tych zjawisk zmienne je charakteryzujące są ze sobą ściśle powiązane w różnym zakresie i — przede wszystkim w obrębie danego zjawiska złożonego — składają się na nierozzerwalną całość. Łączne rozpatrywanie takich zmiennych w estymacji wydaje się być zatem ze wszech miar pożądane, pozwala bowiem uwzględnić siłę i kierunki ich wzajemnych związków rozmaitego typu oraz komplementarność informacyjną. Najefektywniejszym sposobem prowadzącym do tego celu jest konstrukcja zmiennej syntetycznej (zwanej metacechą), dokonana na podstawie wartości wyodrębnionych zmiennych diagnostycznych. Zmienna ta w sposób jednowymiarowy odzwierciedla bowiem kształtowanie się określonych obserwacji wielowymiarowych. Upraszcza to proces estymacji oraz zapewnia lepszy wsad informacyjny w porównaniu z modelami, gdzie istotność każdej zmiennej i jej wkład do modelu są ustalane odrębnie (a nawet jeśli wstawia się doń zmienne interakcyjne — np. iloczyny zmiennych podstawowych — to i tak nie da się tą drogą uwzględnić wszystkich związków między nimi). Dzięki temu może być ona efektywnie użyta w modelach estymacji dla małych obszarów, które oparte są na zmiennych pomocniczych.

W artykule zaprezentowano możliwości konstrukcji takiego miernika. Wskazano także na możliwość jego wykorzystania jako zmiennej pomocniczej w estymacji wspomnianych dwóch wskaźników ubóstwa dla województw. Estymacji takiej dokonano przy użyciu modelu Faya-Herriota.

Wykorzystanie kompleksowego miernika zamiast wyjściowych zmiennych pomocniczych jako regresorów motywowane było potrzebą zwiększenia efektywności i jakości docelowych oszacowań. Ze względu na założenia badania i dostępność odpowiednich informacji rozpatrywano zestawy zmiennych wyjściowych o dość szczególnym charakterze — oba miały charakter panelowy (dotyczyły lat 2005—2012), a jeden z nich okazał się różnorodny dziedzinowo i obszerny. Konstrukcję miernika kompleksowego trzeba było odpowiednio zmodyfikować w celu uwzględnienia tej specyfiki.

W części pierwszej artykułu przedstawiono konstrukcję miernika kompleksowego, uwzględniającej panelowy i wielokryterialny charakter zmiennych. Przytoczono tutaj także istotę estymacji bezpośredniej i modelu Faya-Herriota. Następnie, w drugiej części artykułu, zaprezentowano pierwszy zestaw wskaźników użytych do konstrukcji miernika opartego na taksonomii wielokryterialnej, efekty jego weryfikacji oraz wyniki konstrukcji, a także efektywność zastosowania owego miernika w modelu estymacyjnym w porównaniu z estymacją bezpośrednią. Trzecia część została poświęcona analogicznej analizie dotyczącej drugiego z rozpatrywanych zestawów. Obliczenia przeprowadzono przy użyciu programu SAS Enterprise Guide 4.3 (z uwzględnieniem jego środowiska IML) oraz środowiska R. Całość wieńczą stosowne wnioski.

ZASADY KONSTRUKCJI MIERNIKA KOMPLEKSOWEGO I BUDOWY MODELI ESTYMACYJNYCH

Jak już wcześniej wspomniano, zmienna syntetyczna służy do jednowymiarowego opisu wielowymiarowych zjawisk społeczno-gospodarczych. Każdy obiekt (którym bywa — tak jak w omawianym przypadku — obszar przestrzeny, ale może to być również grupa firm, osób, instytucji itp.) opisany jest przy pomocy danych liczbowych odzwierciedlających poszczególne aspekty analizowanego zjawiska. Budowa takiego miernika jest wieloetapowa.

Pierwszy krok w tym zakresie stanowi **dobór zmiennych wyjściowych**. Muszą być one mierzalne, logicznie powiązane z rozpatrywanym zjawiskiem złożonym oraz charakteryzować się takimi właściwościami, jak: odpowiednia jakość i różnorodność informacyjna, istotność z punktu widzenia analizowanych zjawisk, kompletność informacji na temat wszystkich aspektów istotnie wpływających na kształt danego zjawiska złożonego², jednoznaczność i precyzja zdefiniowana czy wzajemne powiązanie z logicznego punktu widzenia. Zmienne wyjściowe winny mieć także charakter wskaźnikowy. Ze względu bowiem na naturalne różnice, jakie występują pomiędzy niektórymi obszarami przestrzennymi a pozostałymi, te sporadyczne wyjątki będą już na wstępie trudno porównywalne z innymi. Na przykład miasta na prawach powiatu pod względem demograficznym i mieszkaniowym będą się wyróżniać. Zastosowanie zmiennych wskaźnikowych pozwala te niedogodności w znacznym stopniu zniwelować.

Drugi etap analizy polega na **weryfikacji zmiennych**. Ma ona na celu wyodrębnienie spośród zgromadzonych zmiennych takich, które z punktu widzenia rozpatrywanego zjawiska złożonego wnoszą największą wartość informacyjno-różnicującą w odniesieniu do wiedzy o rozpatrywanych obiektach. Weryfikacja owa przebiega w dwóch krokach.

Najpierw dokonywana jest selekcja pod kątem *zmiennościowym*. Eliminuje się wtedy zmienne o zbyt niskiej zmienności (zróznicowaniu), a zatem wykazujące zbyt małą moc różnicującą badane objekty. Zmienna, która nie wykazuje odpowiedniego zróznicowania staje się zatem w tym kontekście bezużyteczna. Wobec tego eliminacji podlegają zmienne, dla których wartość bezwzględna współczynnika zmienności kształtuje się w pewnej arbitralnie ustalonej wartości progowej. Za taką wielkość najczęściej przyjmuje się 0,1 (10%).

Pozostawione w modelu zmienne poddaje się z kolei *weryfikacji korelacyjnej*. Ma to na celu eliminację danych nadmiernie skorelowanych, czyli będących nośnikami podobnej informacji co inne. Pod uwagę należy zatem wziąć współczynniki korelacji wszystkich par zmiennych. Punkt wyjścia stanowi tutaj wyznaczenie macierzy korelacji zmiennych.

W celu uzyskania integralności modelu taksonomicznego (i wszystkich powiązań występujących pomiędzy rozpatrywanymi zmiennymi — nie tylko for-

² Wiadomo że w praktyce jest to niemożliwe — jako że nie wszystkie czynniki wpływające na owo zjawisko są obserwowalne czy kwantyfikowalne (czyli dają się opisać w postaci liczb) — ale należy dążyć do maksymalizacji poziomu owej wyczerpalności.

malnych, wyrażonych np. korelacją) zastosowano metodę odwróconej macierzy korelacji (Malina, Zeliaś, 1998; Młodak, 2006). Polega ona na tym, że wyznaczana jest macierz odwrotna do macierzy korelacji zmiennych Pearsona \mathbf{R} , czyli \mathbf{R}^{-1} . Następnie bada się elementy diagonalne owej odwróconej macierzy korelacji \mathbf{R}^{-1} . Jeżeli zmienne nie wykazują wielu ścisłych współzależności, to jej elementy diagonalne są czynnikami inflacji wariancji (*Variance Inflation Factor* — VIF) dla danych zmiennych w porównaniu z innymi i wynoszą (Neter i in., 1985):

$$r_{jj}^{(-1)} = VIF_j = \frac{1}{1 - R_j^2} \quad (1)$$

gdzie R_j — współczynnik determinacji regresji j -tej zmiennej względem pozostałych, $j = 1, 2, \dots, p$, p — liczba zmiennych w modelu po weryfikacji zmiennościowej. Ze wzoru (1) wynika, że diagonalne elementy macierzy \mathbf{R}^{-1} winny należeć do przedziału $[1, \infty)$. Jeśli owe elementy są zbyt duże — np. większe od 10 — oznacza to wadliwe uwarunkowanie numeryczne macierzy \mathbf{R}^{-1} , czyli nadmierne skorelowanie danej zmiennej z pozostałymi. Jeżeli występuje tylko jedna zmienna o tej własności, to ją się eliminuje.

W przypadku występowania większej liczby takich zmiennych można byłoby wprawdzie wyeliminować wszystkie, ale najczęściej prowadziłyby to do nadmiernego uszczuplenia — żeby nie rzec: marnotrawstwa — zasobu informacyjnego modelu. Zazwyczaj bowiem wystarczy eliminacja niektórych z nich, aby elementy diagonalne odwróconej macierzy korelacji pozostałych zmiennych były dostatecznie niskie. I właśnie tę metodę zastosowano w naszej analizie. Jako dodatkowe kryterium eliminacji w opisanych sytuacjach przyjęto poziom skorelowania z oszacowaniem bezpośrednim docelowych wskaźników. W przypadku owych „kolizji” w modelu pozostawiano te zmienne, które były silniej z rzeczonymi wskaźnikami skorelowane.

W wyniku weryfikacji zmiennościowo-korelacyjnej ukształtowany zostaje *zestaw zmiennych* (lub *cech diagnostycznych*). Właściwa konstrukcja miernika taksonomicznego wymaga dokonania **stymulacji** i **normalizacji** owych zmiennych. W tym celu dokonuje się identyfikacji kierunku oddziaływania zmiennych na status obiektów z punktu widzenia rozpatrywanego zjawiska złożonego. Ze względu na ów kierunek zmienne diagnostyczne dzieli się na:

- stymulanty — zmienne, których wyższa wartość świadczy o lepszej pozycji obiektu w danym kontekście;
- destymulanty — im wyższa wartość danej zmiennej, tym gorsza pozycja obiektu w rozważanym zjawisku;
- nominanty — zmienne mające optymalny poziom wartości (punkt przegięcia), poniżej którego mają charakter stymulanty, a powyżej destymulanty lub na odwrót.

Klasyfikowanie zmiennej do jednej z trzech kategorii odbywa się zazwyczaj na podstawie doświadczenia i rozeznania badacza. Obarczone jest ono zatem określoną dozą subiektywizmu. Jednak w przypadku opisywanych tu badań, istotną rolę odgrywa korelacja ze zmienną docelową. Zmienne diagnostyczne dodatnio skorelowane z bezpośrednim oszacowaniem wskaźnika bardzo niskiej intensywności pracy w gospodarstwach domowych czy wskaźnika pogłębionej deprywacji materialnej uznawano zatem za stymulanty, zaś skorelowane ujemnie — za destymulanty. Nominant nie było. Stymulacja polegała na sprowadzeniu destymulant do formy stymulant poprzez zmianę ich znaku na przeciwny celem ujednoczenia charakteru wszystkich zmiennych diagnostycznych.

Normalizacja natomiast to sprowadzenie (wyrażonych zazwyczaj w różnych jednostkach miary i mających odmienny zakres wartości) zmiennych diagnostycznych do najlepszej, porównywalnej postaci, np. poprzez standaryzację, unitaryzację lub przekształcenia ilorazowe (Zeliaś, 2002; Młodak, 2006). Najlepsza jest jednak taka normalizacja, która traktuje model jako integralną całość, należycie uwzględniając siłę i kierunki wzajemnych powiązań między zmiennymi diagnostycznymi, a równocześnie minimalizując wpływ incydentalnych obserwacji odstających na końcowy rezultat. W analizie wykorzystano tego rodzaju podejście oparte na medianie Webera (Młodak, 2006, 2009).

Niech X_1, X_2, \dots, X_m oznacza zestaw zmiennych diagnostycznych, x_{ij} — obserwację zmiennej X_j dla i -tego obiektu, zaś $\gamma_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im})$ — wektor obserwacji zmiennych dla obiektu i , $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$ (n — liczba obiektów, m — liczba zmiennych diagnostycznych). Medianę Webera definiuje się wówczas jako wektor $\Theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) \in \mathbb{R}^m$, który minimalizuje sumę euklidesowych odległości od punktów $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$, czyli spełnia następującą równość optymalizacyjną:

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{\sum_{j=1}^m (x_{ij} - \theta_j)^2} = \min_{Y \in \mathbb{R}^m} \sum_{i=1}^n \sqrt{\sum_{j=1}^m (x_{ij} - y_j)^2} \quad (2)$$

Celem jeszcze lepszego uodpornienia wyników analizy na niekorzystny wpływ obserwacji odstających zastosowano uciętą (*trimmed*) wersję równania (2), czyli ograniczono się do sumowania po k ($k < n$) najmniejszych odległości cząstkowych, otrzymując wektor $\tilde{\Theta} = (\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2, \dots, \tilde{\theta}_m) \in \mathbb{R}^m$ spełniający równość (Vandev, 2002):

$$\sum_{i=1}^K \sqrt{\sum_{j=1}^m (x_{(i)j} - \tilde{\theta}_j)^2} = \min_{Y \in \mathbb{R}^m} \sum_{i=1}^K \sqrt{\sum_{j=1}^m (x_{(i)j} - y_j)^2} \quad (3)$$

Oznaczenie (i) we wzorze (3) odnosi się do indeksu obserwacji odpowiadającej obiektowi, dla którego jego odległość od danego punktu jest i -tą co do wiel-

kości (w kolejności niemalejącej). W naszym przypadku przyjęto ucięcie pięcio-procentowe, tzn. położono $k = [0,95n]^3$. Normalizacja dokonana przy użyciu uciętej mediany Webera ma postać:

$$z_{ij} = \frac{x_{ij} - \tilde{\theta}_j}{1,4826 \cdot \tilde{\text{mãd}}(X_j)} \quad (4)$$

gdzie $\tilde{\text{mãd}}(X_j) = \text{med}_{i=1,2,\dots,n} |x_{ij} - \tilde{\theta}_j|$, dla $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$ (Młodak, 2006).

Mając przygotowane w ten sposób zmienne diagnostyczne przechodzi się do **konstrukcji taksonomicznego miernika rozwoju**. Jest to sztuczny, idealny obiekt, do którego będą porównywane inne obiekty. W tym przypadku za wzorzec rozwojowy uważano taki obiekt Ψ opisany wektorem $\psi = (\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_m) \in \mathbb{R}^m$, że:

$$\psi_j = \max_{i=1,2,\dots,n} z_{ij} \quad (5)$$

dla każdego $j = 1, 2, \dots, m$.

Następnie **ustala się odległość każdego obiektu od wzorca**. Można to uczynić stosując rozmaite miary odległości, np. metrykę taksówkową (zwaną też miejską lub Hamminga), metrykę euklidesową, odległość medianową itp. W naszym przypadku dystans i -tego obiektu od wzorca zdefiniowano przy użyciu odległości medianowej:

$$d_i \stackrel{\text{def}}{=} \text{med}_{i=1,2,\dots,n} |z_{ij} - \psi_j| \quad (6)$$

dla każdego $i = 1, 2, \dots, n$.

Ostatni etap procedury to **wyznaczenie miernika syntetycznego** (zwanego też *metacechą*). Dla obiektu i -tego jest on zdefiniowany jako funkcja jego odległości od wzorca rozwojowego:

$$\mu_i \stackrel{\text{def}}{=} 1 - \frac{d_i}{\text{med}(d) + 2,5\text{mãd}(d)} \quad (7)$$

dla każdego $i = 1, 2, \dots, n$, gdzie $d = (d_1, d_2, \dots, d_m)$. Stała 2,5 nazywana bywa *odpornościową wartością progową* (Rousseeuw, Leroy, 2005). Miernik wyrażony wzorem (7) jest w znacznym stopniu uodporniony na występowanie obser-

³ $[a]$ oznacza część całkowitą liczby rzeczywistej a , czyli największą liczbę całkowitą nie większą od a .

wacji odstających, mogących zaburzać finalne rezultaty. Miernik μ może przyjmować wartości ujemne. W takim przypadku dostarcza on informacji o istotnym odchyleniu obiektu od pozostałych, dla którego taką wartość osiąga. Im wyższa wartość miernika μ , tym lepsza jest sytuacja obiektu pod rozpatrywanym względem. W opisanym przypadku ma to wydźwięk cokolwiek pejoratywny, gdyż określenie „lepszy” oznacza tutaj większe ubóstwo.

W zaprezentowanej tu pracy badawczej posługiwano się jednak pewnymi rodzajami danych, które wymagały zastosowania specjalnego podejścia w zakresie analizy taksonomicznej. Pierwsza z takich sytuacji to znaczna wszechstronność zbioru danych. Zawierał on bowiem zestawy bardzo licznych zmiennych wskaźnikowych opisujących rozmaite dziedziny życia społeczno-gospodarczego, które w mniejszym bądź większym stopniu są powiązane ze skalą ubóstwa reprezentowaną przez badane wskaźniki i na nią oddziałują. W takim przypadku dokonywano podziału zestawu zmiennych na podzestawy zmiennych opisujących poszczególne dziedziny (np. demografia, rynek pracy, warunki życia itp.). Każda z tychże dziedzin jest wobec tego traktowana jako odrębne zjawisko złożone.

Do każdego zestawu zmiennych opisujących daną dziedzinę stosowano zatem omówioną już procedurę weryfikacji zmiennych i konstrukcji miernika syntetycznego. Następnie otrzymane dziedzinowe mierniki syntetyczne (które bywają także w tego rodzaju okolicznościach nazywane *miernikami cząstkowymi*) stanowiły zmienne, które posłużyły do konstrukcji miernika kompleksowego. Z uwagi na metodologię wyznaczania mierników cząstkowych, wszystkie są stymulantami. Tak więc wystarczyło przeprowadzić normalizację (4), określić wzorzec rozwojowy według wzoru (5) oraz odległości obiektów od niego według wzoru (6) a na koniec obliczyć wartości samego miernika oparte na formule (7). Tego typu postępowanie nazywa się *taksonomią wielokryterialną*. Pojęcie to skądinąd ma o wiele szersze znaczenie, gdyż stosuje się je do różnych mechanizmów klasyfikacji i porządkowania obiektów wielocechowych, opartych na podobnej idei algorytmu dwustopniowego (Malina, 2002).

Dane — jak już wspomniano na wstępie — dotyczyły lat 2005—2012, w związku z czym wystąpiła też inna specyficzna sytuacja. Dane te miały charakter panelowy, co oznacza, że obejmowały zarówno komponent przestrzenny (województwa), jak też czasowy (8 lat). Mówiąc bardziej formalnie, chodzi tutaj o model trójwymiarowej tablicy danych $\mathbf{X} = [x_{ijt}]$, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$, $t = 1, 2, \dots, \tau$, przy czym n i m to — tak jak poprzednio — liczba obiektów i zmiennych wyjściowych, odpowiednio, zaś τ — liczba rozpatrywanych okresów.

Oczywistym wydaje się, że weryfikacja zmiennościowo-korelacyjna winna odpowiednio wyzyskiwać informację tkwiącą zarówno w zróżnicowaniu przestrzennym, jak i czasowym. Interesują nas bowiem oba te wymiary zmienności. Wymagało to wobec tego specjalnego dostosowania metod wcześniej opisanych.

Weryfikacja zmiennościowa polegała zatem na wyznaczeniu uciętych median Webera $\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2, \dots, \tilde{\theta}_\tau \in \mathbb{R}^m$ dla kolejnych okresów, $\tilde{\theta}_t = (\tilde{\theta}_{t1}, \tilde{\theta}_{t2}, \dots, \tilde{\theta}_{tm})$, $t = 1, 2, \dots, \tau$. Na tej podstawie definiuje się macierz kompleksową:

$$\tilde{\Theta} = [\tilde{\Theta}_1^T \tilde{\Theta}_2^T \dots \tilde{\Theta}_\tau^T]$$

rozmiaru $m \times \tau$ i wyznacza się jej medianę Webera $\tilde{\Theta}^* = (\tilde{\theta}_1^*, \tilde{\theta}_2^*, \dots, \tilde{\theta}_m^*) \in \mathbb{R}^m$. Kompleksowy wskaźnik zmienności zmiennej X_j ma wówczas postać:

$$CV_j = \frac{\text{m}\tilde{\text{a}}\tilde{\text{d}}_j(\tilde{\Theta})}{\tilde{\theta}_j^*} \quad (8)$$

gdzie $\text{m}\tilde{\text{a}}\tilde{\text{d}}_j(\tilde{\Theta}) = \text{med}_{t=1,2,\dots,\tau} |\tilde{\theta}_{tj} - \tilde{\theta}_t^*|$, $j = 1, 2, \dots, m$ (Młodak, 2005).

Weryfikacja korelacyjna wymagała z kolei wyznaczenia macierzy korelacji Pearsona dla każdego z badanych okresów, czyli:

$$\mathbf{R}_t = [r_{jkt}] \quad (9)$$

gdzie r_{jkt} oznacza współczynnik korelacji Pearsona zmiennych X_j i X_k w okresie t , $j, k = 1, 2, \dots, m$, $t = 1, 2, \dots, \tau$. Wykorzystując macierz daną wzorem (9), stworzono kompleksową macierz korelacji z tych współczynników, które są maksymalne co do wartości bezwzględnej. Chcemy by w możliwie największym stopniu wychwycić wszelkie zależności korelacyjne w obu wymiarach — przestrzennym i czasowym. Formalnie rzecz ujmując, kompleksowa macierz korelacji w tym przypadku ma postać:

$$\mathbf{R}^* = [r_{jk}^*] \quad \text{gdzie } r_{jk}^* = r_{jkt^*} \quad \text{jeśli } |r_{jkt^*}| = \max_{t=1,2,\dots,\tau} |r_{jkt}| \quad (10)$$

$$j, k = 1, 2, \dots, m.$$

Dalsze postępowanie jest zgodne z opisaną wcześniej metodą odwróconej macierzy korelacji. W przypadku większej liczby zmiennych nadmiernie skorelowanych ze sobą uwzględniano poziom ich skorelowania ze zmienną objaśnianą — eliminowano zmienne mniej skorelowane ze zmienną docelową. Warto zaznaczyć, że praca na danych panelowych wymagała sporo wysiłku. Po pierwsze, macierz odwrotna do macierzy (10) nie musi być tak wyrazista co do elementów diagonalnych, jak w przypadku klasycznym — wzór (1). Po drugie, występowało wiele współzależności i wysokiego skorelowania, co powodowało niemożność odwrócenia macierzy lub mniejsze od jeden — nawet ujemne — wartości na przekątnej macierzy odwrotnej. Uporanie się z tymi problemami spowodowało konieczność wniesienia także dozy subiektywizmu do tej weryfikacji. Kolejne kroki konstrukcji mierników syntetycznych były takie same, jak w typowym przypadku. Dla ścisłości warto nadmienić jeszcze, że w tej konstrukcji obiekty miały formę przestrzenno-czasową, to znaczy obiektem był stan danego obszaru przestrzennego w danym roku.

Wyjściowym estymatorem wykorzystywanym w SMO jest estymator bezpośredni. W literaturze estymator ten występuje również pod nazwą estymatora Horwitza-Thompsona bądź ekspansyjnego. Często jest on traktowany jako punkt odniesienia w porównywaniu efektywności z innymi estymatorami (tzw. *estymator referencyjny*). Estymator bezpośredni opiera się jedynie na informacji pochodzącej z badania reprezentacyjnego dla danej domeny⁴.

Estymatorem bezpośrednim wartości globalnej w domenie i , gdzie $i = 1, 2, \dots, m$, jest ważona suma wartości zmiennej y pochodzących z próby s odpowiadającej domenie i o liczebności n_i :

$$\hat{y}_i = \sum_{j \in s_i} w_{ij} y_{ij} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (11)$$

gdzie:

- \hat{y}_i — oszacowana wartość globalna dla i -tej domeny;
- w_{ij} — waga przypisana do jednostki j w i -tej domenie, która zależy od schematu losowania i części próby s_i należącej do i -tej domeny;
- y_{ij} — wartość dla j -tej jednostki w i -tej domenie. Całkowita liczebność próby s wyraża się przy tym wzorem: $n = \sum_i n_i$. Wzór na wariancję estymatora bezpośredniego można znaleźć w monografii Rao⁵ (2003).

Estymator bezpośredni jest nieobciążony i efektywny w przypadku odpowiedniej wielkości próby. Jednak w badaniach statystyki publicznej zdarzają się także przypadki braku jednostek w próbie dla danej domeny. W takim przypadku nie jest możliwe wykorzystanie estymatora bezpośredniego w procesie estymacji. Również w sytuacji niewielkiej liczebności próby w danej domenie zastosowanie estymatora bezpośredniego (choć możliwe) jest nieuzasadnione ze względu na wysoką wariancję. Jednym ze sposobów szacowania parametrów w takiej sytuacji stanowi wykorzystanie estymacji pośredniej w postaci modelu Faya-Herriota.

Model Faya-Herriota został zaproponowany w 1979 r. jako narzędzie do estymacji dochodu w mało licznych domenach pod względem wielkości próby. Należy do tzw. modeli na poziomie obszaru, co oznacza, że jego użycie nie wymaga dostępu do danych jednostkowych z badania pełnego. W ten sposób znacznie zwiększa się spektrum zastosowań modelu, ponieważ dostępność

⁴ Klasa estymatorów, które wykorzystują informacje jedynie z rozważanej domeny z badania reprezentacyjnego jest szersza i również można je określić mianem bezpośrednich. Przykładem może tu być uogólniony estymator regresyjny GREG, w którym dopuszcza się użycie informacji dodatkowych w postaci zmiennych pomocniczych. Nie zmienia to jednak charakteru estymatora, który w dalszym ciągu należy do grupy estymatorów bezpośrednich, gdyż informacje te nadal pochodzą z tej samej domeny co zmienna, dla której dokonuje się odpowiednich szacunków.

⁵ Rao (2003), s. 12.

danych dla badanej domeny jest dużo większa. Ponadto model Faya-Herriota okazuje się stosunkowo łatwy w zastosowaniu i ma korzystne właściwości empiryczne.

Estymator zaproponowany przez Faya i Herriota (1979) opiera się na liniowym modelu mieszanym i jest wyrażony zależnością:

$$\hat{\theta}_i = \mathbf{x}_i^T \beta + v_i + e_i \quad i = 1, \dots, m \quad (12)$$

gdzie: $\hat{\theta}_i$ jest oszacowaną wartością w domenie i , \mathbf{x}_i^T to wektor zmiennych objaśniających dla obszaru i o wymiarach $p \times 1$, v_i jest efektem obszaru o $v_i \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma_v^2)$, a e_i stanowi błąd losowy szacunku z próby $e_i \stackrel{iid}{\sim} N(0, \Psi_i)$ o znanej wariancji Ψ_i .

Estymator BLUP (najlepszy liniowy estymator nieobciążony — ang. *Best Linear Unbiased Predictor*) dla modelu (12) opisany jest wzorem:

$$\tilde{\theta}_i^{BLUP} = \gamma_i \hat{\theta}_i + (1 - \gamma_i) \mathbf{x}_i^T \tilde{\beta} \quad (13)$$

gdzie:

$$\gamma_i = \frac{\sigma_v^2}{\sigma_v^2 + \Psi_i} \quad (14)$$

$$\text{oraz } \tilde{\beta} = \tilde{\beta}(\sigma_v^2) = \left[\sum_{i=1}^m \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T / (\Psi_i + \sigma_v^2) \right]^{-1} \left[\sum_{i=1}^m \mathbf{x}_i \hat{\theta}_i / (\Psi_i + \sigma_v^2) \right]$$

Zgodnie ze wzorem (12) estymator BLUP jest średnią ważoną oszacowania bezpośredniego w domenie $\hat{\theta}_i$ oraz estymatora syntetycznego regresyjnego $\mathbf{x}_i^T \tilde{\beta}$. Waga $\gamma_i \in (0, 1)$ wyrażona wzorem (13) mierzy niepewność wynikającą z opisu θ_i przez model regresyjny, mając na uwadze wariancję międzyobszarową σ_v^2 względem całkowitej wariancji $\Psi_i + \sigma_v^2$. W przypadku małej wariancji σ_v^2 lub dużej wariancji, wynikającej ze schematu losowania Ψ_i , waga γ_i będzie mała i większy udział zostanie przypisany estymatorowi syntetycznemu. Mała wariancja Ψ_i lub duża σ_v^2 powoduje przypisanie większej wagi γ_i estymatorowi bezpośredniemu. Obciążenie $\tilde{\theta}_i^{BLUP}$ można wyrazić formułą:

$$B(\tilde{\theta}_i^{BLUP}) \approx (1 - \gamma_i) (\mathbf{x}_i^T \beta^* - \theta_i) \quad (15)$$

gdzie $\beta^* = E_2(\tilde{\beta})$ to warunkowa wartość oczekiwana estymatora $\tilde{\beta}$ względem $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$. Ze wzoru (14) wynika, że obciążenie związane ze schematem losowania dąży do zera, gdy $\psi_i \rightarrow 0$.

Estymator BLUP (12) jest zależny od wariancji międzyobszarowej σ_v^2 , która w praktyce jest nieznana. Do estymacji tej wartości można wykorzystać szereg metod. Do najpopularniejszych należą te oparte na momentach. Zastępując w estymatorze BLUP (13) σ_v^2 przez jego oszacowanie $\hat{\sigma}_v^2$ otrzymuje się estymator EBLUP (*Empirical Best Linear Unbiased Predictor*):

$$\tilde{\theta}_i^{BLUP} = \hat{\gamma}_i \hat{\theta}_i + (1 - \hat{\gamma}_i) \mathbf{x}_i^T \hat{\beta} \quad (16)$$

gdzie $\hat{\gamma}_i$ i $\hat{\beta}$ są wartościami γ_i i $\tilde{\beta}$, w których σ_v^2 zostało zastąpione przez $\hat{\sigma}_v^2$.

Estymator EBLUP jest nieobciążony ze względu na model, w przypadku gdy v_i i e_i mają rozkład symetryczny wokół 0 (w szczególności, gdy v_i i e_i mają rozkład normalny).

KONSTRUKCJA MIERNIKA DLA ZESTAWU WIELOKRYTERIALNEGO I JEGO WYKORZYSTANIE

W tej części artykułu prezentujemy wyniki przeprowadzonych konstrukcji miernika kompleksowego, które następnie znalazły zastosowanie w estymacji docelowych wskaźników ubóstwa. Rozpocznijmy od analizy danych dla najobszerniejszego zbioru wielokryterialnych danych panelowych dla lat 2005—2012, w stosunku do którego trzeba było zastosować podejście wielokryterialne i weryfikację uwzględniającą panelowy charakter danych.

Analiza dotyczyła 140 wskaźników dla lat 2005—2012. Każde województwo w zakresie każdej zmiennej było w tym układzie opisane przy pomocy ośmiu danych dla każdego roku z tegoż zakresu czasowego. Zgromadzone informacje statystyczne obejmowały cztery dziedziny życia społeczno-gospodarczego: demografię, gospodarkę mieszkaniową i komunalną, rynek pracy oraz szeroko rozumiane warunki życia. Kompleksowy współczynnik zmienności wyznaczono z wykorzystaniem wzoru (7). W ujęciu przeciętnym okazał się on najwyższy dla rynku pracy i warunków życia.

Po usunięciu zmiennych, dla których wartość bezwzględna kompleksowego współczynnika zmienności była mniejsza od 10% oraz przeprowadzeniu kompleksowej weryfikacji korelacyjnej opartej na formule (8), uzyskano następujące zestawy zmiennych diagnostycznych (w nawiasach podano ich charakter: S — stymulanta, D — destymulanta):

- demografia:
 - saldo migracji wewnętrznych — kobiety na 1000 kobiet ogółem (D),
 - zmiana liczby ludności na 1000 mieszkańców (D),
 - udział zgonów osób w wieku 20—59 lat w liczbie zgonów ogółem (S);
- gospodarka mieszkaniowa i komunalna:
 - kwota wypłaconych dodatków mieszkaniowych na jednego mieszkańca (S),
 - korzystający z instalacji kanalizacyjnej w % ogółu ludności na wsi (S),
 - korzystający z instalacji gazowej w % ogółu ludności na wsi (D);
- rynek pracy:
 - udział bezrobotnych kobiet zarejestrowanych w wieku 55 lat i więcej w liczbie bezrobotnych kobiet ogółem (S),
 - udział kobiet poszkodowanych w wypadkach przy pracy (S),
 - zatrudnieni w warunkach zagrożenia ogółem (S),
 - stopa bezrobocia rejestrowanego, Polska=100 (S);
- warunki życia:
 - jednostki wykreślone z rejestru REGON na 10 tys. ludności (S),
 - podmioty o liczbie zatrudnionych 10—49 na 10 tys. mieszkańców w wieku produkcyjnym (D),
 - liczba uczniów przypadających na 1 komputer z dostępem do Internetu przeznaczony do użytku uczniów — gimnazja (S),
 - liczba uczniów przypadających na 1 komputer z dostępem do Internetu przeznaczony do użytku uczniów — zasadnicze zawodowe (D).

Jak już wspomniano wcześniej, w kwalifikowaniu danej zmiennej do kategorii stymulant bądź destymulant istotną rolę odgrywała wartość jej kompleksowego współczynnika korelacji z bezpośrednim oszacowaniem wskaźnika bardzo niskiej intensywności pracy w gospodarstwach domowych dany wzorem (10). I tak np. dla zmiennej „liczba uczniów przypadających na 1 komputer z dostępem do Internetu przeznaczony do użytku uczniów — gimnazja” wyniosła ona 0,6969, zaś dla zmiennej „liczba uczniów przypadających na 1 komputer z dostępem do Internetu przeznaczony do użytku uczniów — zasadnicze zawodowe” — -0,6080. W tabl. 1 zebrano wartości podstawowej statystyki opisowej dla mierników cząstkowych oraz uzyskanego na ich podstawie miernika kompleksowego (metodą taksonomii wielokryterialnej).

TABL. 1. PODSTAWOWA STATYSTYKA OPISOWA DLA MIERNIKÓW CZĄSTKOWYCH I MIERNIKA KOMPLEKSOWEGO — WIELOKRYTERIALNY WARIANT PANELOWY, PRZEKRÓJ WOJEWÓDZTWA

Wyszczególnienie	Demografia	Gospodarka mieszkaniowa i komunalna	Rynek pracy	Warunki życia	Miernik kompleksowy
Średnia	0,399	0,444	0,308	0,252	0,335
Odchylenie standardowe	0,217	0,225	0,165	0,163	0,217
Współczynnik zmienności (w %)	54,419	50,664	53,503	64,587	64,809
Minimum	-0,237	0,045	-0,030	-0,160	-0,167
Kwartył I	0,258	0,261	0,208	0,144	0,213
Mediana	0,413	0,437	0,280	0,261	0,477

TABL. 1. PODSTAWOWA STATYSTYKA OPISOWA DLA MIERNIKÓW CZĄSTKOWYCH I MIERNIKA KOMPLEKSOWEGO — WIELOKRYTERIALNY WARIANT PANELOWY, PRZEKRÓJ WOJEWÓDZTW (dok.)

Wyszczególnienie	Demografia	Gospodarka mieszkaniowa i komunalna	Rynek pracy	Warunki życia	Miernik kompleksowy
Kwartyl 3	0,583	0,603	0,434	0,349	0,477
Maksimum	0,948	1,000	0,703	0,612	0,860

Źródło: opracowanie własne z wykorzystaniem programu SAS Enterprise Guide 4.3.

Widać zatem, że miernik kompleksowy stanowi w jakimś sensie wypadkową mierników cząstkowych. Uwagę może zwracać znaczniejsze zróżnicowanie miernika dla warunków życia. Wydaje się to być efektem największej różnorodności zawartych w tej kategorii wskaźników wyjściowych.

Warto wspomnieć, że pod względem wartości cząstkowego miernika rynku pracy dominowało woj. zachodniopomorskie (co w tym przypadku oznacza sytuację najtrudniejszą) — z wyjątkiem roku 2012, kiedy to najlepiej wypadło woj. dolnośląskie. Z kolei najniższe wartości tego miernika w latach 2005—2009 zaobserwowano w woj. małopolskim. Później lepsza sytuacja wystąpiła w woj. mazowieckim. W zakresie warunków życia odpowiedni miernik cząstkowy wskazuje na dominację woj. kujawsko-pomorskiego w latach 2005—2007 i 2009. W 2008 r. najwyższą wartość rzeczonoego miernika osiągnęło woj. lubuskie, w 2010 r. — woj. świętokrzyskie, w 2011 r. — woj. zachodniopomorskie, natomiast w 2012 r. — woj. podlaskie. Zróżnicowana była też sytuacja najlepsza pod tym względem: w latach 2005, 2010 i 2012 obserwowano ją w woj. mazowieckim, w latach 2006, 2008 i 2009 — w woj. małopolskim, w 2007 r. — w woj. świętokrzyskim oraz w 2011 r. — w woj. wielkopolskim. Te dwa mierniki cząstkowe mają szczególnie istotne znaczenie w badaniu ubóstwa. Wartości miernika kompleksowego pokazano w tabl. 2.

TABL. 2. WARTOŚCI MIERNIKA KOMPLEKSOWEGO WEDŁUG WOJEWÓDZTW

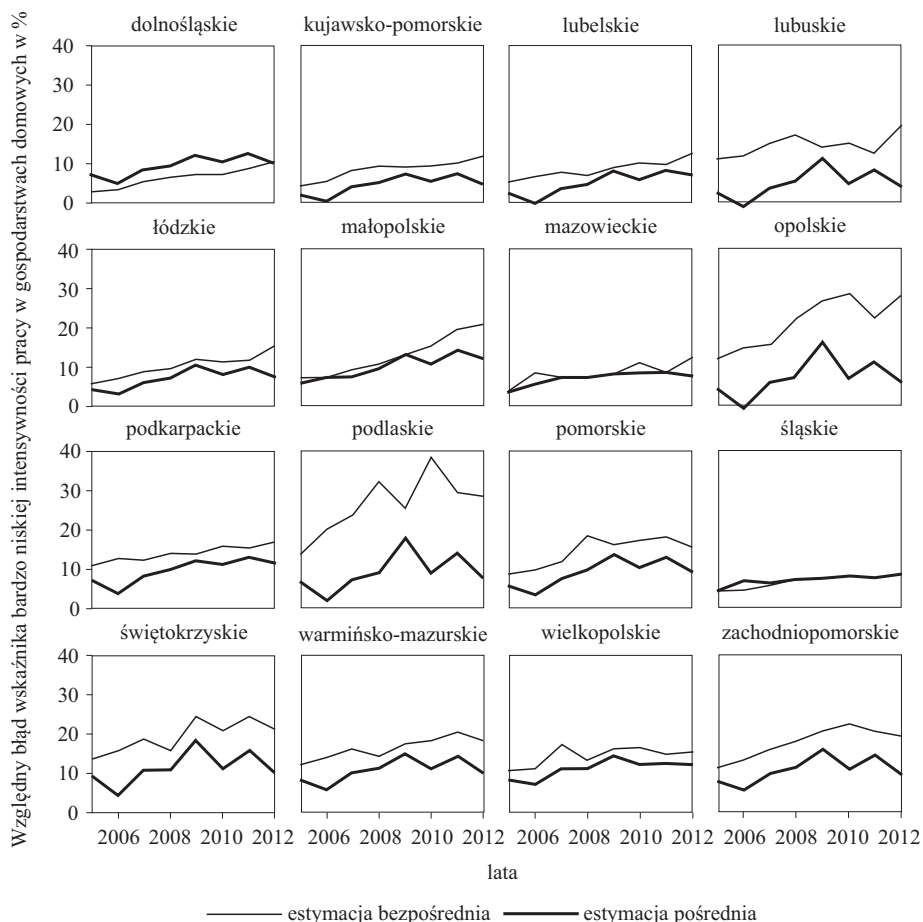
Województwa	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012
Dolnośląskie	0,538	0,538	0,509	0,414	0,378	0,374	0,499	0,426
Kujawsko-pomorskie	0,712	0,754	0,695	0,540	0,530	0,458	0,455	0,507
Lubelskie	0,334	0,237	0,338	0,262	0,215	0,276	0,256	0,171
Lubuskie	0,513	0,598	0,578	0,545	0,368	0,446	0,474	0,478
Łódzkie	0,214	0,297	0,407	0,255	0,342	0,167	0,254	0,265
Małopolskie	-0,119	-0,070	0,070	-0,082	-0,041	0,066	0,090	0,047
Mazowieckie	-0,114	0,020	-0,030	-0,034	-0,126	-0,167	-0,044	-0,143
Opolskie	0,403	0,437	0,369	0,365	0,396	0,492	0,477	0,404
Podkarpackie	0,102	0,199	0,145	0,149	0,185	0,132	0,155	0,157
Podlaskie	0,197	0,520	0,307	0,323	0,238	0,319	0,348	0,311
Pomorskie	0,265	0,326	0,376	0,256	0,217	0,240	0,367	0,274
Śląskie	0,213	0,382	0,325	0,244	0,239	0,338	0,460	0,448
Świętokrzyskie	0,108	0,256	0,115	0,338	0,289	0,318	0,308	0,378
Warmińsko-mazurskie ...	0,789	0,860	0,743	0,645	0,468	0,510	0,613	0,566
Wielkopolskie	0,279	0,324	0,208	0,246	0,181	0,327	0,378	0,374
Zachodniopomorskie	0,746	0,758	0,708	0,647	0,597	0,581	0,704	0,529

Źródło: jak przy tabl. 1.

Wartości miernika kompleksowego jako „wypadkowa” mierników cząstkowych w znacznym stopniu odzwierciedlają te spostrzeżenia. Widać tutaj najtrudniejszą sytuację w województwach warmińsko-mazurskim (w latach 2005—2007 i 2012) i zachodniopomorskim (szczególnie w latach 2008—2011). Z kolei najlepszą sytuację notowano w województwach małopolskim (w latach 2005, 2006 i 2008) oraz mazowieckim (w 2007 r. i latach 2009—2012).

Zastosowanie miernika kompleksowego jako zmiennej pomocniczej w modelu Faya-Herriota z wykorzystaniem estymatora EBLUP (16) do obliczonych wskaźników przyniosło rezultaty przedstawione na wyk. 1 i 2.

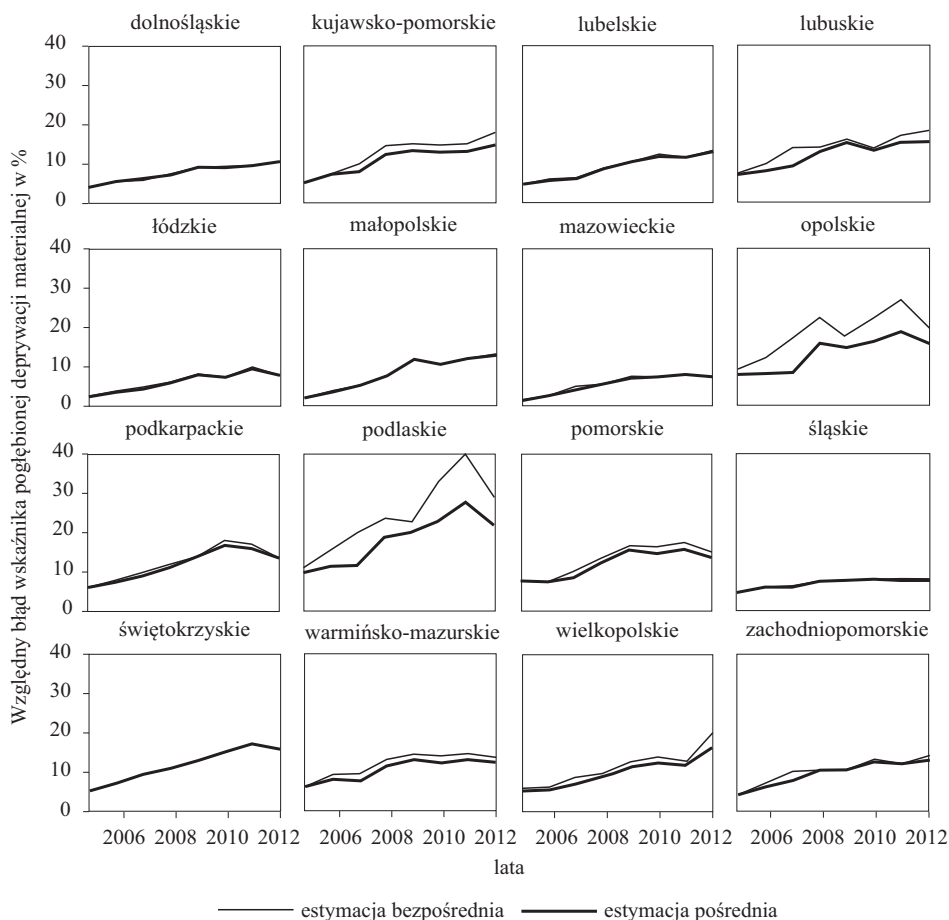
Wykr. 1. ESTYMACJA WSKAŹNIKA BARDZO NISKIEJ INTENSYWNOŚCI PRACY W WOJEWÓDZTWACH Z WYKORZYSTANIEM MIERNIKA KOMPLEKSOWEGO DLA DANYCH WIELOKRYTERIALNYCH — WZGLĘDNE BŁĘDY OSZACOWAŃ



Źródło: opracowanie własne z wykorzystaniem pakietu R.

W przypadku estymacji wskaźnika bardzo niskiej intensywności pracy dopasowanie modeli Faya-Herriota dla poszczególnych lat było zróżnicowane — skorygowany współczynnik determinacji wynosił od 11,99% w 2007 r. do 63,62% w 2006 r. Widać tutaj zdecydowaną poprawę precyzji oszacowania szczególnie dla tych województw, w których w ujęciu bezpośrednim okazała się ona najslabsza, a mianowicie głównie w województwach opolskim i podlaskim. Stosunkowo najmniejszy zysk na precyzji uzyskano w przypadku województw śląskiego i mazowieckiego.

Wykr. 2. ESTYMACJA WSKAŹNIKA POGŁĘBIONEJ DEPRYWACJI MATERIALNEJ W WOJEWÓDZTWACH Z WYKORZYSTANIEM MIERNIKA KOMPLEKSOWEGO DLA DANYCH WIELOKRYTERIALNYCH — WZGLĘDNE BŁĘDY OSZACOWAŃ



Źródło: jak przy wykr. 1.

Nieco gorzej przedstawia się dopasowanie modelu dla wskaźnika pogłębionej deprivacji materialnej. Tutaj skorygowany współczynnik determinacji nie prze-

kroczył 20% (najlepszy — 19,73% — okazał się dla roku 2011). Jednak z powodu nieistotności miernika kompleksowego jako regresora oraz bardzo niskiej wartości tego współczynnika w jego klasycznej formie, w niektórych przypadkach, owa skorygowana wartość była nawet ujemna. Tak więc — mimo określonych zysków na precyzji — specyfika tego wskaźnika poważnie utrudnia jego estymację.

ANALIZA OPARTA NA ALTERNATYWNYCH DANYCH PANELOWYCH DLA LAT 2005—2012

Przedstawiamy tu rezultaty innego doświadczenia, tym razem z wykorzystaniem — znacznie mniejszego — alternatywnego zbioru danych panelowych dla badanych lat, w stosunku do którego stosowanie wielokrotności nie było potrzebne.

Oprócz opisanych analiz, podjęto inną próbę konstrukcji miernika wykorzystując alternatywny, mniejszy zestaw danych panelowych dla lat 2005—2012, jednak tym razem bez stosowania wielokryterialności. Wykorzystany zestaw obejmował 66 zmiennych wskaźnikowych dotyczących m.in. demografii, ochrony zdrowia i opieki społecznej, bezrobocia, warunków pracy oraz wychowania przedszkolnego dzieci.

Mediana kompleksowego współczynnika zmienności (13,97) okazała się tu niższa niż średnia arytmetyczna (20,53), zaś kwartył trzeci (21,73) — znacznie wyższy od pierwszego (8,64). Zróżnicowanie wartości tego wskaźnika jest zatem wyraźne, a jego rozkład cechuje pewna asymetria. Warto też wspomnieć, że zdecydowanie największą zmienność spośród rozpatrywanych zmiennych przejawiał przyrost naturalny mężczyzn na 1000 mężczyzn, która w tym przypadku osiągnęła ponad 366%.

Weryfikację zmiennościowo-korelacyjną prowadzono według zasad dla danych panelowych określonych wcześniej. Z tym, że w tym wariancie prac konstruowano dwa odrębne zestawy zmiennych diagnostycznych: jeden — biorąc pod uwagę korelację ze wskaźnikiem niskiej intensywności pracy, a drugi — w efekcie oceny skorelowania ze wskaźnikiem pogłębionej deprywacji materialnej.

Dla wskaźnika niskiej intensywności pracy zestaw zmiennych diagnostycznych ma postać (w nawiasie — jak poprzednio — podano jej charakter oraz podano wartość kompleksowego współczynnika korelacji (9) danej zmiennej z bezpośrednim oszacowaniem wskaźnika niskiej intensywności pracy):

- liczba osób z chorobą nowotworową na 1000 osób (S; 0,6416),
- liczba wypłaconych dodatków mieszkaniowych na 100 osób (S; 0,7036),
- udział liczby bezrobotnych nowo zarejestrowanych w liczbie bezrobotnych zarejestrowanych ogółem (S; 0,6077),
- udział poszkodowanych w wypadkach przy pracy kobiet w liczbie pracujących kobiet ogółem (S; 0,7439).

Z kolei dla wskaźnika pogłębionej deprivacji materialnej zmienne diagnostyczne to (dodatkowe adnotacje według zasad jak wyżej, ale z punktu widzenia bezpośrednich oszacowań tego wskaźnika):

- udział liczby bezrobotnych kobiet zamieszkałych w mieście w liczbie bezrobotnych kobiet zarejestrowanych ogółem (D; $-0,7067$),
- udział liczby bezrobotnych kobiet z prawem do zasiłku w liczbie bezrobotnych kobiet zarejestrowanych ogółem (S; $0,5228$),
- udział zatrudnionych w warunkach zagrożenia przez jedną grupę czynników związanych z uciążliwością pracy w liczbie zatrudnionych w warunkach zagrożenia ogółem (D; $-0,6568$),
- liczba dzieci w wieku 3—5 lat przypadająca na jedno miejsce w przedszkolu (D; $-0,5843$).

Jak widać, optymalne zestawy zmiennych diagnostycznych różnią się między sobą. Korelacja optymalnych zmiennych z bezpośrednim oszacowaniem wskaźnika pogłębionej deprivacji materialnej co do wartości bezwzględnej jest na ogół nieco mniejsza niż w przypadku wskaźnika niskiej intensywności pracy i odpowiadających mu zmiennych diagnostycznych. Wobec tego ewentualna estymacja wskaźnika pogłębionej deprivacji materialnej na tym poziomie przestrzennym, przy użyciu stosownego miernika syntetycznego opartego na odpowiednim zestawie może być relatywnie bardziej obciążona. Należy jednak podkreślić, że w każdym przypadku są to zmienne o najwyższym skorelowaniu z bezpośrednimi oszacowaniami odpowiednich wskaźników docelowych, tak więc występuje tu optymalność w tym zakresie. Tabl. 3 prezentuje podstawową statystykę opisową dla mierników syntetycznych skonstruowanych przy wykorzystaniu tych zestawów.

TABL. 3. PODSTAWOWA STATYSTYKA OPISOWA DLA MIERNIKA SYNTETYCZNEGO — ALTERNATYWNY WARIANT PANELOWY W PRZEKROJU WOJEWÓDZTW

Wyszczególnienie	Dla wskaźnika	
	bardzo niskiej intensywności pracy	pogłębionej deprivacji materialnej
Średnia arytmetyczna	0,316	0,424
Odchylenie standardowe	0,175	0,235
Współczynnik zmienności w %	55,297	55,376
Minimum	-0,006	-0,139
Dolny kwartył	0,192	0,291
Mediana	0,319	0,436
Górny kwartył	0,443	0,623
Maksimum	0,710	0,781

Ź r ó d ł o: jak przy tabl. 1.

Warto dostrzec, że zmienność mierników w przypadku obu zestawów jest zbliżona, choć miernik dla wskaźnika pogłębionej deprivacji materialnej przyjmuje raczej nieco wyższe wartości. Potwierdzają to także odpowiednie rozstępy tych metacech. W tabl. 4 zamieszczono wartości obu mierników według województw.

TABL. 4. WARTOŚCI MIERNIKA SYNTETYCZNEGO WEDŁUG WOJEWÓDZTWA I BADANYCH LAT

Wyszczególnienie	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012
Wskaźnik bardzo niskiej intensywności pracy								
Dolnośląskie	0,483	0,413	0,366	0,546	0,436	0,470	0,364	0,339
Kujawsko-pomorskie	0,289	0,408	0,381	0,450	0,365	0,387	0,314	0,317
Lubelskie	0,218	0,218	0,197	0,306	0,322	0,372	0,250	0,234
Lubuskie	0,567	0,536	0,488	0,710	0,372	0,591	0,530	0,495
Łódzkie	0,236	0,299	0,298	0,394	0,278	0,305	0,265	0,234
Mazowieckie	-0,006	0,006	0,013	0,120	0,023	0,116	0,084	-0,003
Małopolskie	0,001	0,034	0,096	0,140	0,123	0,175	0,152	0,090
Opolskie	0,316	0,353	0,377	0,549	0,347	0,503	0,330	0,275
Podkarpackie	0,025	0,135	0,077	0,209	0,006	0,182	0,132	0,119
Podlaskie	0,454	0,457	0,359	0,563	0,291	0,339	0,196	0,164
Pomorskie	0,362	0,343	0,285	0,402	0,355	0,470	0,417	0,347
Śląskie	0,157	0,198	0,291	0,218	0,175	0,212	0,228	0,214
Świętokrzyskie	0,048	0,014	0,112	0,192	0,139	0,281	0,191	0,129
Warmińsko-mazurskie	0,642	0,667	0,625	0,674	0,416	0,509	0,487	0,537
Wielkopolskie	0,248	0,342	0,322	0,358	0,277	0,374	0,379	0,329
Zachodniopomorskie	0,575	0,603	0,569	0,676	0,548	0,592	0,456	0,477
Wskaźnik pogłębionej deprivacji materialnej								
Dolnośląskie	0,414	0,297	0,363	0,384	0,348	0,324	0,296	0,269
Kujawsko-pomorskie	0,385	0,415	0,480	0,583	0,627	0,569	0,582	0,575
Lubelskie	0,632	0,621	0,696	0,719	0,726	0,708	0,664	0,681
Lubuskie	0,711	0,613	0,679	0,725	0,746	0,638	0,668	0,609
Łódzkie	0,305	0,285	0,360	0,417	0,386	0,364	0,347	0,322
Mazowieckie	0,043	0,011	0,010	0,099	0,035	-0,051	-0,118	-0,139
Małopolskie	0,226	0,191	0,242	0,353	0,331	0,299	0,257	0,304
Opolskie	0,355	0,371	0,394	0,535	0,526	0,422	0,520	0,512
Podkarpackie	0,677	0,650	0,687	0,709	0,553	0,495	0,540	0,557
Podlaskie	0,147	0,178	0,180	0,299	0,261	0,245	0,260	0,269
Pomorskie	0,437	0,477	0,571	0,651	0,597	0,570	0,553	0,514
Śląskie	-0,043	-0,029	-0,067	0,027	-0,080	-0,050	-0,066	-0,020
Świętokrzyskie	0,434	0,466	0,624	0,781	0,643	0,631	0,695	0,665
Warmińsko-mazurskie	0,529	0,592	0,621	0,715	0,773	0,706	0,691	0,711
Wielkopolskie	0,163	0,252	0,173	0,393	0,385	0,358	0,356	0,387
Zachodniopomorskie	0,443	0,398	0,497	0,676	0,650	0,608	0,603	0,586

Źródło: jak przy tabl. 1.

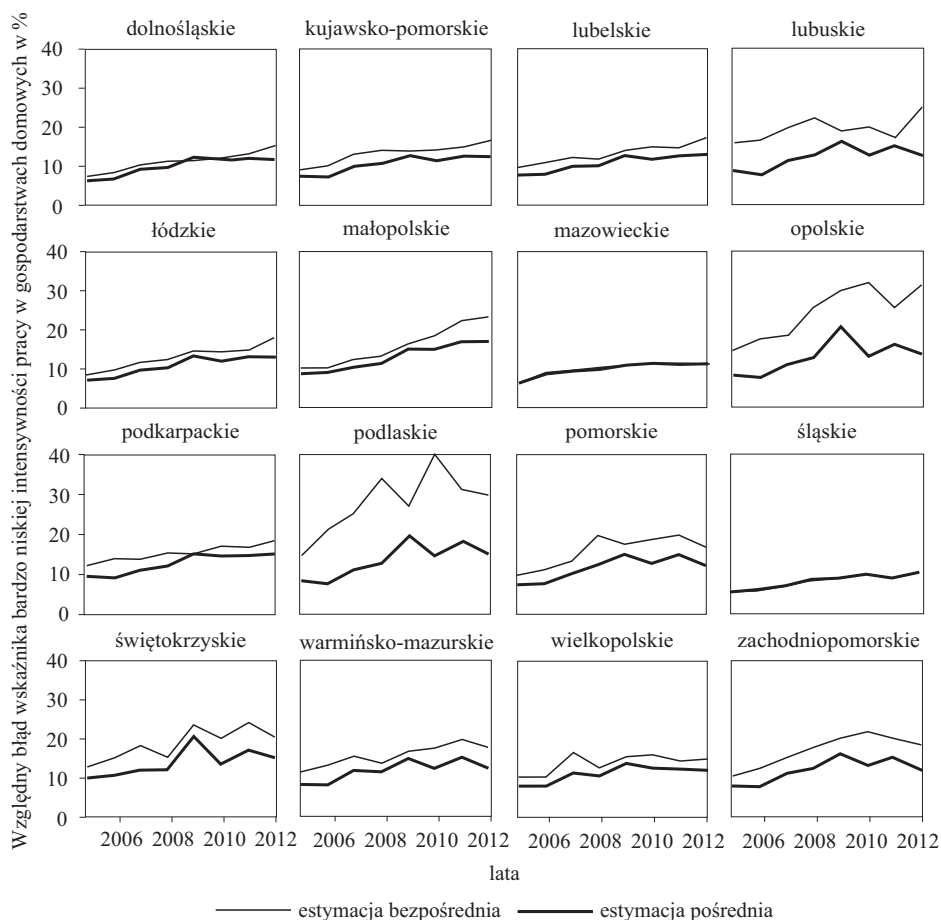
W większości lat maksymalne wartości miernika osiągało zatem woj. warmińsko-mazurskie (jedynie w roku 2009 wyprzedziło je woj. lubuskie), natomiast wartości najmniejsze przyjmowało woj. mazowieckie. W roku 2005 była to nawet liczba ujemna, co świadczy o tym, że znacznie odstawało swoim dobrobytem od pozostałych. Warto jednakże wziąć pod uwagę, że duży wpływ na ten stan rzeczy mogła mieć aglomeracja warszawska.

W przypadku zestawu dla wskaźnika pogłębionej deprivacji materialnej rzecz wyglądała następująco — nie było jednego województwa z dominującymi problemami tego rodzaju (w 2005 r. najwyższą wartość miernika notowano w woj. lubuskim, w 2006 r. — w woj. podkarpackim, w latach 2007 i 2010 —

w woj. lubelskim, w latach 2008 i 2011 — w woj. świętokrzyskim, natomiast w latach 2009 i 2012 — w woj. warmińsko-mazurskim). Najniższe wartości zaś to domena województw mazowieckiego (lata 2010—2012) i śląskiego (lata 2005—2009), które pod tym względem prezentują się zatem najlepiej.

Wykr. 3 i 4 uwidaczniają poprawę jakości estymacji w stosunku do estymatora Horvitz-Thomsona dzięki zastosowaniu wspomnianych mierników syntetycznych. Poprawa ta jest bardzo widoczna zwłaszcza w przypadku wskaźnika bardzo niskiej intensywności pracy, gdyż — poza województwami śląskim i mazowieckim — obserwowana jest we wszystkich województwach, przy czym najwyraźniej w woj. podlaskim.

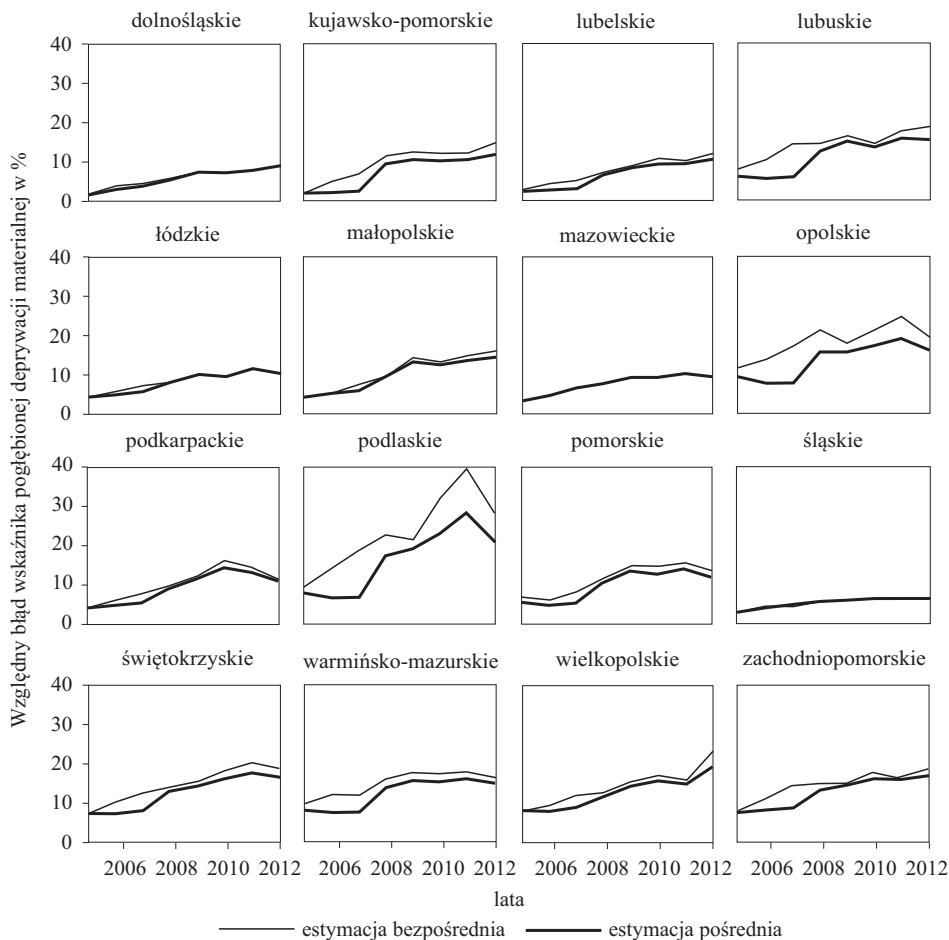
Wykr. 3. ESTYMACJA WSKAŹNIKA BARDZO NISKIEJ INTENSYWNOŚCI PRACY W WOJEWÓDZTWACH Z WYKORZYSTANIEM MIERNIKA SYNTETYCZNEGO DLA DANYCH ALTERNATYWNYCH — WZGLĘDNE BŁĘDY OSZACOWAŃ



Źródło: jak przy wykr. 1.

W przypadku estymacji wskaźnika bardzo niskiej intensywności pracy w porównaniu w modelem rozpatrywanym wcześniej widać pogorszenie się jego jakości. Najwyższa wartość skorygowanego współczynnika determinacji to 43,26% w 2005 r., zaś w roku 2007 okazała się nawet ujemna (miernik był tam zresztą nieistotny). Tym niemniej efekty redukcji błędu na skutek stosowania estymacji pośredniej jest wyraźnie widoczny.

Wykr. 4. ESTYMACJA WSKAŹNIKA POGŁĘBIONEJ DEPRYWACJI MATERIALNEJ W WOJEWÓDZTWACH Z WYKORZYSTANIEM MIERNIKA SYNTETYCZNEGO DLA DANYCH ALTERNATYWNYCH — WZGLĘDNE BŁĘDY OSZACOWAŃ



Źródło: jak przy wykr. 1.

Wariant ten pokazuje natomiast wyraźną poprawę jakości oszacowań wskaźnika pogłębionej deprivacji materialnej. Maksymalna wartość skorygowanego współczynnika determinacji w tym przypadku to 54,43% w 2006 r., ale też

wzrost wartości minimalnych (absolutne minimum to 12,24% w 2008 r.). W województwach opolskim i podlaskim widoczny był też znaczący ubytek błędów oszacowań w stosunku do estymacji bezpośredniej. Jednak w pozostałych województwach zysk na precyzji okazał się mniejszy.

Wnioski

Przeprowadzone analizy doprowadziły do kilku konkluzji. Najważniejszą z nich jest ta, że mierniki taksonomiczne stanowią przydatne narzędzie w estymacji analizowanych wskaźników dla województw. Ich zastosowanie w modelu Faya-Herriota poprawia precyzję estymacji szczególnie tam, gdzie była ona najniższa.

Warto w tym miejscu zauważyć jednak, że wskaźniki niskiej intensywności pracy oraz pogłębionej deprywacji materialnej są determinowane przeważnie innymi czynnikami. Specyfika istoty owych czynników — a co za tym idzie możliwości doboru zmiennych do konstrukcji mierników kompleksowych — ma bardzo istotny wpływ na jakość takich modeli. Informacje dotyczące pracy z reguły są łatwo dostępne w pełnych źródłach danych (takich jak BDL). Zrozumiałe więc okazują się w tym kontekście najlepsze wyniki estymacji uzyskane dla wskaźnika bardzo niskiej intensywności pracy. Z kolei definicja wskaźnika pogłębionej deprywacji materialnej opiera się na specyficznych informacjach, które można uzyskać w zasadzie tylko z badań reprezentacyjnych przeprowadzanych na stosunkowo niskich próbach (takich jak badanie budżetów gospodarstw domowych czy Europejskie Badanie Dochodów i Warunków Życia EU-SILC). Znacznie to utrudnia znalezienie doń efektywnych zmiennych pomocniczych. Jednak i ten problem w pewnym zakresie da się nieco zmniejszyć.

dr hab. Andrzej Młodak — *Urząd Statystyczny w Poznaniu, Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa im. Prezydenta Stanisława Wojciechowskiego w Kaliszu*
mgr Tomasz Józefowski — *Urząd Statystyczny w Poznaniu*
mgr Łukasz Wawrowski — *Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu, Urząd Statystyczny w Poznaniu*

LITERATURA

- Fay R. E., Herriot R. A. (1979), *Estimates of income for small places: An application of James-Stein procedures to census data*, „Journal of the American Statistical Association”, Vol. 74, s. 405—410.
- Malina A. (2002), *Wielokryterialna taksonomia w analizie porównawczej struktur gospodarczych Polski*, [w:] A. Zeliaś (red.) *Przestrzenno-czasowe modelowanie i prognozowanie zjawisk gospodarczych*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Krakowie, s. 305—312.
- Malina A., Zeliaś A. (1998), *On Building Taxonomic Measures on Living Conditions*, „Statistics in Transition”, Vol. 3, s. 523—544.
- Młodak A. (2005), *Ocena zmienności cech statystycznych w modelu taksonomicznym*, „Wiadomości Statystyczne”, nr 9, s. 5—18.

- Młodak A. (2006), *Analiza taksonomiczna w statystyce regionalnej*, Centrum Doradztwa i Informatyki DIFIN, Warszawa.
- Młodak A. (2009), *Historia problemu Webera*, „Matematyka Stosowana”, nr 10/5, s. 3—21.
- Neter J., Wasserman W., Kutner M. H. (1985), *Applied Linear Statistical Models: Regression, Analysis of Variance, and Experimental Designs*, Homewood, IL: Richard D. Irwin, Inc., No. 469.
- Rao J. N. K. (2003), *Small Area Estimation*, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey.
- Rousseeuw P. J., Leroy A. M. (2005), *Robust Regression and Outlier Detection*, John Wiley & Sons, New York.
- Vandev D. L. (2002), *Computing of Trimmed L_1 -Median*, Laboratory of Computer Stochastics, Institute of Mathematics, Bulgarian Academy of Sciences, Bulgaria, <http://www.fmi.uni-sofia.bg/fmi/statist/Personal/Vandev/papers/aspap.pdf>.
- Zeliaś A. (2002), *Some Notes on the Selection of Normalization of Diagnostic Variables*, „Statistics in Transition”, Vol. 5, No. 5, s. 787—802.

Summary. *Authors present possibilities of use of taxonomic methods to the construction of complex measures of poverty level. These measures can serve as auxiliary variables in estimation of poverty indicators on various territorial levels. Replacement (sometimes numerous) set of explanatory variables with one carefully determined synthetic measure facilitates performing an estimation and allows for treatment of any such model as an integrity. Construction of complex measures based on the approach using inverse correction matrix in correlation verification, Weber median in normalization and benchmark of development was applied to various data sets. These sets were homogenous but also very reach and diversified by domains resources. In the second case the multi-criteria approach was applied. The analysed data have the panel form (the concerned the years 2005—2012) what was a reason of relevant modification of traditional approaches in the diversification and correlation verification. This article presents effects of use of measures obtained in such way to estimation of low risk intensity and severe material deprivation rates made using the Fay-Herriot model as well as comparison of them with the results of direct estimation.*

Keywords: low work intensity rate, severe material deprivation area, taxonomic measure, direct estimation, Fay-Herriot model.

Резюме. *В статье были представлены возможности использования таксономических методов в разработке комплексных измерителей уровня бедности. Они могут быть вспомогательными переменными в оценивании показателей бедности на разных пространственных уровнях. Замена ряда объясняющих переменных одним хорошо избранным синтетическим измерителем облегчает оценку и одновременно позволяет считать каждую модель интегральной частью. Разработку комплексных измерителей для разных множеств данных основано на способе использующим метод обратной матрицы корреляции в процессе корреляционной проверки, медиану Вебера в нормализации, а также на развительном образце.*

Эти множества имеют характер как единых, так и очень больших дифференцированных в отношении к отраслям фондов. Во втором случае был использован многокритерийный подход. Рассматриваемые данные имели панельную форму, это требовало модификации традиционных подходов в области сопоставительной проверки и проверки непостоянности. В статье были показаны результаты использования полученных измерителей в оценке показателя очень низкой интенсивности работы, а также показателя углубленных материальных лишений, сделанных с использованием Фэй-Эррио модели. Они были также сопоставлены с результатами прямой оценки.

Ключевые слова: показатель очень низкой интенсивности работы, показатель углубленных материальных лишений, таксономический измеритель, прямая оценка, Фэй-Эррио модель.