METODY ILOŚCIOWE W BADANIACH EKONOMICZNYCH
Tom XVI/4, 2015, str. 75 – 84

ANALIZA WYBRANYCH METOD ESTYMACJI PARAMETRÓW GRANICZNYCH ROZKŁADÓW STATYSTYKI MAKSIMUM

Dorota Pekasiewicz
Katedra Metod Statystycznych, Uniwersytet Łódzki
e-mail: pekasiewicz@uni.lodz.pl

Streszczenie: Granicznym rozkładem statystyki maksimum wyznaczonej na podstawie próby losowej jest jeden z rozkładów: Gumbela, Frécheta lub Weibulla. Gdy posiadamy informacje o klasie rozkładu analizowanej zmiennej twierdzenia graniczne określają klasę rozkładu maksimum z próby, natomiast w innym przypadku należy stosować testy statystyczne oparte na statystykach pozycyjnych rozstrzygające o przynależności dystrybuanty maksimum do obszaru przyciągania odpowiedniej dystrybuanty. Do szacowania parametrów rozkładów maksimum wykorzystać można różne metody estymacji, w szczególności metodę największej wiarygodności, metodę momentów i metody oparte na kwantylach. W pracy przedstawiono rezultaty analiz błędów średniokwadratowych estymatorów parametrów rozkładu Gumbela otrzymanych metodą momentów, kwantyli oraz kwantylową metodą najmniejszych kwadratów z uciętą liczbą kwantyli. Otrzymane wyniki pozwalają sformułować wnioski dotyczące własności rozważanych estymatorów.

Słowa kluczowe: statystyka maksimum, rozkład Gumbela, rozkład Frécheta, rozkład Weibulla, metoda momentów, metoda kwantyli, kwantylowa metoda najmniejszych kwadratów z uciętą liczbą kwantyli.

WPROWADZENIE

Statystyki ekstremalne, w tym statystyka maksimum, znajdują zastosowanie w różnego rodzaju badaniach ekonomicznych, przyrodniczych i medycznych. Przy ich użyciu określa się między innymi miary ryzyka ekstremalnego oraz występowanie wartości odstających. Zdarzenia ekstremalne pojawiają się bardzo rzadko, ale ich wystąpienie związane jest zwykle z dużymi stratami finansowymi, dlatego istnieje potrzeba poszukiwania jak najlepszych metod szacowania wielkości tych strat.

Niech $X_1, X_2, ..., X_n$ będzie *n*-elementową próbą prostą wylosowaną z populacji *X*, natomiast $X_{(n)}^{(n)} = \max\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ statystyką maksimum wyznaczoną na jej podstawie. Statystykę tę charakteryzuje rozkład zwany uogólnionym rozkładem maksimum $GEVD_M(\mu,\sigma,\xi)$ określony za pomocą dystrybuanty postaci (por. Castillo i in. 2004):

$$F_{\mu,\sigma,\xi}^{M}(x) = \begin{cases} \exp\left(-\left(1+\xi\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)^{\frac{-1}{\xi}}\right) & \text{dla } \xi \neq 0, \quad 1+\xi\dfrac{x-\mu}{\sigma} > 0, \\ \exp\left(-\exp\left(-\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)\right) & \text{dla } \xi = 0, \quad x \in R, \end{cases} \tag{1}$$

gdzie μ jest parametrem położenia, σ - skali, zaś $\frac{1}{\xi}$ - parametrem kształtu.

Szczególnymi przypadkami uogólnionego rozkładu maksimum są rozkłady: Gumbela $(\xi = 0)$, Frécheta $(\xi > 0)$ i Weibulla $(\xi < 0)$. Dla znanych klas rozkładu populacji sformułowano twierdzenia określające rozkłady statystyk maksimum (por. Czekała 2001, Gumbel 2004). Przykładowe typy rozkładów populacji i maksimów z próby przedstawia Tabela 1.

Tabela 1. Typy rozkładów granicznych statystyk maksymalnych dla wybranych populacji

Rozkład populacji *X*	Rozkład $X_{(n)}^{(n)}$
gamma, Gumbela, logistyczny, lognormalny, normalny, Rayleigha, wykładniczy	Gumbela
Burra, Cauchy'ego, Pareto, t Studenta	Frécheta
beta, jednostajny, potęgowy	Weibulla

Źródło: opracowanie własne

Często klasa rozkładu populacji jest nieznana, tym samym nieznana jest klasa rozkładu statystyki maksimum. Istnieje więc konieczność weryfikacji hipotezy statystycznej o przynależności dystrybuanty analizowanej statystyki ekstremalnej do obszaru przyciągania dystrybuanty rozkładu Gumbela wobec hipotezy alternatywnej mówiącej o przynależności dystrybuanty tej statystyki do obszaru przyciągania dystrybuanty rozkładu Frécheta lub Weibulla. Zastosowanie testów typu: zgodności χ^2, Kołmogorowa, Cramera von Misesa lub Andersona – Darlinga w tym przypadku nie jest przydatne ze względu na konieczność estymacji parametrów rozkładu, ale można wykorzystać testy przedstawione w pracy Neves C., Fraga Alves M. I. [2008] oparte na wartościach statystyk pozycyjnych: $X_{(n-k)}^{(n)}, ..., X_{(n)}^{(n)}$. Jednym z tego typu testów jest test o statystyce

$$G_n(k)=\sqrt{k/4}\left(\frac{\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\left(X_{(n-i+1)}^{(n)}-X_{(n-k)}^{(n)}\right)^2}{\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}X_{(n-i+1)}^{(n)}-X_{(n-k)}^{(n)}\right)^2}-2\right),$$ która przy założeniu prawdziwości hipotezy zerowej, ma rozkład asymptotycznie normalny $N(0,1)$.

W zależności od podjętej decyzji w kolejnym kroku szacuje się dwa parametry rozkładu Gumbela lub trzy parametry rozkładu Frécheta lub Weibulla. W pracy rozważane są trzy metody estymacji parametrów: metoda momentów, kwantyli oraz modyfikacja kwantylowej metody najmniejszych kwadratów zwana kwantylową metodą najmniejszych kwadratów z uciętą liczbą kwantyli.

W pracy przedstawione są rezultaty badań dotyczących wielkości błędów średniokwadratowych estymatorów parametrów jednego z rozkładów granicznych statystyki maksimum – rozkładu Gumbela.

ESTYMACJA PARAMETRÓW ROZKŁADU MAKSIUMUM Z PRÓBY

Zastosowanie metod estymacji parametrów rozkładu statystyki maksimum związane jest z klasą jej rozkładu. W przypadku rozkładu Gumbela, czy Weibulla można stosować metodę momentów, natomiast w przypadku rozkładu Frécheta nie zawsze istnieje wartość oczekiwana i wariancja, co uniemożliwia wykorzystanie tej metody. Zastosowanie metody największej wiarygodności możliwe jest ale tylko numerycznie.

W rozdziale tym przedstawione są wybrane metody estymacji uogólnionego rozkładu maksimum z próby. Pierwszą z nich jest metoda momentów (*mM*), która w przypadku estymacji parametrów rozkładu Gumbela $Gl(\mu,\sigma)$ statystyki $Z = X_{(n)}^{(n)}$ związana jest z układem równań:

$$\begin{cases} \bar{z} = \mu + 0{,}57772\sigma, \\ s^2 = \dfrac{\pi^2\sigma^2}{6}, \end{cases} \tag{2}$$

którego rozwiązanie prowadzi do estymatorów postaci:

$$\hat{\mu}^{mM} = \bar{z} - 0{,}57772\frac{s\sqrt{6}}{\pi}, \tag{3}$$

$$\hat{\sigma}^{mM} = \frac{s\sqrt{6}}{\pi}. \tag{4}$$

Estymacja metodą momentów parametrów rozkładu Weibulla, czy Frécheta związana jest z utworzeniem układu trzech równań z trzema niewiadomymi parametrami.

Inną stosowaną metodą może być metoda kwantyli (*mK*) zwana również metodą percentyli. Polega ona na porównaniu kwantyli teoretycznych rozkładu z kwantylami empirycznymi. Dla zmiennej losowej Z o rozkładzie Gumbela kwantyl rzędu *p* jest postaci: $Q_p = \mu - \sigma \ln(-\ln p)$, co prowadzi do układu równań:

$$\begin{cases} Z_{p;n} = \mu - \sigma \ln(-\ln p), \\ Z_{(1-p);n} = \mu - \sigma \ln(-\ln(1-p)), \end{cases} \tag{5}$$

gdzie $Z_{p;n}$ oraz $Z_{(1-p);n}$ są kwantylami z próby rzędu *p* i $1-p$. W wyniku jego rozwiązania otrzymujemy estymatory postaci:

$$\hat{\mu}^{mK} = Z_{p;n} + \frac{Z_{p;n} - Z_{(1-p);n}}{\ln(-\ln(1-p)) - \ln(-\ln p)} \ln(-\ln p), \tag{6}$$

$$\hat{\sigma}^{mK} = \frac{Z_{p;n} - Z_{(1-p);n}}{\ln(-\ln(1-p)) - \ln(-\ln p)}. \tag{7}$$

W przypadku estymacji parametrów rozkładu Frécheta i Weibulla korzystając z definicji kwantyla rzędu *p* otrzymujemy:

$$\begin{cases} X_{(i)}^{(n)} = \mu + \sigma((-\ln p_i)^{-\xi} - 1)/\xi, \\ X_{(j)}^{(n)} = \mu + \sigma((-\ln p_j)^{-\xi} - 1)/\xi, \\ X_{(l)}^{(n)} = \mu + \sigma((-\ln p_l)^{-\xi} - 1)/\xi, \end{cases} \tag{8}$$

gdzie $X_{(i)}^{(n)}$, $X_{(j)}^{(n)}$, $X_{(l)}^{(n)}$ są różnymi statystykami pozycyjnymi o rangach $i, j, l \in \{1, 2, ..., n-1\}$, $i < j < l$, oraz $p_s = \frac{s}{n}$ dla $s = i, j, l$.

Estymatorem parametru ξ jest statystyka $\hat{\xi}^{mK}$ spełniająca równanie:

$$\frac{(-\ln p_i)^{-\xi} - (-\ln p_l)^{-\xi}}{(-\ln p_j)^{-\xi} - (-\ln p_l)^{-\xi}} - \frac{X_{(i)}^{(n)} - X_{(l)}^{(n)}}{X_{(j)}^{(n)} - X_{(l)}^{(n)}} = 0, \tag{9}$$

natomiast estymatory parametrów μ i σ wyrażone są wzorami:

$$\hat{\mu}^{mK} = X_{(i)}^{(n)} - \frac{\left(X_{(i)}^{(n)} - X_{(l)}^{(n)}\right)\left((-\ln p_i)^{-\hat{\xi}^{mK}} - 1\right)}{(-\ln p_i)^{-\hat{\xi}^{mK}} - (-\ln p_l)^{-\hat{\xi}^{mK}}}, \tag{10}$$

$$\hat{\sigma}^{mK} = \frac{\hat{\xi}^{mK}\left(X_{(i)}^{(n)} - X_{(l)}^{(n)}\right)}{(-\ln p_i)^{-\hat{\xi}^{mK}} - (-\ln p_l)^{-\hat{\xi}^{mK}}}. \tag{11}$$

Funkcja:

$$f(\xi)=\frac{(-\ln p_i)^{-\xi}-(-\ln p_l)^{-\xi}}{(-\ln p_j)^{-\xi}-(-\ln p_l)^{-\xi}}-\frac{X_{(i)}^{(n)}-X_{(l)}^{(n)}}{X_{(j)}^{(n)}-X_{(l)}^{(n)}} \tag{12}$$

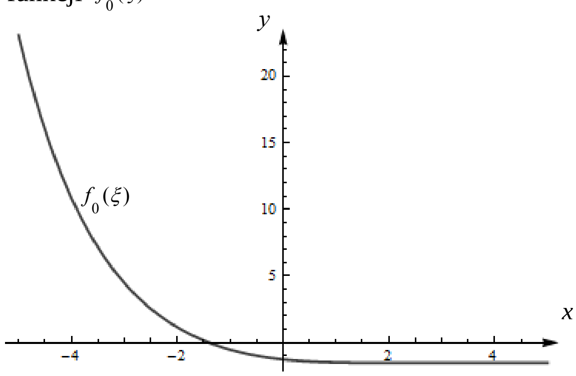
zawsze posiada miejsce zerowe.

Wykres funkcji:

$$f_0(\xi)=\frac{(-\ln 0{,}1)^{-\xi}-(-\ln 0{,}9)^{-\xi}}{(-\ln 0{,}3)^{-\xi}-(-\ln 0{,}9)^{-\xi}}-\frac{X_{(10)}^{(100)}-X_{(90)}^{(100)}}{X_{(30)}^{(100)}-X_{(90)}^{(100)}} \tag{13}$$

dla zmiennej losowej X o rozkładzie $GEVD_M(-1,1,1)$ przedstawiony jest na Rysunku 1.

Rysunek 1. Wykres funkcji $f_0(\xi)$



Źródło: opracowanie własne

W przypadku estymacji parametrów metodą kwantyli pojawia się problem wyboru rzędów stosowanych kwantyli. Zatem zastosowanie tej metody poprzedzone powinno być analizami własności estymatorów w zależności od ustalonych rzędów kwantyli.

Alternatywną metodą może być kwantylowa metoda najmniejszych kwadratów z uciętą liczbą kwantyli (*uKmnk*) zaproponowana w pracy Pekasiewicz [2015] polegająca na poszukiwaniu minimum globalnego funkcji określonej wzorem:

$$G(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_s)=\sum_{i=1+k/2}^{n-k/2}\left(X_{p_i;n}-Q_{p_i}\right)^2, \tag{14}$$

gdzie $X_{p_i;n}$ kwantyle z próby rzędu $p_i = \frac{i}{n}$, natomiast Q_{p_i} to kwantyle rozkładu rzędu p_i, dla $i = 1, \ldots, n$.

Dla zmiennej losowej Z o rozkładzie Gumbela $Gl(\mu,\sigma)$ zastosowanie tej metody prowadzi do następujących postaci estymatorów:

$$\hat{\mu}^{uKmnk} = \frac{\sum_{i=1+k/2}^{n-k/2} X_{p_i;m} \sum_{i=1+k/2}^{n-k/2} \left(\ln(-\ln p_i)\right)^2 - \sum_{i=1+k/2}^{n-k/2} X_{p_i;n} \ln(-\ln p_i) \sum_{i=1+k/2}^{n-k/2} \ln(-\ln p_i)}{(n-k) \sum_{i=1+k/2}^{n-k/2} \left(\ln(-\ln p_i)\right)^2 - \left(\sum_{i=1+k/2}^{n-k/2} \ln(-\ln p_i)\right)^2}, \quad (15)$$

$$\hat{\sigma}^{uKmnk} = \frac{\sum_{i=1+k/2}^{n-k/2} X_{p_i;m} \sum_{i=1+k/2}^{n-k/2} \ln(-\ln p_i) - (n-k) \sum_{i=1+k/2}^{n-k/2} X_{p_i;m} \ln(-\ln p_i)}{(n-k) \sum_{i=1+k/2}^{n-k/2} \left(\ln(-\ln p_i)\right)^2 - \left(\sum_{i=1+k/2}^{n-k/2} \ln(-\ln p_i)\right)^2}. \quad (16)$$

W tym przypadku własności estymatorów zależą od ustalonej liczby pomijanych kwantyli i również stosowanie tej metody poprzedzone powinno być wstępnymi analizami własności estymatorów.

ANALIZA WŁASNOŚCI ESTYMATORÓW PARAMETRÓW ROZKŁADU GUMBELA

W praktycznych zastosowaniach przy estymacji parametrów rozkładu statystyk ekstremalnych stosuje się podejście blokowe tzn. próbę losową dzieli się na pewną liczbę podprób i w każdej z nich wyznacza się maksimum. W takich sytuacjach próba wylosowana z populacji powinna być bardzo liczna.

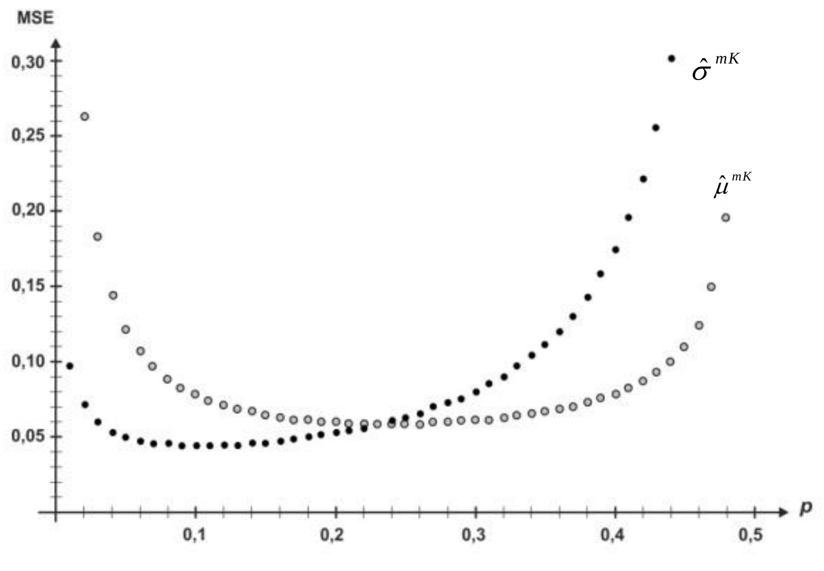
Przedstawione wyniki przeprowadzonych badań dotyczą własności estymatorów parametrów rozkładu Gumbela. Rozważane były trzy opisane wyżej metody estymacji. W przypadku estymacji metodą kwantyli konieczna jest wstępna analiza zależności wielkości obciążeń i błędów średniokwadratowych estymatorów od rzędów stosowanych kwantyli, natomiast dla kwantylowej metody najmniejszych kwadratów z uciętą liczbą kwantyli – analiza zależności własności estymatorów od liczby pomijanych kwantyli. Procedurę szacowania parametrów rozkładu Gumbela przy użyciu każdej z metod powtarzano 20000 razy.

Analizę zależności wielkości obciążeń i błędów średniokwadratowych estymatorów otrzymanych metodą kwantyli od rzędów stosowanych kwantyli przeprowadzono dla rozkładu Gumbela o różnych parametrach. Wielkości błędów średniokwadratowych estymatorów uzyskanych w oparciu o 100-elementowe próby dla wybranego rozkładu przedstawiono na Rysunku 2. Na podstawie otrzymanych wyników można zauważyć, że w przypadku tej klasy rozkładów najmniejszym błędem średniokwadratowym charakteryzuje się estymator parametru μ dla $p \approx 0{,}3$, natomiast estymator parametru σ dla $p \approx 0{,}1$.

Przy estymacji parametrów rozkładu Gumbela kwantylową metodą najmniejszych kwadratów z uciętą liczbą kwantyli badano wpływ liczby pomijanych kwantyli na własności estymatorów. Rezultaty analiz symulacyjnych wielkości błędów średniokwadratowych estymatorów parametrów wybranego rozkładu, uzyskanych na podstawie 100-elementowych prób, przedstawiono na Rysunku 3. Z przeprowadzonych badań wynika, że duża liczba pomijanych kwantyli powoduje wzrost błędów średniokwadratowych estymatorów.

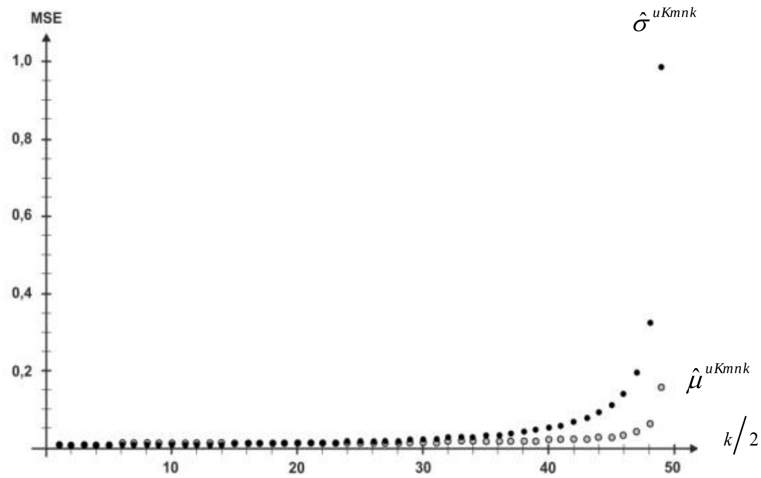
Rezultaty symulacyjnych badań własności, w tym obciążeń, estymatorów, otrzymanych rozważanymi metodami, dla innych rozkładów przedstawione są w pracy Pekasiewicz [2015].

Rysunek 2. Zależność błędów średniokwadratowych estymatorów parametrów rozkładu $Gl(0{,}2)$ od rzędu p w metodzie kwantyli



Źródło: opracowanie własne

Rysunek 3. Zależność błędów średniokwadratowych estymatorów parametrów rozkładu *Gl*(0,2) od liczby pomijanych kwantyli w metodzie *uKmnk*



Źródło: opracowanie własne

W celu porównania własności estymatorów parametrów rozkładu Gumbela uzyskanych trzema rozważanymi metodami generowano populacje o rozkładach takich, że maksimum z próby charakteryzował graniczny rozkład Gumbela (por. Tabela 1). Z populacji losowano próby o liczbie elementów co najmniej n=5000, a następnie dzielono ją na m bloków zawierających po $r=n/m$ elementów. Powtórzenie 20000 razy procedury estymacji pozwoliło oszacować błędy średniokwadratowe estymatorów. Korzystając z wyników poprzednich badań, przy zastosowaniu metody kwantyli wykorzystywano kwantyle rzędu 0,3 i 0,1, natomiast w kwantylowej metodzie najmniejszych kwadratów z uciętą liczbą kwantyli pomijano 10% kwantyli największych i 10% kwantyli najmniejszych. Dla wybranych rozkładów wykładniczych i logistycznych wyniki uzyskane w oparciu o próby zawierające n elementów podzielone na m bloków r-elementowych przedstawiono w Tabeli 2. Można zauważyć, że ustalana liczba bloków, prowadząca do otrzymania m maksimów stanowiących próbę losową, wpływa znacząco na wielkość błędów średniokwadratowych. Dużo mniejsze znaczenie ma wielkość r (o ile $r \geq 50$).

W przypadku estymacji parametrów uogólnionego rozkładu statystyki maksimum opisanego przez dystrybuantę (1) z trzema parametrami można również wykorzystać metodę kwantyli, ustalając rzędy trzech stosowanych kwantyli (por. Pekasiewicz [2015]).

Tabela 2. Oszacowania błędów średniokwadratowych estymatorów parametrów rozkładu Gumbela

Rozkład	r	m	*mM*		*mK*		*uKmnk*	
			$\hat{\mu}^{mM}$	$\hat{\sigma}^{mM}$	$\hat{\mu}^{mK}$	$\hat{\sigma}^{mK}$	$\hat{\mu}^{uKmnk}$	$\hat{\sigma}^{uKmnk}$
Exp(3)	50	200	0,0551	0,0499	0,0654	0,0518	0,0514	0,0438
	50	100	0,1101	0,0997	0,1303	0,1022	0,1030	0,0886
	100	100	0,1055	0,0983	0,1314	0,1004	0,1043	0,0855
	100	50	0,2107	0,1947	0,2697	0,1998	0,2160	0,1788
	200	50	0,2130	0,1909	0,2729	0,1958	0,2201	0,1745
Exp(0,5)	50	200	0,0016	0,0014	0,0018	0,0015	0,0015	0,0012
	50	100	0,0031	0,0028	0,0036	0,0029	0,0029	0,0024
	100	100	0,0029	0,0027	0,0037	0,0028	0,0029	0,0024
	100	50	0,0058	0,0054	0,0072	0,0055	0,0059	0,0049
	200	50	0,0057	0,0054	0,0072	0,0055	0,0059	0,0049
Logist(3,1)	50	200	0,0060	0,0056	0,0076	0,0058	0,0059	0,0050
	50	100	0,0122	0,0109	0,0151	0,0114	0,0120	0,0097
	100	100	0,0121	0,0109	0,0154	0,0113	0,0122	0,0096
	100	50	0,0239	0,0214	0,0303	0,0223	0,0249	0,0201
	200	50	0,0238	0,0213	0,0304	0,0218	0,0248	0,0197
Logist(3,3)	50	200	0,0546	0,0517	0,0683	0,0523	0,0536	0,0447
	50	100	0,1092	0,1005	0,1372	0,1043	0,1079	0,0898
	100	100	0,1072	0,0999	0,1348	0,1026	0,1082	0,0877
	100	50	0,2182	0,1933	0,2768	0,1985	0,2248	0,1780
	200	50	0,2145	0,1908	0,2779	0,1984	0,2245	0,1778

Źródło: opracowanie własne

UWAGI KOŃCOWE

Wyniki przeprowadzonych analiz symulacyjnych pozwalają stwierdzić, że w analizowanych przypadkach proponowana zmodyfikowana kwantylowa metoda najmniejszych kwadratów prowadzi do otrzymania oszacowań parametrów rozkładu Gumbela z najmniejszymi błędami średniokwadratowymi. Metoda momentów daje zwykle dokładniejsze oszacowania niż metoda kwantyli, ale zaletą metody kwantyli jest jej uniwersalność.

Podobne analizy symulacyjne można przeprowadzić dla rozkładów Frécheta i Weibulla, jednak w tych przypadkach nie da się wyznaczyć wzorów na estymatory ich parametrów.

Związek między statystyką minimum $X_{(1)}^{(n)} = \min\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ oraz maksimum $(-X)_{(n)}^{(n)}$ postaci: $X_{(1)}^{(n)} = -(-X)_{(n)}^{(n)}$ pozwala zapisać dystrybuantę graniczną minimum z próby jako $F_{\mu,\delta,\xi}^{m}(x) = 1 - F_{\mu,\sigma,\xi}^{M}(-x)$, gdzie $F_{\mu,\sigma,\xi}^{M}(x)$ jest dystrybuantą graniczną zmiennej $X_{(n)}^{(n)}$, a to sprawia, że przedstawione metody można wykorzystać również do estymacji parametrów rozkładu minimum z próby.

BIBLIOGRAFIA

Castillo E., Hadi A. S., Balakrishnan N., Sarabia J. M. (2004) Extreme Value and Related Models with Application in Engineering and Science, Wiley Interscience, A. John Wiley & Sons, New York.

Czekała M. (2001) Statystyki pozycyjne w modelowaniu ekonometrycznym. Wybrane problemy, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej im. O. Langego, Wrocław.

Gumbel E. J. (2004) Statistics of Extremes, Dover Publications, Mineola, New York.

Neves C., Fraga Alves M. I. (2008) Testing Extreme Value Conditions – an Overview and Recent Approaches, REVSTAT – Statistical Journal 6, 83–100.

Pekasiewicz D. (2012) Zastosowanie metod symulacyjnych do badania własności estymatorów otrzymanych metodą kwantyli, [w:] Zieliński Z. E. Rola informatyki w naukach ekonomicznych i społecznych. Innowacje i implikacje interdyscyplinarne, Wydawnictwo Wyższej Szkoły Handlowej, Kielce, 236–244.

Pekasiewicz D. (2015) Statystyki pozycyjne w procedurach estymacji i ich zastosowania w badaniach ekonomicznych, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź.

ANALYSIS OF CHOSEN ESTIMATION METHODS OF MAXIMUM STATISTIC LIMIT DISTRIBUTION PARAMETERS

Abstract: The limiting distribution of maximum statistic determined on the basis of a random sample is one of the following distributions: Gumbel, Fréchet or Weibull. If we have information about the distribution class of the analyzed variable we use limit theorems about maximum distribution, otherwise we must apply appropriate statistical tests based on the order statistics. We can use different methods to estimate the parameter of maximum distribution, in particular the maximum likelihood method, the method of moments and methods based on quantiles. The paper presents the results of analysis of mean squared errors of Gumbel distribution parameters estimators obtained by the methods of moments, the quantile method and the quantile least squares method with a truncated number of quantiles. Received results allow to draw conclusions on the regarded estimators properties, specifically the efficiency of the chosen estimation methods.

Keywords: maximum statistic, Gumbel distribution, Fréchet distribution, Weibull distribution, maximum likelihood method, method of moments, quantile method