

**PORÓWNANIE ROZWIĄZANIA
UKŁADÓW RÓWNAŃ LINIOWYCH
O PARAMETRACH ROZMYTYCH OPISANYCH WYPUKŁYMI
I SKIEROWANYMI LICZBAMI ROZMYTYMI
NA PRZYKŁADZIE MODELU RÓWNOWAGI CZĘŚCIOWEJ¹**

Dariusz Kacprzak

Katedra Matematyki, Politechnika Białostocka
e-mail: d.kacprzak@pb.edu.pl

Streszczenie: W pracy zaprezentowano model równowagi częściowej dla dwóch dóbr, który prowadzi do układu równań liniowych, w którym parametry reprezentowano za pomocą wypukłych liczb rozmytych (CFN) oraz za pomocą skierowanych liczb rozmytych (OFN). W obu przypadkach układy takie można rozwiązać stosując α -przekroje i arytmetykę przedziałową. Dodatkowo, podano warunki aby rozwiązanie układu istniało.

Słowa kluczowe: układ równań liniowych, wypukłe liczby rozmyte, skierowane liczby rozmyte, model równowagi częściowej

WSTĘP

Otoczająca nas rzeczywistość gospodarcza charakteryzuje się bardzo wysokim stopniem złożoności. Powoduje to trudności z opisaniem jej za pomocą dokładnych, precyzyjnych pojęć i wielkości. Sprawia to, że do opisu zjawisk występujących w rzeczywistości gospodarczej stosuje się pojęcia nieprecyzyjne czy przybliżone, które można matematycznie opisać za pomocą liczb rozmytych.

W obrębie wielu nauk, w tym również ekonomii, modelując określone procesy czy zjawiska często dochodzimy do układów równań liniowych. Istnieje wiele metod rozwiązywania takich układów w sytuacji gdy ich parametry (tzn. współczynniki oraz wyrazy wolne) są opisane za pomocą liczb rzeczywistych. Jednak opisywanie rzeczywistości przy pomocy wartości liczbowych może okazać

¹ Badania zostały zrealizowane w ramach pracy nr S/WI/1/2016 i sfinansowane z środków na naukę MNiSW.

się niewystarczające przy modelowaniu wielu zjawisk. Główne przyczyny tego niedostatku wynikają z faktu, że pomiary, opinie czy też oceny niosą za sobą pewien stopień niepewności i nieprecyzyjności. Powoduje to konieczność zwrócenia się w stronę narzędzi aparatu matematycznego, które pozwalają wykonywać operacje na danych nieprecyzyjnych i niepewnych. Do takich narzędzi można zaliczyć m.in. wypukłe i skierowane liczby rozmyte.

Wykorzystanie wypukłych liczb rozmytych do rozwiązywania układów równań jest dość szeroko opisane w literaturze [Friedman i in. 1998, Muzzioli, Reynaerts 2006, Dymova, Sevastjanov 2009, Zhou, Wei 2014, Behera, Chakraverty 2014]. Można znaleźć również szereg prac o zastosowaniach w badaniach ilościowych wypukłych liczb rozmytych [Vujošević i in. 1996, Schjaer-Jacobsen 2004, Pandit 2013] oraz skierowanych liczb rozmytych [Kacprzak 2010, Kacprzak 2012, Kacprzak 2014, Kacprzak, Kosiński 2014, Sobol i in. 2015]. Brak jest jednak prac łączących model OFN z układami równań liniowych.

Celem pracy jest przedstawienie jednej z metod i warunków rozwiązywania układów równań liniowych o parametrach wyrażonych za pomocą wypukłych i skierowanych liczb rozmytych na przykładzie modelu równowagi częściowej.

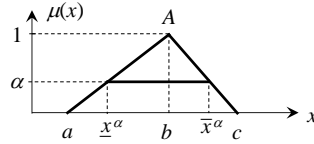
Praca składa się z sześciu części. W drugiej zaprezentowano dwa modele liczb rozmytych: wypukłe oraz skierowane liczby rozmyte. Trzecia część przybliżyła model równowagi częściowej dla dwóch dóbr, a czwarta jedną z metod rozwiązywania układów równań liniowych o parametrach rozmytych. Praca kończy się przykładami liczbowymi oraz podsumowaniem.

LICZBY ROZMYTE

Wypukłą liczbą rozmytą (*Convex Fuzzy Numbers* – CFN) A nazywamy zbiór rozmyty określony na uniwersum liczb rzeczywistych, który jest normalny, wypukły, o ciągłej funkcji przynależności [Kacprzyk 1986].

W praktycznych zastosowaniach liczb rozmytych powszechnie wykorzystuje się liczby trójkątne. Trójkątne liczby rozmyte można jednoznacznie opisać za pomocą trzech liczb rzeczywistych a , b i c ($a, b, c \in \mathbb{R}$ i $a < b < c$) tzn. zapisuje się je w postaci $A = (a, b, c)$ o funkcji przynależności postaci (rysunek 1):

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & \text{gdy } a \leq x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b} & \text{gdy } b \leq x \leq c \end{cases} \quad (1)$$

Rysunek 1. Trójkątna liczba rozmyta $A = (a, b, c)$ oraz α -przekrój

Źródło: opracowanie własne

Alternatywnym sposobem opisu trójkątnej liczby rozmytej jest zastosowanie α -przekrojów i twierdzenia o dekompozycji. Zgodnie z tym twierdzeniem dowolny zbiór rozmyty można przedstawić w postaci sumy jego α -przekrojów.

α -przekrojem zbioru rozmytego A , oznaczonego przez A^α , nazywamy ostry zbiór $A^\alpha = \{x \in X: \mu_A(x) \geq \alpha\}$, dla każdego $\alpha \in (0, 1]$. Granice α -przekroju wyznaczamy z równań (rysunek 1):

$$\alpha = \frac{x^\alpha - a}{b - a} \quad \text{oraz} \quad \alpha = \frac{c - \bar{x}^\alpha}{c - b} \quad (2)$$

i otrzymujemy przedział:

$$A^\alpha = [\underline{a}^\alpha, \bar{a}^\alpha] = [a + \alpha(b - a), c - \alpha(c - b)]. \quad (3)$$

Twierdzenie 1. [Kacprzyk 2001] Każdy zbiór rozmyty A można przedstawić w postaci $A = \bigcup_{\alpha \in [0, 1]} \alpha A^\alpha$, gdzie αA^α oznacza zbiór rozmyty, którego elementom przypisano następujące stopnie przynależności:

$$\mu_{\alpha A^\alpha}(x) = \begin{cases} \alpha & \text{dla } x \in A^\alpha \\ 0 & \text{dla } x \notin A^\alpha \end{cases} \quad (4)$$

Korzystając z α -przekrojów oraz twierdzenia 1, dowolną trójkątną liczbę rozmytą możemy zapisać jako parę funkcji postaci:

$$A = (\underline{A}(\alpha), \bar{A}(\alpha)) = (a + \alpha(b - a), c - \alpha(c - b)), \alpha \in [0, 1], \quad (5)$$

które spełniają warunki [Congxin, Zhang 1999]: $\underline{A}(\alpha)$ jest ograniczoną, lewostronnie ciągłą i niemalejącą funkcją określoną na przedziale $[0, 1]$, $\bar{A}(\alpha)$ jest ograniczoną, lewostronnie ciągłą i nierosnącą funkcją określoną na przedziale $[0, 1]$ oraz $\underline{A}(\alpha) \leq \bar{A}(\alpha)$, $\alpha \in [0, 1]$.

Jedną z metod wykonywania działań arytmetycznych na trójkątnych liczbach rozmytych jest wykorzystanie α -przekrojów i arytmetyki przedziałowej. Niech $A^\alpha = [\underline{a}^\alpha, \bar{a}^\alpha]$ i $B^\alpha = [\underline{b}^\alpha, \bar{b}^\alpha]$ będą α -przekrojami trójkątnych liczb rozmytych A i B . Wówczas działanie $\odot \in \{+, -, \cdot, /\}$ ma postać $(A \odot B)^\alpha = [a, b]$ [Moore 1966], gdzie: $a = \min\{\underline{a}^\alpha \odot \underline{b}^\alpha, \underline{a}^\alpha \odot \bar{b}^\alpha, \bar{a}^\alpha \odot \underline{b}^\alpha, \bar{a}^\alpha \odot \bar{b}^\alpha\}$, $b = \max\{\underline{a}^\alpha \odot \underline{b}^\alpha, \underline{a}^\alpha \odot \bar{b}^\alpha, \bar{a}^\alpha \odot \underline{b}^\alpha, \bar{a}^\alpha \odot \bar{b}^\alpha\}$, dla A/B gdy $0 \notin B^\alpha$.

Alternatywnym do modelu CFN modelem liczb rozmytych jest model skierowanych liczb rozmytych (*Ordered Fuzzy Numbers* – OFN) zaprezentowany

w 2002 roku i rozwijany przez prof. Kosińskiego, Prokopowicza i Ślęzaka w serii prac [Kosiński i in. 2002, Kosiński i in. 2003, Kosiński, Prokopowicz 2004, Kosiński 2006].

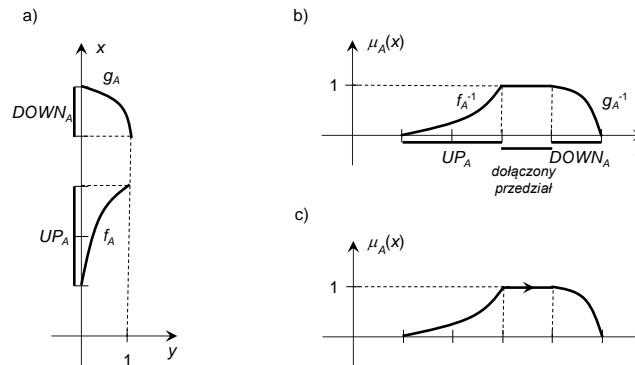
Skierowaną liczbą rozmytą A nazywamy uporządkowaną parę (f_A, g_A) funkcji ciągłych, takich że $f_A, g_A: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ (rysunek 2a). Definicja ta nie wymaga, aby funkcje f_A i g_A były odwracalne, a jedynie ciągłe. Jednak jeżeli dodatkowo założymy, że funkcja f_A jest rosnąca a funkcja g_A jest malejąca oraz że $f_A(y) \leq g_A(y)$ dla $\forall y \in [0,1]$ [Kosiński 2006], możemy określić funkcję przynależności μ_A skierowanej liczby rozmytej A (rysunek 2b):

$$\mu_A(x) = \begin{cases} f_A^{-1}(x) & \text{gdy } x \in [f_A(0), f_A(1)] \\ 1 & \text{gdy } x \in [f_A(1), g_A(1)] \\ g_A^{-1}(x) & \text{gdy } x \in [g_A(1), g_A(0)] \end{cases} \quad (6)$$

Rysunek 2. a) OFN A ,

b) OFN A przedstawiona w sposób nawiązujący do CFN,

c) Strzałka przedstawiająca porządek odwróconych funkcji i orientację OFN A



Źródło: [Kosiński, Prokopowicz 2004]

Rysunek 2c pokazuje skierowaną liczbę rozmytą A wyposażoną w strzałkę – skierowanie – która obrazuje porządek odwróconych funkcji f_A i g_A . Pozwala ono podzielić zbiór skierowanych liczb rozmytych na dwa podzbiory: OFN o skierowaniu dodatnim, jeżeli skierowanie jest zgodne z osią ox (rysunek 2c) oraz OFN o skierowaniu ujemnym, jeżeli skierowanie jest przeciwne niż oś ox .

Działania arytmetyczne na skierowanych liczbach rozmytych są określone następująco. Niech $A = (f_A, g_A)$, $B = (f_B, g_B)$ i $C = (f_C, g_C)$ będą OFN wówczas działanie $C = A \odot B$ ma postać:

$$\forall y \in [0,1] [f_C(y) = f_A(y) \odot f_B(y) \text{ i } g_C(y) = g_A(y) \odot g_B(y)], \quad (7)$$

gdzie $\odot \in \{+, -, \cdot, /, \}$, A/B jest określone gdy $\forall y \in [0,1] |f_B(y)| > 0, |g_B(y)| > 0$. Jeżeli funkcje f_A i g_A skierowanej liczby rozmytej A są liniowe i $f_A(1) = g_A(1)$, wówczas mówimy o trójkątnych skierowanych liczbach rozmytych. Uwzględniając

postać (5) trójkątnej liczby rozmytej w modelu CFN, w modelu OFN tą liczbę możemy zapisać na dwa sposoby, uwzględniając skierowanie:

$$A = (f_A(\alpha), g_A(\alpha)), \alpha \in [0,1] \quad \text{lub} \quad A = (g_A(\alpha), f_A(\alpha)), \alpha \in [0,1]. \quad (8)$$

MODEL RÓWNOWAGI CZĘŚCIOWEJ DLA DWÓCH DÓBR

Rozważmy model izolowanego rynku, w którym występują tylko dwa powiązane ze sobą dobra. Dla uproszczenia założymy, że funkcje popytu i podaży obu dóbr są liniowe i zależą jedynie od cen obu dóbr. Matematycznie model ten możemy zapisać w postaci [Chaing 1994]:

$$Q_{d1} = a_0 + a_1P_1 + a_2P_2, \quad Q_{s1} = b_0 + b_1P_1 + b_2P_2, \quad Q_{d1} = Q_{s1}, \quad (9)$$

$$Q_{d2} = c_0 + c_1P_1 + c_2P_2, \quad Q_{s2} = d_0 + d_1P_1 + d_2P_2, \quad Q_{d2} = Q_{s2}, \quad (10)$$

gdzie Q_{di} i Q_{si} oznaczają odpowiednio popyt i podaż na dobro i ($i = 1, 2$), P_i jest ceną dobra i , natomiast a_i, b_i, c_i, d_i są parametrami modelu. Rynek znajduje się w równowadze, kiedy spełniony jest układ równań (9)-(10), czyli zachodzi:

$$\begin{cases} a_0 + a_1P_1 + a_2P_2 = b_0 + b_1P_1 + b_2P_2 \\ c_0 + c_1P_1 + c_2P_2 = d_0 + d_1P_1 + d_2P_2 \end{cases} \quad (11)$$

Korzystając z rachunku macierzowego, układ (11) możemy zapisać w postaci:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ d_1 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_0 \\ d_0 \end{pmatrix} \quad (12)$$

lub skróconej:

$$A_1P + B_1 = A_2P + B_2. \quad (13)$$

Jeżeli parametry a_i, b_i, c_i, d_i modelu (9)-(10) są liczbami rzeczywistymi, układ (12) możemy zapisać w następującej formie:

$$\begin{pmatrix} a_1 - b_1 & a_2 - b_2 \\ c_1 - d_1 & c_2 - d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 - a_0 \\ d_0 - c_0 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Po rozwiązaniu układu (14), otrzymujemy ceny równowagi postaci:

$$\overline{P}_1 = \frac{(b_0 - a_0)(c_2 - d_2) - (a_2 - b_2)(d_0 - c_0)}{(a_1 - b_1)(c_2 - d_2) - (a_2 - b_2)(c_1 - d_1)}, \quad \overline{P}_2 = \frac{(b_0 - a_0)(c_1 - d_1) - (a_1 - b_1)(d_0 - c_0)}{(a_1 - b_1)(c_2 - d_2) - (a_2 - b_2)(c_1 - d_1)}. \quad (15)$$

Rozważmy teraz sytuację, że parametry a_i, b_i, c_i, d_i modelu (9)-(10) (czyli elementy macierzy A_1, A_2, B_1 i B_2 we wzorze (13)) są trójkątnymi liczbami rozmytymi postaci (5). Do rozwiązania układu (13) wykorzystamy twierdzenie 2.

Twierdzenie 2. [Muzzioli, Reynaerts 2006] Układy równań liniowych $AX = B$ i $A_1X + B_1 = A_2X + B_2$, gdzie elementy macierzy A_1, A_2, B_1 i B_2 są trójkątnymi liczbami rozmytymi, macierze A i $A_1 - A_2$ są nieosobliwe oraz $A = A_1 - A_2$ i $B = B_2 - B_1$, mają taki sam wektor rozwiązań.

Z twierdzenia 2 wynika, że możemy uwagę skupić na rozwiązaniu układu równań postaci $AX = B$, gdzie elementy macierzy A i B są trójkątnymi liczbami rozmytymi, wykorzystując α -przekroje.

W sytuacji gdy parametry a_i, b_i, c_i, d_i modelu równowagi (9)-(10) są reprezentowane za pomocą trójkątnych skierowanych liczb rozmytych postaci (8), układ (13) możemy rozwiązać za pomocą α -przekrojów lub wykorzystując własności działań arytmetycznych w modelu OFN skorzystać ze wzorów (15).

ROZWIĄZANIE UKŁADU $AX = B$ O ROZMYTYCH PARAMETRACH

Rozważmy układ równań liniowych postaci:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad (16)$$

gdzie parametry a_{ij}, b_i ($i, j = 1, 2$) są trójkątnymi liczbami rozmytymi postaci (5) lub skierowanymi trójkątnymi liczbami rozmytymi postaci (8). Z twierdzenia 1 dla każdego $\alpha \in [0, 1]$ układ (16) zapisujemy w postaci układu o elementach przedziałowych (α -przekrojach):

$$\begin{cases} [\underline{a}_{11}^\alpha, \bar{a}_{11}^\alpha][\underline{x}_1^\alpha, \bar{x}_1^\alpha] + [\underline{a}_{12}^\alpha, \bar{a}_{12}^\alpha][\underline{x}_2^\alpha, \bar{x}_2^\alpha] = [\underline{b}_1^\alpha, \bar{b}_1^\alpha] \\ [\underline{a}_{21}^\alpha, \bar{a}_{21}^\alpha][\underline{x}_1^\alpha, \bar{x}_1^\alpha] + [\underline{a}_{22}^\alpha, \bar{a}_{22}^\alpha][\underline{x}_2^\alpha, \bar{x}_2^\alpha] = [\underline{b}_2^\alpha, \bar{b}_2^\alpha] \end{cases} \quad (17)$$

W celu uproszczenia prezentacji metody rozwiązania układu, załóżmy że $[\underline{a}_{ij}^\alpha, \bar{a}_{ij}^\alpha] \subset \mathbb{R}_+$, $[\underline{x}_j^\alpha, \bar{x}_j^\alpha] \subset \mathbb{R}_+$ i $[\underline{b}_j^\alpha, \bar{b}_j^\alpha] \subset \mathbb{R}_+$ ($[\underline{a}, \bar{a}] \subset \mathbb{R}_+$ tzn. $\underline{a}, \bar{a} \in \mathbb{R}_+$). Korzystając z arytmetyki przedziałowej, układ (17) możemy zapisać w postaci układu o parametrach rzeczywistych:

$$\begin{cases} \underline{a}_{11}^\alpha \underline{x}_1^\alpha + \underline{a}_{12}^\alpha \underline{x}_2^\alpha = \underline{b}_1^\alpha \\ \bar{a}_{11}^\alpha \bar{x}_1^\alpha + \bar{a}_{12}^\alpha \bar{x}_2^\alpha = \bar{b}_1^\alpha \\ \underline{a}_{21}^\alpha \underline{x}_1^\alpha + \underline{a}_{22}^\alpha \underline{x}_2^\alpha = \underline{b}_2^\alpha \\ \bar{a}_{21}^\alpha \bar{x}_1^\alpha + \bar{a}_{22}^\alpha \bar{x}_2^\alpha = \bar{b}_2^\alpha \end{cases} \quad (18)$$

który z kolei możemy podzielić na dwa podukłady:

$$\begin{cases} \underline{a}_{11}^\alpha \underline{x}_1^\alpha + \underline{a}_{12}^\alpha \underline{x}_2^\alpha = \underline{b}_1^\alpha \\ \underline{a}_{21}^\alpha \underline{x}_1^\alpha + \underline{a}_{22}^\alpha \underline{x}_2^\alpha = \underline{b}_2^\alpha \end{cases} \quad \text{i} \quad \begin{cases} \bar{a}_{11}^\alpha \bar{x}_1^\alpha + \bar{a}_{12}^\alpha \bar{x}_2^\alpha = \bar{b}_1^\alpha \\ \bar{a}_{21}^\alpha \bar{x}_1^\alpha + \bar{a}_{22}^\alpha \bar{x}_2^\alpha = \bar{b}_2^\alpha \end{cases} \quad (19)$$

Podukłady (19) możemy zapisać w notacji macierzowej następująco:

$$\underline{A}^\alpha \underline{x}^\alpha = \underline{B}^\alpha \quad \text{i} \quad \bar{A}^\alpha \bar{x}^\alpha = \bar{B}^\alpha, \quad (20)$$

gdzie $\underline{A}^\alpha, \bar{A}^\alpha$ są macierzami głównymi, a \underline{B}^α i \bar{B}^α są kolumnami wyrazów wolnych odpowiednich podukładów (19). Rozwiązania podukładów wyznaczają odpowiednio granice dolne \underline{x}_i^α i górne \bar{x}_i^α ($i = 1, 2$) rozwiązania układu (16).

Jeżeli parametry a_{ij} , b_i ($i, j = 1, 2$) układu (16) są opisane trójkątnymi liczbami rozmytymi postaci (5), wówczas Friedman i in. (1996) rozróżniają dwa rodzaje rozwiązań: rozwiązanie mocne (*strong fuzzy solution*) jeżeli dla każdego i , $x_i = (\underline{x}_i(\alpha), \bar{x}_i(\alpha))$, $\alpha \in [0, 1]$ jest wypukłą liczbą rozmytą postaci (5) oraz rozwiązanie słabe (*weak fuzzy solution*) w przeciwnym przypadku. Rozwiązanie układu (16) będzie rozwiązaniem mocnym, jeżeli macierze we wzorze (20) spełniają warunek $(\underline{A}^\alpha)^{-1} \underline{B}^\alpha \leq (\bar{A}^\alpha)^{-1} \bar{B}^\alpha$, dla każdego $\alpha \in [0, 1]$. W przeciwnym przypadku otrzymujemy rozwiązanie słabe. Z kolei, jeżeli w układzie (16) parametry a_{ij} , b_i ($i, j = 1, 2$) są reprezentowane za pomocą skierowanych liczb rozmytych (8), rozwiązanie jest zawsze rozwiązaniem mocnym.

PRZYKŁADY LICZBOWE

W tej części rozważymy przykłady liczbowe modelu równowagi częściowej (9)-(10), w których parametry modelu będą reprezentowane za pomocą: liczb rzeczywistych, trójkątnych CFN postaci (5), trójkątnych OFN postaci (8).

Model równowagi częściowej o parametrach rzeczywistych

Założmy, że funkcje popytu i podaży o parametry rzeczywistych mają postać:

$$Q_{d1} = 26 - 4P_1 + P_2, \quad Q_{s1} = -2 + 2P_1, \quad (21)$$

$$Q_{d2} = 30 + P_1 - 3P_2, \quad Q_{s2} = -4 + 2P_2. \quad (22)$$

Uwzględniając wzory (15) dla modelu (21)-(22) równowagę osiągamy przy następujących cenach równowagi: $\bar{P}_1 = 6$ i $\bar{P}_2 = 8$, a odpowiadające im wartości równowagi wynoszą odpowiednio: $\bar{Q}_1 = 10$ i $\bar{Q}_2 = 12$.

Model równowagi częściowej o parametrach opisanych trójkątnymi CFN

Założmy teraz, że w modelu (21)-(22) parametry funkcji popytu i podaży są opisane za pomocą trójkątnych liczb rozmytych, tzn. mają postać:

$$Q_{d1} = \tilde{26} - \tilde{4}P_1 + \tilde{1}P_2, \quad Q_{s1} = -\tilde{2} + \tilde{2}P_1, \quad (23)$$

$$Q_{d2} = \tilde{30} + \tilde{1}P_1 - \tilde{3}P_2, \quad Q_{s2} = -\tilde{4} + \tilde{2}P_2. \quad (24)$$

Z warunków równowagi otrzymujemy następujący układ:

$$\begin{cases} -\tilde{2} + \tilde{2}P_1 = \tilde{26} - \tilde{4}P_1 + \tilde{1}P_2 \\ -\tilde{4} + \tilde{2}P_2 = \tilde{30} + \tilde{1}P_1 - \tilde{3}P_2 \end{cases} \quad (25)$$

o postaci macierzowej:

$$\begin{pmatrix} \tilde{2} & 0 \\ 0 & \tilde{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\tilde{2} \\ -\tilde{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\tilde{4} & \tilde{1} \\ \tilde{1} & -\tilde{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{26} \\ \tilde{30} \end{pmatrix} \quad (26)$$

a korzystając z twierdzenia 2 otrzymujemy:

$$\begin{pmatrix} \tilde{2} + \tilde{4} & -\tilde{1} \\ -\tilde{1} & \tilde{2} + \tilde{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{26} + \tilde{2} \\ \tilde{30} + \tilde{4} \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Równanie (27) daje układ równań liniowych o rozmytych parametrach postaci:

$$\begin{cases} (\tilde{2} + \tilde{4})P_1 - \tilde{1}P_2 = \tilde{26} + \tilde{2} \\ -\tilde{1}P_1 + (\tilde{2} + \tilde{3})P_2 = \tilde{30} + \tilde{4} \end{cases} \quad (28)$$

Wykorzystując postać wypukłych liczb rozmytych (5), układ (28) zapisujemy jako:

$$\begin{cases} [(1 + \alpha, 3 - \alpha) + (3 + \alpha, 5 - \alpha)](\underline{P}_1, \overline{P}_1) - (\alpha, 2 - \alpha)(\underline{P}_2, \overline{P}_2) = \\ \quad = (25 + \alpha, 27 - \alpha) + (1 + \alpha, 3 - \alpha) \\ -(\alpha, 2 - \alpha)(\underline{P}_1, \overline{P}_1) + [(1 + \alpha, 3 - \alpha) + (2 + \alpha, 4 - \alpha)](\underline{P}_2, \overline{P}_2) = \\ \quad = (29 + \alpha, 31 - \alpha) + (3 + \alpha, 5 - \alpha) \end{cases} \quad (29)$$

i możemy rozbić na dwa podukłady:

$$\begin{cases} (4 + 2\alpha)\underline{P}_1 - (2 - \alpha)\overline{P}_2 = 26 + 2\alpha \\ -\alpha\underline{P}_1 + (7 - 2\alpha)\overline{P}_2 = 36 - 2\alpha \end{cases} \quad \text{i} \quad \begin{cases} (8 - 2\alpha)\overline{P}_1 - \alpha\underline{P}_2 = 30 - 2\alpha \\ -(2 - \alpha)\overline{P}_1 + (3 + 2\alpha)\underline{P}_2 = 32 + 2\alpha \end{cases} \quad (30)$$

Po rozwiązaniu podukładów (30) otrzymujemy rozmyte ceny równowagi (rysunek 3a):

$$\overline{P}_1 = \left(\frac{2\alpha^2 + 78\alpha - 254}{3\alpha^2 - 4\alpha - 28}, \frac{2\alpha^2 - 86\alpha - 90}{3\alpha^2 - 8\alpha - 24} \right) \quad \text{i} \quad \overline{P}_2 = \left(\frac{2\alpha^2 + 82\alpha - 316}{3\alpha^2 - 8\alpha - 24}, \frac{2\alpha^2 - 90\alpha - 144}{3\alpha^2 - 4\alpha - 28} \right). \quad (31)$$

Ponieważ ceny równowagi (31) nie są liczbami rozmytymi, rozwiązanie w tym przykładzie jest słabe i wygląda następująco [Friedman i in. 1996]:

$$\overline{P}_1 = \left(\frac{2\alpha^2 - 86\alpha - 90}{3\alpha^2 - 8\alpha - 24}, \frac{2\alpha^2 + 78\alpha - 254}{3\alpha^2 - 4\alpha - 28} \right) \quad \text{i} \quad \overline{P}_2 = \left(\frac{2\alpha^2 - 90\alpha - 144}{3\alpha^2 - 4\alpha - 28}, \frac{2\alpha^2 + 82\alpha - 316}{3\alpha^2 - 8\alpha - 24} \right). \quad (32)$$

Model równowagi częściowej o parametrach opisanych trójkątnymi OFN

Założmy teraz, że w modelu (21)-(22) parametry funkcji popytu i podaży są opisane za pomocą trójkątnych skierowanych liczb rozmytych i skierowania wszystkich elementów są dodatnie. Otrzymujemy wówczas układ równań postaci:

$$\begin{cases} [(1 + \alpha, 3 - \alpha) + (3 + \alpha, 5 - \alpha)](\underline{P}_1, \overline{P}_1) - (\alpha, 2 - \alpha)(\underline{P}_2, \overline{P}_2) = \\ \quad = (25 + \alpha, 27 - \alpha) + (1 + \alpha, 3 - \alpha) \\ -(\alpha, 2 - \alpha)(\underline{P}_1, \overline{P}_1) + [(1 + \alpha, 3 - \alpha) + (2 + \alpha, 4 - \alpha)](\underline{P}_2, \overline{P}_2) = \\ \quad = (29 + \alpha, 31 - \alpha) + (3 + \alpha, 5 - \alpha) \end{cases}, \quad (33)$$

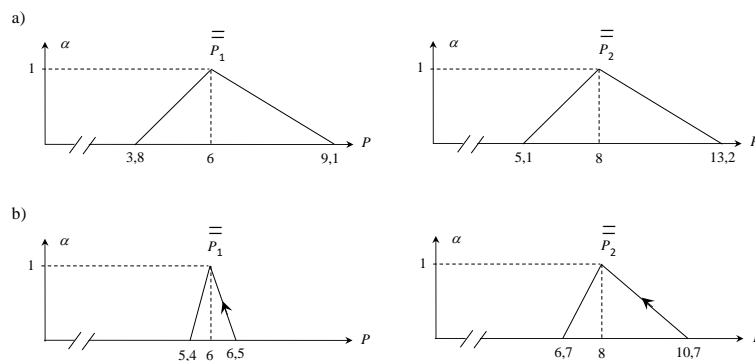
który daje dwa podukłady:

$$\begin{cases} (4 + 2\alpha)\underline{P}_1 - \alpha\underline{P}_2 = 26 + 2\alpha \\ -\alpha\underline{P}_1 + (3 + 2\alpha)\underline{P}_2 = 32 + 2\alpha \end{cases} \quad \text{i} \quad \begin{cases} (8 - 2\alpha)\overline{P}_1 - (2 - \alpha)\overline{P}_2 = 30 - 2\alpha \\ -(2 - \alpha)\overline{P}_1 + (7 - 2\alpha)\overline{P}_2 = 36 - 2\alpha \end{cases}. \quad (34)$$

Ceny równowagi (rysunek 3b) mają wówczas postaci:

$$\overline{P}_1 = \left(\frac{6\alpha^2 + 90\alpha + 78}{3\alpha^2 + 14\alpha + 12}, \frac{6\alpha^2 - 114\alpha + 282}{3\alpha^2 - 26\alpha + 52} \right) \quad \text{i} \quad \overline{P}_2 = \left(\frac{6\alpha^2 + 98\alpha + 128}{3\alpha^2 + 14\alpha + 12}, \frac{6\alpha^2 - 122\alpha + 348}{3\alpha^2 - 26\alpha + 52} \right). \quad (35)$$

Rysunek 3. Ceny równowagi, gdy parametry modelu równowagi są reprezentowane przez:
 a) trójkątne wypukłe liczby rozmyte, b) trójkątne skierowane liczby rozmyte



Źródło: opracowanie własne

Rysunek 3 prezentuje rozmyte ceny równowagi modelu równowagi częściowej dla dwóch dóbr, którego parametry opisano za pomocą wypukłych liczb rozmytych (rysunek 3a) oraz za pomocą skierowanych liczb rozmytych (rysunek 3b). Można zauważyć, że stosując model OFN rozmycie (szerokość nośnika) cen równowagi jest mniejsze.

PODSUMOWANIE

W pracy zaprezentowano jedną z metod rozwiązywania liniowych układów równań o parametrach niepewnych czy nieprecyzyjnych. Parametry takie matematycznie możemy opisywać za pomocą m.in. wypukłych liczb rozmytych czy też skierowanych liczb rozmytych. Podano również warunki jakie powinny być spełnione, aby rozwiązanie układu istniało. Liczbowe przykłady obrazujące wspomniane metody zaprezentowano na przykładzie modelu równowagi częściowej dla dwóch dóbr.

Z ekonomicznego punktu widzenia, szczególnie interesujący wydaje się być model skierowanych liczb rozmytych. Liczby te pozwalają na matematyczne modelowanie i przetwarzanie, w sposób analogiczny do arytmetyki liczb rzeczywistych, wielkości nieprecyzyjnych czy niepewnych. Ponadto wykorzystanie skierowania może wzbogacić i pogłębić analizy ekonomiczne, co będzie elementem kolejnych badań.

BIBLIOGRAFIA

- Behera D., Chakraverty S. (2014) Solving fuzzy complex system of linear equations. *Information Sciences*, 277, 154–162.
 Chiang A. C. (1994) *Podstawy Ekonomii Matematycznej*. PWE, Warszawa.

- CongXin W., Zhang B. (1999) Embedding problem of noncompact fuzzy number space E. *Fuzzy Sets and Systems*, 105, 165-169.
- Dymova L., Sevastjanov P. (2009) A new method for solving interval and fuzzy equations: linear case. *Information Sciences*, 179 (7), 925–937.
- Friedman, M., Ming M., Kandel A. (1998) Fuzzy linear systems. *Fuzzy Sets and Systems*, 96, 201-209.
- Kacprzak D. (2010) Skierowane liczby rozmyte w modelowaniu ekonomicznym. *Optimum – Studia Ekonomiczne*, 3, 263-281.
- Kacprzak D. (2012) Przychód i koszt całkowity przedsiębiorstwa wyrażony przy użyciu skierowanych liczb rozmytych. *Journal of Management and Finance*, 2/1.
- Kacprzak D. (2014) Prezentacja cen dóbr konsumpcyjnych oraz dynamiki ich zmian za pomocą skierowanych liczb rozmytych. *Optimum – Studia Ekonomiczne*, 1.
- Kacprzak D., Kosiński W. (2014) Optimizing firm inventory costs as a fuzzy problem. *Studies in Logic, Grammar and Rhetoric*, 37.
- Kacprzyk J. (1986) *Zbiory rozmyte w analizie systemowej*, PWN, Warszawa.
- Kacprzyk J. (2001) *Wieloetapowe sterowanie rozmyte*. Wydawnictwa Naukowo – Techniczne, Warszawa 2001.
- Kosiński W., Prokopowicz P., Ślęzak D. (2002) Fuzzy Numbers with Algebraic Operations: Algorithmic Approach. [in:] Kłopotek M., Wierzchoń S. T., Michalewicz M. (red.), *Proc. IIS'2002, Sopot, June 3–6, Poland, Heidelberg: Physica Verlag*, 311–320.
- Kosiński W., Prokopowicz P., Ślęzak D. (2003) Ordered Fuzzy Numbers. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences Mathematic*, 52 (3), 327-339.
- Kosiński W., Prokopowicz P. (2004) Algebra liczb rozmytych. *Matematyka Stosowana. Matematyka dla Społeczeństwa*, 5 (46), 37-63.
- Kosiński W. (2006) On fuzzy number calculus. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 16, 51-57.
- Moore R. E. (1966) *Interval analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs. N. J.
- Muzzioli S., Reynaerts H. (2006) Fuzzy linear systems of the form $A_1x+b_1=A_2x+b_2$. *Fuzzy Sets and Systems*, 157, 939-951.
- Sobol I., Kacprzak D., Kosiński W. (2015) Optimizing of a company's costs under fuzzy data and optimal orders under dynamic conditions. *Optimum – Studia Ekonomiczne*, 5, 172-187.
- Zadeh L. A. (1965) Fuzzy sets. *Information and Control*, 8 (3), 338–353.
- Zhou J., Wei H. (2014) A GMRES Method for Solving Fuzzy Linear Equations. *International Journal of Fuzzy Systems*, 16 (2).

**COMPARISON OF SOLUTIONS SYSTEMS
OF LINEAR EQUATIONS WITH THE PARAMETERS
DESCRIBED BY CONVEX FUZZY NUMBERS AND
ORDERED FUZZY NUMBERS EXEMPLIFIED
BY THE PARTIAL EQUILIBRIUM MODEL**

Abstract: The paper describes the partial equilibrium model for two goods, leading to a system of linear equations. The system of linear equations with the parameters represented by convex fuzzy numbers (CFN) and ordered fuzzy numbers (OFN) have been considered. In both cases, such systems can be solved by applying α -cuts and interval arithmetic. Additionally, the conditions of existence of solution have been presented.

Keywords: system of linear equations, convex fuzzy numbers, ordered fuzzy numbers, partial equilibrium model