

**Wiesław Łuczyński**

Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu

## **Wpływ filtracji realnych finansowych i koniunkturalnych szeregów czasowych na ich portrety fazowe**

**Streszczenie.** Celem artykułu jest próba oceny wpływu filtracji ekonomicznych szeregów czasowych na portrety fazowe ich składowych trendowych oraz cyklicznych. W zasadzie wszelkie przekształcenia szeregów czasowych związane z ich (szeregów) analizą, prognozowaniem, modelowaniem, sterowaniem itp. można potraktować jako filtrację. Filtry cyfrowe znajdują zastosowanie m.in. w ekonomii do wygładzania szeregów czasowych, usuwania niepożądanych wahań (sezonowych, przypadkowych, wysoko- lub niskoczęstościowych itp.), prognozowania i modelowania procesów ekonomicznych.

Uzyskane wyniki pozwalają na sformułowanie odwrotnej zależności między wykładnikiem Hursta i występowaniem dominujących częstości we wszystkich badanych szeregach: wraz ze wzrostem wykładnika Hursta (lub ze zmniejszaniem się wymiaru fraktalnego) zanika wyraźna struktura harmoniczna. Przeprowadzone symulacje z filtracją szeregów czasowych potwierdzają tezę, że regularność przebiegów cyklicznych cechuje raczej układy antypersystentne, powracające do wartości średnich. W układach wzmacniających trendy (persystentnych) wyraźna regularność występuje rzadko. Portrety fazowe uzyskane w wyniku filtracji Hodricka-Prescotta i Kalmana są najbliższe portretom fazowym cyklu granicznego, charakterystycznego dla układów oscylujących wokół pewnego stanu równowagi. Przeprowadzone badanie wskazuje, że ekonomiczne szeregi czasowe są cyklami nieokresowymi, tzn. nie mają ściśle określonej skali czasowej i długości. Zastosowanie procedury filtracji pozwala wyjawic okresową, regularną naturę ekonomicznych szeregów czasowych. Najbardziej efektywne wydaje się zastosowanie filtra Hodricka-Prescotta i filtra Kalmana.

**Słowa kluczowe:** filtry cyfrowe, filtr Hodricka-Prescotta, filtr Baxtera-Kinga, filtr Butterwortha, filtr Kalmana, wykładnik Hursta, wymiar fraktalny, układ persystentny, układ antypersystentny, portrety fazowe

## Wstęp

W technice i naukach przyrodniczych filtry mają szerokie zastosowanie. Filtry techniczne są wykorzystywane np. do filtracji wody, kawy, oleju, powietrza, gazów. Filtry elektryczne lub elektroniczne są wykorzystywane do zmniejszenia poziomu szumu (Dolby NR<sup>1</sup>), wzmocnienia określonych częstotliwości i in.

Filtr matematyczny  $F$  to operator transformacji (przetwarzania) danego (wejściowego sygnału) szeregu czasowego  $\{y_t\}$  w inny (wyjściowy sygnał) szereg czasowy  $\{z_t\}$ . Transformacja taka nosi nazwę filtracji<sup>2</sup>:

$$\{y_t\} \rightarrow \boxed{F} \rightarrow \{z_t\}. \quad (1)$$

W zasadzie wszelkie przekształcenia szeregów czasowych związane z ich (szeregów) analizą, prognozowaniem, modelowaniem, sterowaniem itp. można potraktować jako filtrację. Filtry cyfrowe znajdują zastosowanie m.in. w ekonomii do wygładzania szeregów czasowych, usuwania niepożądanych wahań (sezonowych, przypadkowych, wysoko- lub niskoczęstotliwościowych itp.), prognozowania i modelowania procesów ekonomicznych.

Szerokie spektrum filtrów można podzielić według rozmaitych kryteriów: celu (analiza i wygładzanie, prognozowanie), działania (dolnoprzepustowe, górnoprzepustowe i wszechprzepustowe, pasmowoprzepustowe i pasmowozaporowe), konstrukcji (liniowe i nielinowe, symetryczne i asymetryczne, rekursywne i nierekursywne, niezmiennie w czasie, adaptacyjne) i in. Do oceny filtrów można zastosować w obszarze czasu funkcję autokorelacji (ACF) lub autokorelacji cząstkowej (PACF). W obszarze częstotliwości natomiast – funkcję transformacji lub funkcję odpowiedzi częstotliwościowej<sup>3</sup>.

### 1. Zastosowane metody badawcze

W niniejszym opracowaniu zostaną wykorzystane następujące filtry: Hodricka-Prescotta, Baxtera-Kinga, Butterwortha oraz Kalmana. Obliczenia wykonano

<sup>1</sup> Dolby Noise Reduction – system redukcji szumów opracowany przez firmę Dolby Laboratories i wykorzystywany w magnetofonach analogowych, zob. [pl.wikipedia.org/wiki/Dolby\\_NR](http://pl.wikipedia.org/wiki/Dolby_NR)

<sup>2</sup> Zob. H. Rinne, K. Specht, *Zeitreihen. Statistische Modellierung, Schätzung und Prognose*, Verlag Franz Vahlen, München 2002, s. 108-122.

<sup>3</sup> Zob. H. Rinne, K. Specht, op. cit, s. 109; T.P. Zieliński, *Cyfrowe przetwarzanie sygnałów. Od teorii do zastosowań*, WKiŁ, Warszawa 2007, s. 276; D. Stranneby, *Cyfrowe przetwarzanie sygnałów. Metody, algorytmy, zastosowania*, Wyd. BTC, Warszawa 2004, s. 132; Z. Wośko, *Czy filtry liniowe są przydatnymi narzędziami badania koniunktury? Analiza spektralna na przykładzie ankietowych wskaźników koniunktury*, s. 4, [www.ae.katowice.pl/images/user/File/katedra\\_ekonomii/...](http://www.ae.katowice.pl/images/user/File/katedra_ekonomii/...) [25.05.2012].

za pomocą programu Gretl oraz (dla filtra Kalmana) programu R CRAN. Do oceny przesunięć w konstrukcji portretów fazowych wykorzystana zostanie funkcja spektralna z wagami okna Bartletta (program Gretl). Dla szeregów oryginalnych oraz przefiltrowanych obliczone zostały wykładniki Hursta (program Gretl).

Celem opracowania jest próba oceny wpływu filtracji ekonomicznych szeregów czasowych na portrety fazowe ich składowych trendowych oraz cyklicznych. Badaniu poddane zostały szeregi czasowe gospodarki niemieckiej (okres –  $T$ , liczba danych –  $N$ , poza WIG, DJA oraz danymi koniunkturalnymi dane przedstawione zostały jako indeksy łańcuchowe: miesiąc do miesiąca roku poprzedniego), wyspecyfikowane w tabeli 1.

Tabela 1. Szeregi czasowe gospodarki niemieckiej poddane badaniu

Lp.	Szereg czasowy	T	N	Symbol
1	WIG (notowania dzienne)	1991-2012	4 867	wig
2	DJA/DJIA (j.w.)	1885-2012	35 060	dja
3	Produkcja stali (dane miesięczne)	1949-2012	758	steel
4	Wydobycie węgla kamiennego (j.w.)	1947-2012	782	coal_ch
5	j.w. – 1947=100	1947-2012	782	coal_f
6	Produkcja cementu (j.w.)	1949-2012	758	cement
7	Produkcja energii elektrycznej (j.w.)	1949-2012	758	electri
8	Bezrobocie ogółem (j.w.)	1949-2012	758	unemploy
9	Zatrudnienie w przemyśle (j.w.)	1949-2012	758	employ
10	Eksport (j.w.)	1949-2012	758	export
11	Import (j.w.)	1949-2012	758	import
12	Produkcja samochodów osobowych (j.w.)	1949-2012	758	cars
13	Produkcja przemysłowa ogółem (j.w.)	1949-2012	758	prod
14	Produkcja dóbr inwestycyjnych (j.w.)	1949-2012	758	inv
15	Produkcja surowców (j.w.)	1949-2012	758	row
16	Produkcja dóbr konsumpcyjnych (j.w.)	1949-2012	758	consum
17	Wolne miejsca pracy (j.w.)	1954-2012	690	vacan
18	Dynamika cen dóbr przemysłowych (j.w.)	1954-2012	690	cen_dyn
19	Obroty przemysłu (nominalnie) (j.w.)	1954-2012	689	turn_n
20	Obroty przemysłu (realnie) (j.w.)	1954-2012	689	turn_r
21	Prognoza produkcji przemysłowej (j.w.)	1969-2012	522	prog_prod
22	Diagnoza produkcji przemysłowej (j.w.)	1969-2012	522	diag_prod
23	Prognoza cen dóbr przemysłowych (j.w.)	1969-2012	522	prog_cen

Źródło: dane uzyskane zostały z miesięcznika Statistisches Bundesamt „Wirtschaft und Statistik“, Ifo-Institut für Wirtschaftsforschung, [www.measuringworth.com](http://www.measuringworth.com) [25.05.2012], [www.indexmundi.com/commodities/?commodity=commodity-price-index&months=240](http://www.indexmundi.com/commodities/?commodity=commodity-price-index&months=240) [25.05.2012] oraz [finance.yahoo.com/q/hp?s=%5E^dji+historical+prices](http://finance.yahoo.com/q/hp?s=%5E^dji+historical+prices) [25.05.2012].

## 2. Filtry cyfrowe – wprowadzenie

Robert J. Hodrick i Edward C. Prescott w roku 1997 w znanym artykule *Postwar U.S. Business Cycles: An Empirical Investigation*<sup>4</sup> wykorzystali filtr Kalmana jako podstawę do skonstruowania własnego filtra Hodricka-Prescotta (HP filter). Zaproponowali oni procedurę dekompozycji szeregu czasowego  $y_t$  (GNP, inflacji, stopy bezrobocia) na wygładzony zmienny trend  $g_t$  (składową wzrostu) oraz składową cykliczną  $c_t$  (stacjonarną resztę):  $y_t = g_t + c_t$ , gdzie nieznaną składową trendu jest równa:  $g_t = 2g_{t-1} - g_{t-2} + \varepsilon_t$ . Wygładzona składowa  $g_t$  wyznaczana jest tak, aby jej suma kwadratów drugiej różnicy z szeregiem  $y_t$  nie była zbyt duża. Zadanie optymalizacyjne zostało sformułowane zatem następująco:

$$\min \left[ \sum_{t=1}^T (y_t - g_t)^2 + \lambda \sum_{t=2}^{T-1} [(g_{t+1} - g_t) - (g_t - g_{t-1})]^2 \right] \quad (2)$$

ze względu na  $\{g_t\}_{t=1}^T$ . Miarą niezgodności  $c_t$  i  $\varepsilon_t$  w funkcji filtra HP jest  $l$ , która w przeprowadzonych obliczeniach wyznaczana była zgodnie ze wzorem<sup>5</sup>  $l = 1600(f/4)^4$ , gdzie  $f$  to częstość próbkowania w okresie jednego roku. Zatem dla danych miesięcznych  $l = 129\,600$ , a dla danych notowań dziennych WIG i DJA przyjęliśmy<sup>6</sup>  $l = 400\,000$ . Filtr HP „przepuszcza” wahania o wyższych od wybranej (związanej z wyborem  $l$ ) częstościach, dlatego zaliczany jest do filtrów górnoprzepustowych. Filtr HP nie jest filtrem „idealnym”<sup>7</sup> i jest krytykowany z uwagi na:

1) wrażliwość na wydłużanie lub skracanie szeregu oraz na przekształcenia zmiennych<sup>8</sup>,

<sup>4</sup> R.J. Hodrick, E.C. Prescott, *Postwar U.S. Business Cycles: An Empirical Investigation*, „Journal of Money, Credit and Banking” 1997, Vol. 29, No. 1 (Feb. 1997, Published by: Ohio State University Press), s. 1-6.

<sup>5</sup> M.O. Ravn, H. Uhlig, *On adjusting the Hodrick-Prescott Filter for the frequency of observation*, „The Review of Economics and Statistics” 2002, Vol. 84, (May, 2002, Published by: University College London), s. 371-376.

<sup>6</sup> Tulasi Gopinath, A.K. Choudhary, *Countercyclical Capital Buffer Guidance for India*, RBI Working Paper Series (DEPR) 12/2012, [rbidocs.rbi.org.in/rdocs/Publications/PDFs/12WPS210612.pdf](http://rbidocs.rbi.org.in/rdocs/Publications/PDFs/12WPS210612.pdf) [25.05.2012].

<sup>7</sup> „Doskonały (idealny) filtr pasmowy [...] jest to filtr, którego funkcja przyrostu przyjmuje wartość 1 dla wszystkich częstotliwości z pożądanego pasma [...], wartość 0 zaś dla wszystkich pozostałych częstotliwości. Aby skonstruować filtr doskonały, przekształcany szereg musi mieć nieskończoną liczbę obserwacji” – Z. Wośko, op. cit, s. 4.

<sup>8</sup> V. Gomez, *The Use of Butterworth Filters for Trend and Cycle Estimation in Economic Time Series*, „Journal of Business and Economic Statistics” 2001, Vol. 19, s. 365-373 (s. 368); R. Kaiser, A. Maraval, *Estimation of the Business Cycle: A Modified Hodrick-Prescott Filter*, „Spanish Economic Review” 1999, Vol. 1, s. 175-206 (s. 175).

2) statystyczną inferencję (po uprzedniej desezonalizacji danych pierwotnych) i generowanie cykli pozornych<sup>9</sup>,

3) nieumiejętne stosowanie filtra HP może generować cykle pozorne także dla szeregów pozbawionych cykliczności<sup>10</sup>,

4) pozorną korelację szeregów poddanych filtracji filtrem HP<sup>11</sup>.

O ile filtr HP eliminuje trendy długofalowe, o tyle filtr Baxtera-Kinga (BK) służy eliminacji trendu deterministycznego lub stochastycznego wraz ze składową cykliczną<sup>12</sup>. Według M. Baxtera i R.G. Kinga<sup>13</sup> efektywna metoda detrendyzacji szeregów czasowych powinna spełniać następujące warunki:

1) filtr powinien wyjawiać składowe cykliczne w pożądanym zakresie częstości bez zakłócania ich charakterystyk,

2) filtr nie powinien powodować przesunięć fazowych (i punktów zwrotnych) badanych szeregów,

3) filtr powinien być możliwie najbardziej zbliżony do filtra „idealnego”,

4) filtr powinien osłabiać składową trendową,

5) uzyskana w procesie filtracji składowa cykliczna nie powinna zależeć od długości filtrowanego szeregu oraz

6) metoda filtracji powinna być operatywna.

Stosownie do ww. postulatów zaproponowali oni cyfrowy filtr pasmowy (liniowy, skończony rzędu  $K$ , z symetrycznymi wagami i dwustronną średnią ruchomą)<sup>14</sup> będący oszacowaniem filtra „idealnego”. Pozwala on wyspecyfikować

<sup>9</sup> R. Kaiser, A. Maraval, op. cit, s. 184.

<sup>10</sup> K.R. Schenk-Hoppe, *Economic Growth and Business Cycles: A Critical Comment on Detrending Time Series*, pp.75-86, „Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics” 2001, Vol. 5, s. 75-86 (s. 83); T. Cogley, J.M. Nason, *Effects of the Hodrick-Prescott filter on trend and difference stationary time series: Implications for business cycle research*, „Journal of Economic Dynamics and Control” 1995, Vol. 19, s. 253-278; A. Guay, P. St-Amant, *Do the Hodrick-Prescott and Baxter-King filters provide of good approximation of business cycles?*, „Working Paper Center for Research on Economic Fluctuations and Employment (CEREFÉ)” 1997, Vol. 53; D.R. Osborn, *Moving average detrending and the analysis of business cycles*, „Oxford Bulletin Of Economics and Statistics” 1995, Vol. 57, s 547-558.

<sup>11</sup> A.C. Harvey, A. Jaeger, *Detrending, stylized facts and the business cycle*, „Journal of Econometrics” 1993, Vol. 8, s. 231-247.

<sup>12</sup> Zob. T. Kufel, *Narzędzia ekonometrii dynamicznej w oprogramowaniu Gretl*, IX Ogólnopolskie Seminarium Naukowe „Dynamiczne modele ekonometryczne” 6-8 września 2005 r., Toruń, Katedra Ekonometrii i Statystyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu, s. 4, [www.dem.umk.pl/DME/2005/34\\_kufel.pdf](http://www.dem.umk.pl/DME/2005/34_kufel.pdf) [25.05.2012].

<sup>13</sup> M. Baxter, R.G. King, *Measuring business cycles. Approximate band-pass filters for economic time series*, „NBER Working Paper Series” 1995, No. 5022, s. 3.

<sup>14</sup> M.Baxter, *Real exchange rates and real interest differentials: Have we missed the business-cycle relationship*, „Journal of Monetary Economics” 1994, Vol. 33, s. 5-37; M. Baxter, R.G. King, *Measuring Business Cycles: Approximate Band-Pass Filters for Economic Time Series*, „NBER Working Papers” 1995, No. 5022; J.H. Stock, M.W. Watson, *Business cycle fluctuations in US macroeconomic time series*, „NBER Working Paper Series” 1998, No. 6528.

z badanego szeregu požądane pasmo (częstotliwości lub okresowości)<sup>15</sup>. W dziedzinie czasu filtr ten przekształca szereg wejściowy  $x_t$  jak średnia ruchoma, generując wyjściowy szereg  $y_t$ :

$$y_t = \sum_{j=-K}^K (a_j B^j x_{t+j}), \quad (3)$$

gdzie  $B$  jest operatorem przesunięcia ( $B^j x_t = x_{t-j}$ ). W dziedzinie częstotściowej filtr jest opisywany transformatą Fouriera (spektrum) szeregu wejściowego i wyjściowego. Wartości  $B^j$  ustalane są w wyniku minimalizacji funkcji strat jako różnicy między filtrem idealnym  $A(\omega)$  i filtrem zastosowanym  $B(\omega)$ :

$$\min(Q) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |A(\omega) - B(\omega)|^2 d\omega, \quad B(0) = 0 \quad (4)$$

i gdzie  $A(\omega)$  to funkcja transferowa filtra „idealnego”,  $B(\omega)$  zaś – filtra zastosowanego<sup>16</sup>. Filtr Baxtera-Kinga podobnie jak inne cyfrowe filtry pasmowe jest krytykowany za to, że nie izoluje wzajemnie cykli szeregów z zintegrowaną składową trendową. Pierwsze różnice są „przepuszczane” przez filtr BK, w wyniku czego spektrum przefiltrowanego szeregu zależy od trendu nieprzefiltrowanego szeregu pierwotnego<sup>17</sup>. Ponadto, gdy spektrum pierwotnego szeregu wykazuje maksimum dla zerowej częstotliwości, filtr BK (podobnie jak i filtr HP) wykazuje istnienie, pozornej w istocie, cykliczności<sup>18</sup>. R.G. King i M. Watson<sup>19</sup> uznali to za „typowy przebieg spektralny stóp wzrostu”. Symetryczność filtra BK wyklucza wyekstrahowanie pasm częstotliwości z początku i z końca pierwotnego szeregu czasowego; jego symetryczność nie gwarantuje też braku przesunięć fazowych w przefiltrowanym szeregu<sup>20</sup>. Filtr BK może, podobnie jak i filtr HP, generować cykle pozorne<sup>21</sup>.

Filtry cyfrowe Butterwortha należą do klasy filtrów cyfrowych o nieskończonej odpowiedzi impulsowej (IIR – *Infinite Impulse Response* – ang.). Do zalet cyfrowych filtrów NOI/IIR zalicza się to, że „układ lub algorytm realizujący filtrację jest [...] prostszy” oraz że w procesie projektowania cyfrowych filtrów

<sup>15</sup> Z. Wośko, op. cit., s. 6.

<sup>16</sup> Por. ibidem, s. 6-7; U. Woitek, *A Note on the Baxter-King Filter*, s. 3, [dspace.gla.ac.uk/bitstream/1905/593/1/9813.pdf](http://dspace.gla.ac.uk/bitstream/1905/593/1/9813.pdf) [25.05.2012].

<sup>17</sup> Zob. Ch.J. Murray, *Cyclical Properties of Baxter-King Filtered Series*, s. 1, [userwww.service.emory.edu/~zliu5/seminars/murray.pdf](http://userwww.service.emory.edu/~zliu5/seminars/murray.pdf) [25.05.2012].

<sup>18</sup> Zob. A. Guay, P. St-Amant, op. cit., s. 16-17.

<sup>19</sup> R.G.King, M.Watson, *Money, Prices, Interest Rates and the Business-Cycle*, „Review of Economics and Statistics” 1996, s. 35-53, [www.princeton.edu/~mwatson/papers/King\\_Watson\\_ReStat\\_1996.pdf](http://www.princeton.edu/~mwatson/papers/King_Watson_ReStat_1996.pdf) [25.05.2012].

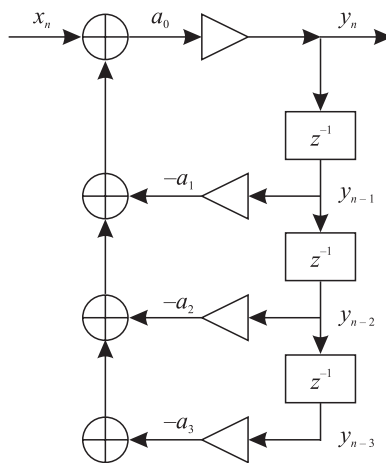
<sup>20</sup> G. Buss, *Asymmetric Baxter-King filter*, „Scientific Journal of Riga Technical University” 2010, Vol. 42, s. 95-99 (s. 95).

<sup>21</sup> U. Woitek, op. cit., s. 3.

NOI/IIR „wykorzystuje się wiedzę o filtrach analogowych”<sup>22</sup>. Natomiast wadą tych filtrów jest to, że w pewnych warunkach odpowiedź impulsowa „może zawierać nieskończoną liczbę próbek”<sup>23</sup> i może być niestabilna. Ponadto projektant cyfrowych filtrów NOI/IIR „zwykle nie ma wpływu na kształt charakterystyki fazowej filtrów NOI”<sup>24</sup>. Schemat blokowy filtra cyfrowego dla rzędu opóźnień  $N = 3$  z linią opóźnienia tylko na wyjściu (blok  $z^{-1}$  oznacza układ opóźniający sygnał wejściowy o jedną obserwację) został przedstawiony na rys. 1. Zaprezentowany układ dyskretny realizuje zależność

$$y(n) = x(n) - \sum_{j=1}^N a_j y(n - j). \quad (5)$$

Filtr Butterwortha jest filtrem dolnoprzepustowym rzędu  $N$ . Najistotniejsze w idealnych filtrach dolnoprzepustowych jest odtworzenie charakterystyki amplitudowej sygnału, bez zwracania większej uwagi na charakterystykę fazową. Filtry te znajdują zastosowanie m.in. do obróbki sygnałów akustycznych. Ludzki narząd słuchu nie odróżnia np. sygnałów różniących się tylko widmem fazowym. Wraz ze wzrostem rzędu charakterystyka amplitudowa filtra Butterwortha zbliża się do charakterystyki amplitudowej idealnego filtra dolnoprzepustowego<sup>25</sup>.



Rys. 1. Schemat blokowy filtra cyfrowego („tylko” NOI/IIR, AR – *Autoregressive* – ang.) dla  $N = 3$  z linią opóźniającą tylko na wyjściu

Źródło: opracowanie własne na podstawie T.P. Zieliński, *Cyfrowe przetwarzanie sygnałów...*, s. 264.

<sup>22</sup> J. Izydorczyk, G. Płonka, G. Tyma, *Teoria sygnałów*, wyd. II, Helion, Gliwice 2006, s. 279.

<sup>23</sup> Ibidem.

<sup>24</sup> Ibidem.

<sup>25</sup> Ibidem, s. 108-110.

Filtr Kalmana<sup>26</sup> (od nazwiska R.E. Kalman) jako rekursywny, liniowy, adaptacyjny (a ponadto dyskretny, zmienny w czasie oraz mający skończoną wymiarowość) miał początkowo zastosowania techniczne i stopniowo został zaadaptowany do ekonometrii i statystyki. Filtr ten fitruje szeregi czasowe (sygnały) na podstawie raczej ich własności statystycznych niż spektralnych. Filtr Kalmana w modelach przestrzeni stanów dla szeregów czasowych pełni rolę analogiczną do metody najmniejszych kwadratów w modelach regresji. Standardowa filtracja z pomocą rekursywnej, adaptacyjnej estymacji zakładanego (nieobserwowalnego) wektora  $\mathbf{x}$  na podstawie obserwacji  $\mathbf{z}$  i zakłóceń pomiarowych  $\mathbf{v}$  sprowadza się do minimalizacji błędu sumy kwadratów związanego z błędem (szumem) estymaty wektora  $\mathbf{x}$ :  $\mathbf{z} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{v}$ , gdzie na wektor  $\mathbf{x}$  składa się  $N$  zmiennych, a na wektor  $\mathbf{z}$  –  $M$  zmiennych. Stąd jakość oszacowania (estymacji) wektora  $\mathbf{x}$  oceniana jest jako  $\min(\hat{v}_1^2 + \hat{v}_2^2 + \dots + \hat{v}_M^2) = \min \sum_{i=1}^M \hat{v}_i^2$ . Sytuacja pomiarowa w przypadku filtra Kalmana jest inna, minimalizowana jest bowiem wartość oczekiwana funkcji jakości estymacji (estymata wariancji):  $\min\{E[(x - \hat{x})^T \cdot (x - \hat{x})]\}$ . Nie jest to jak w przypadku estymacji RLS (*Recursive Least Squares* – ang.) suma kwadratów błędów (szumów) pomiaru. Schemat blokowy na rysunku 2 ilustruje procedurę estymacji filtra Kalmana.

Z matematyczno-formalnego punktu widzenia pomiar z wykorzystaniem filtra Kalmana (estymacja minimalno-średniokwadratowa, MMS, *Minimum Mean Squares* – ang.) istotnie różni się od pomiaru z wykorzystaniem filtra RLS:

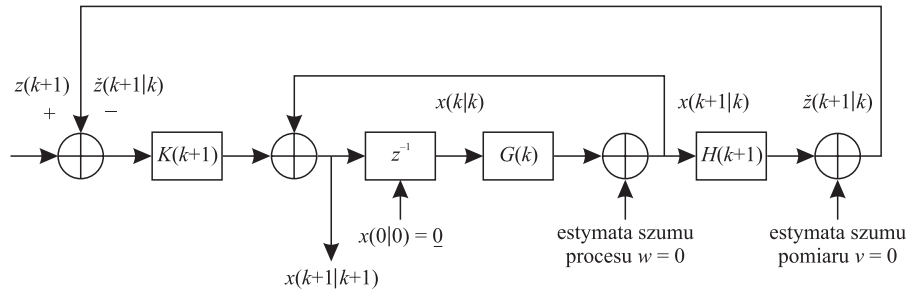
$$\text{RLS: } \begin{cases} x(k+1) = F(k) \cdot x(k) + w(k) \leftarrow \text{model procesu,} \\ z(k+1) = H(k+1) \cdot x(k+1) + v(k+1) \leftarrow \text{model pomiaru.} \end{cases} \quad (6)$$

Pierwsze z dwóch równań opisuje obserwację procesu, drugie zaś – jego pomiar. Algorytm filtra Kalmana można w sposób uproszczony przedstawić w następujących punktach<sup>27</sup>:

<sup>26</sup> Zob. T.P. Ziełiński, op. cit., s.408-419; D. Stranneby, op. cit., s.134-150; R. Kleinbauer, *Kalman Filtering Implementation with Matlab*, Study Report in the Field of Study Geodesy and Geoinformatics at Universität Stuttgart, Helsinki, November 2004, s. 5-17; Ch. Chatfield, *Time-Series Forecasting*, Chapman & Hall/CRC, London, New York 2000, s. 92-93; G.K. Pasricha, *Kalman Filter and its Economic Applications*, University of California, Santa Cruz, [mpra.ub.uni-muenchen.de/22734/1/MPRA\\_paper\\_22734.pdf](http://mpra.ub.uni-muenchen.de/22734/1/MPRA_paper_22734.pdf) [15.10.2006]; A.C. Harvey, *Forecasting, structural time series models and the Kalman filter*, Cambridge University Press, Cambridge 2001, s. 104-112; Ch. Tandon, A. Khursheet, N. Gupta, *Kalman Filter and its Applications*, LAP LAMBERT Academic Publishing, Saarbrücken 2010, s. 10-24; *Kalman Filtering and Neural Networks*, red. S. Haykin, John Wiley & Sons, Toronto 2001, s. 5-20; S. Haykin, *Neural Networks and Learning Machines*, 3rd ed., Pearson Education, New Jersey 2009, s. 732-777; Z. Weng, *An R Package for Continuous Time Autoregressive Models via Kaman Filter*, [cran.r-project.org/web/packages/cts/vignettes/kf.pdf](http://cran.r-project.org/web/packages/cts/vignettes/kf.pdf) [25.05.2012].

<sup>27</sup> Zob. T.P. Ziełiński, op. cit., s. 411.





Rys. 2. Schemat blokowy filtra Kalmana

Źródło: opracowanie własne na podstawie T.P. Zieliński, *Cyfrowe przetwarzanie sygnałów...*, s. 410.

- 1) poprzednia estymata stanu procesu,
- 2) prognoza nowego stanu
- 3) prognoza nowego pomiaru,
- 4) nowy pomiar,
- 5) błąd prognozy pomiaru,
- 6) korekta estymaty stanu,
- 7) powrót do punktu pierwszego.

W przypadku filtra Kalmana (FK), gdy szum ma charakter gaussowski, dowodzi się, że filtr Kalmana jest najlepszym filtrem. Gdy szum jest niegaussowski, FK jest najlepszym filtrem liniowym. Nawet gdy FK jest stały w czasie, szum zaś stacjonarny, FK jest zmienny w czasie (cecha filtrów adaptacyjnych).

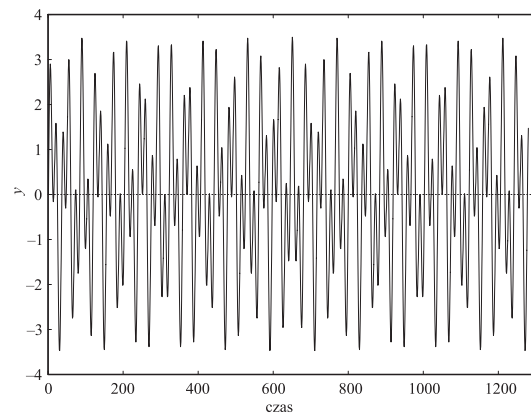
W ekonomii filtry Kalmana znajdują zastosowanie w wygładzaniu i filtrowaniu przebiegów czasowych, prognozowaniu, w modelowaniu nieliniowym, estymacji parametrów modeli ARMA, w uogólnionej metodzie najmniejszych kwadratów (GLS – *generalised least squares method* – ang.) oraz identyfikacji układów liniowych, w sztucznych sieciach neuronowych, w synchronizacji układów chaotycznych<sup>28</sup> i in.

Problemem kluczowym w filtrowaniu ekonomicznych szeregów czasowych jest to, że w większości przypadków nie można, w sposób niebudzący wątpliwości, ustalić typu ich stacjonarności. A to powoduje, że nie można zastosować „poprawnej” a priori metody filtracji. Możliwym, w danej sytuacji, rozwiązaniem wydaje się ocena efektywności filtracji poprzez zastosowanie dużej ilości różnych filtrów i porównanie ich działania.

<sup>28</sup> Zob. S. Puthusserypady, A.P. Kurian, *Variants of Kalman Filter for the Synchronization of Chaotic Systems*, s. 209-224, *Kalman Filter*, red. Vedran Kordić, INTECH, Croatia, May 2010, sciyo.com [25.05.2012].

### 3. Badania empiryczne

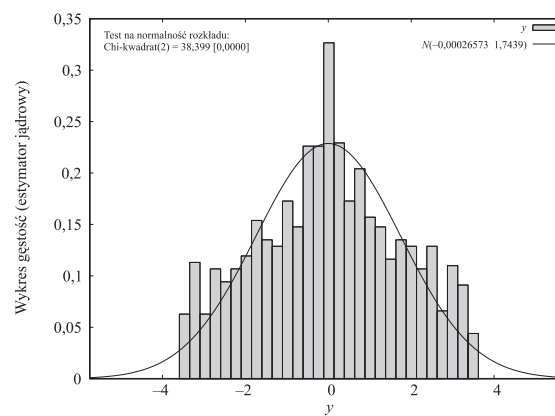
Aby zaprezentować możliwości omówionych wyżej filtrów cyfrowych, filtracji poddany zostanie wygenerowany szereg sumy przebiegów sinusoidalnych:  $y_j = \sin(5\pi j) + 1,75\sin(12\pi j)$ , dla  $j = 1, 2, \dots, 1280$  (rys. 3).



Rys. 3. Szereg testowy sumy przebiegów sinusoidalnych

Źródło: zmienna  $y$  wygenerowana w Gretlu.

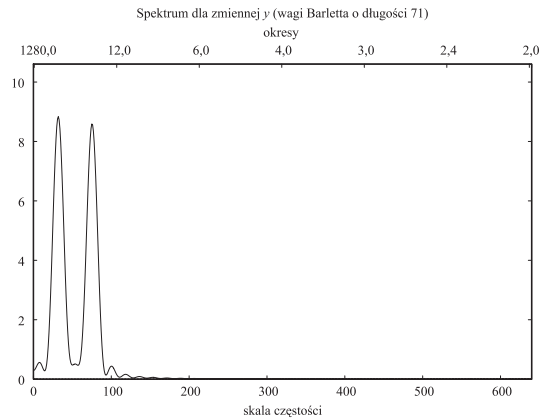
Wygenerowany szereg sumy przebiegów sinusoidalnych nie spełnia kryteriów rozkładu gaussowskiego (wykorzystano test Doornika-Hansena w programie Gretl) – rysunek 4.



Rys. 4. Dopasowany rozkład normalny

Źródło: obliczenia własne.

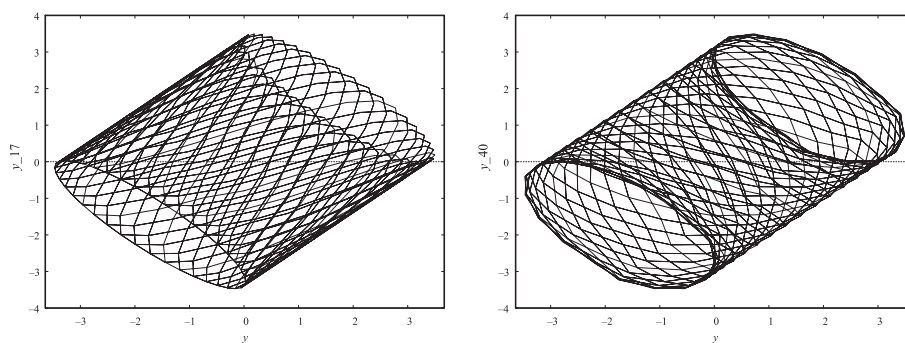
Ponieważ wartość prawdopodobieństwa testowego jest mniejsza od 0,05 (a nawet 0,01), możemy odrzucić hipotezę o normalności rozkładu badanego szeregu. Następnie obliczamy spektrum (z wagami Bartletta o oknach długości 71 obserwacji) wartości funkcji gęstości spektralnej (rys. 5).



Rys. 5. Spektrum dla danych testowych

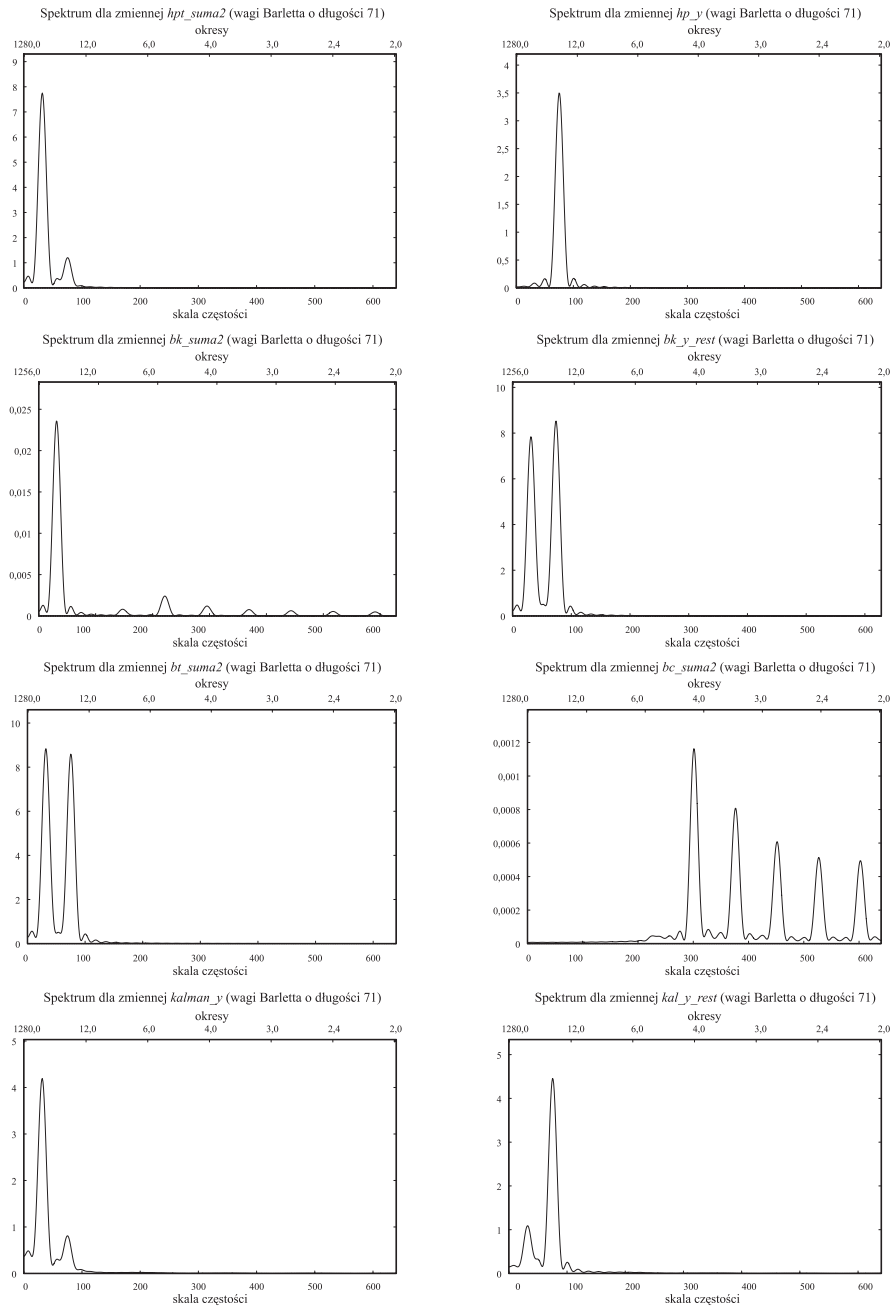
Źródło: opracowanie własne.

Na powyższym wykresie wyraźnie zaznaczyły się dwie „igły” dla okresów odpowiednio 40 i 17 obserwacji, odpowiadające składowym sinusoidalnym wygenerowanego szeregu czasowego (sygnału). Oszacowany wykładnik Hursta (obliczony w programie Gretl) wyniósł  $H = 0,273764$ . Oznacza to, że szereg jest antypersystentny, tj. (jak można było przypuszczać) powracający do wartości średniej. Przyjrzyjmy się następnie portretom fazowym wygenerowanego szeregu (dla opóźnienia o 17 i 40 obserwacji odpowiednio) – rysunek 6.



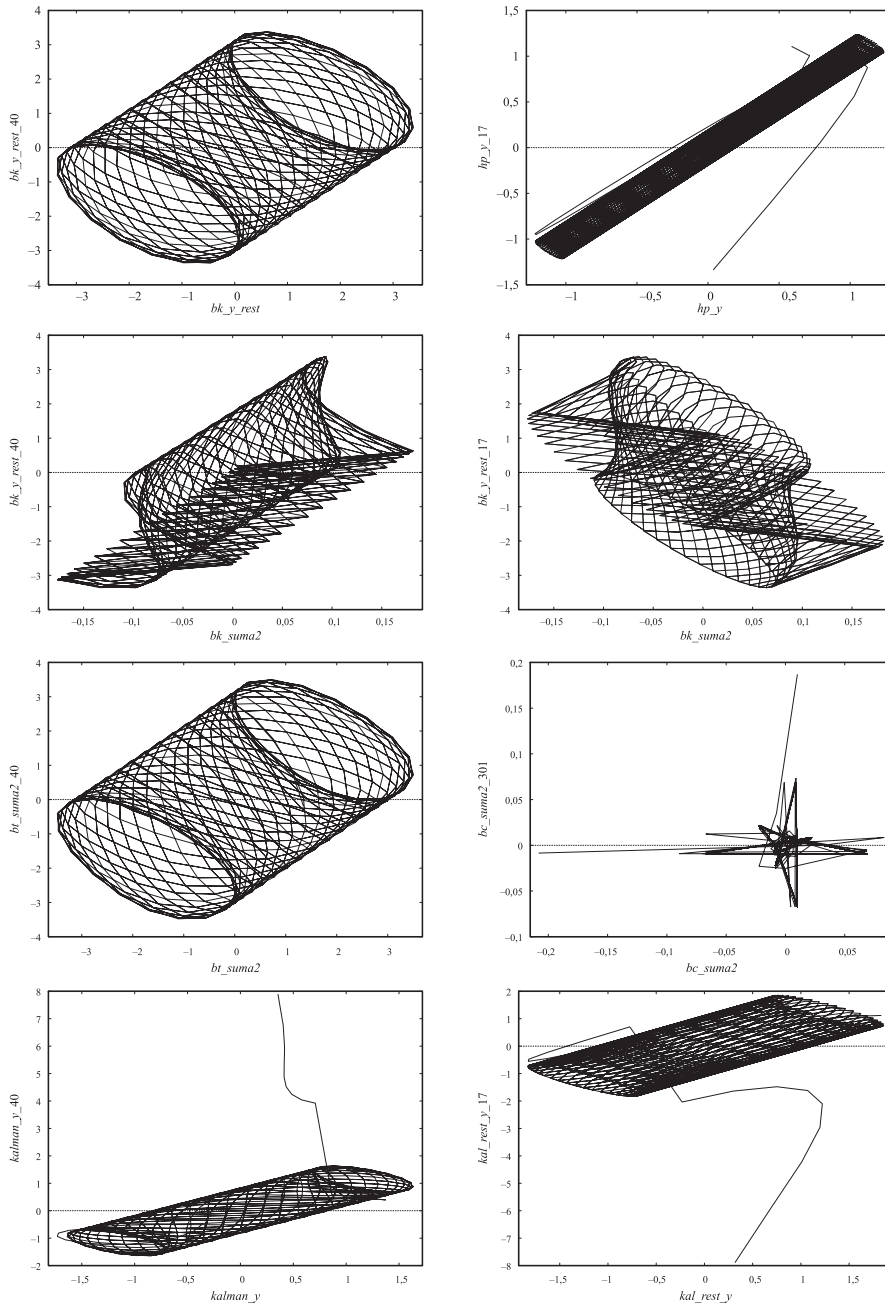
Rys. 6. Portrety fazowe danych testowych opóźnionych o odpowiednio 17 i 40 obserwacji.  
Wartość wykładnika Hursta dla danych oryginalnych  $H = 0,273764$

Źródło: opracowanie własne.



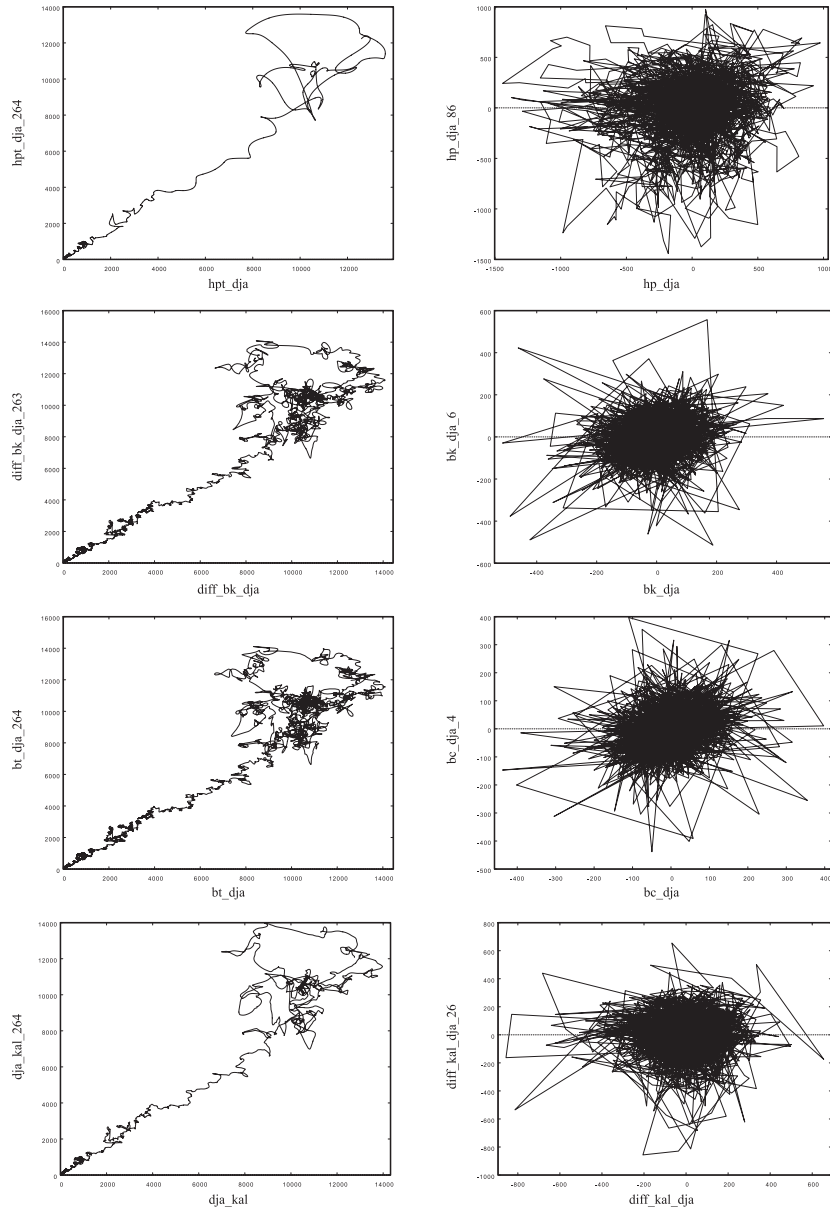
Rys. 7. Spektrum (wagi Barletta) składowych trendowych (lewy wykres) i cyklicznych (prawy wykres) uzyskanych w wyniku filtracji danych testowych filtrami Hodricka-Prescotta, Baxtera-Kinga, Butterwortha i Kalmana

Źródło: opracowanie własne.



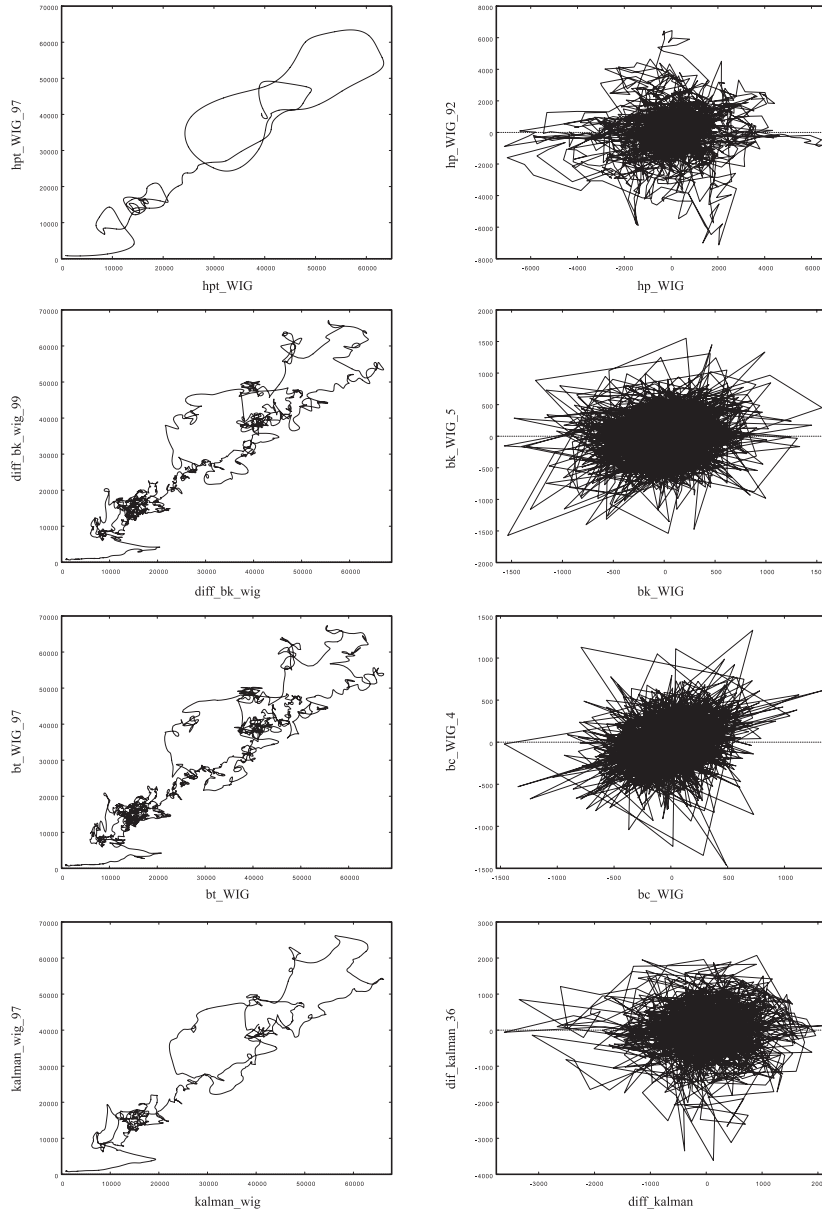
Rys. 8. Portrety fazowe przefiltrowanych danych testowych dla składowych trendowych (lewy wykres) i cyklicznych (prawy wykres) uzyskanych w wyniku filtracji danych testowych filtrami Hodricka-Prescotta, Baxtera-Kinga, Butterwortha i Kalmana

Źródło: opracowanie własne.



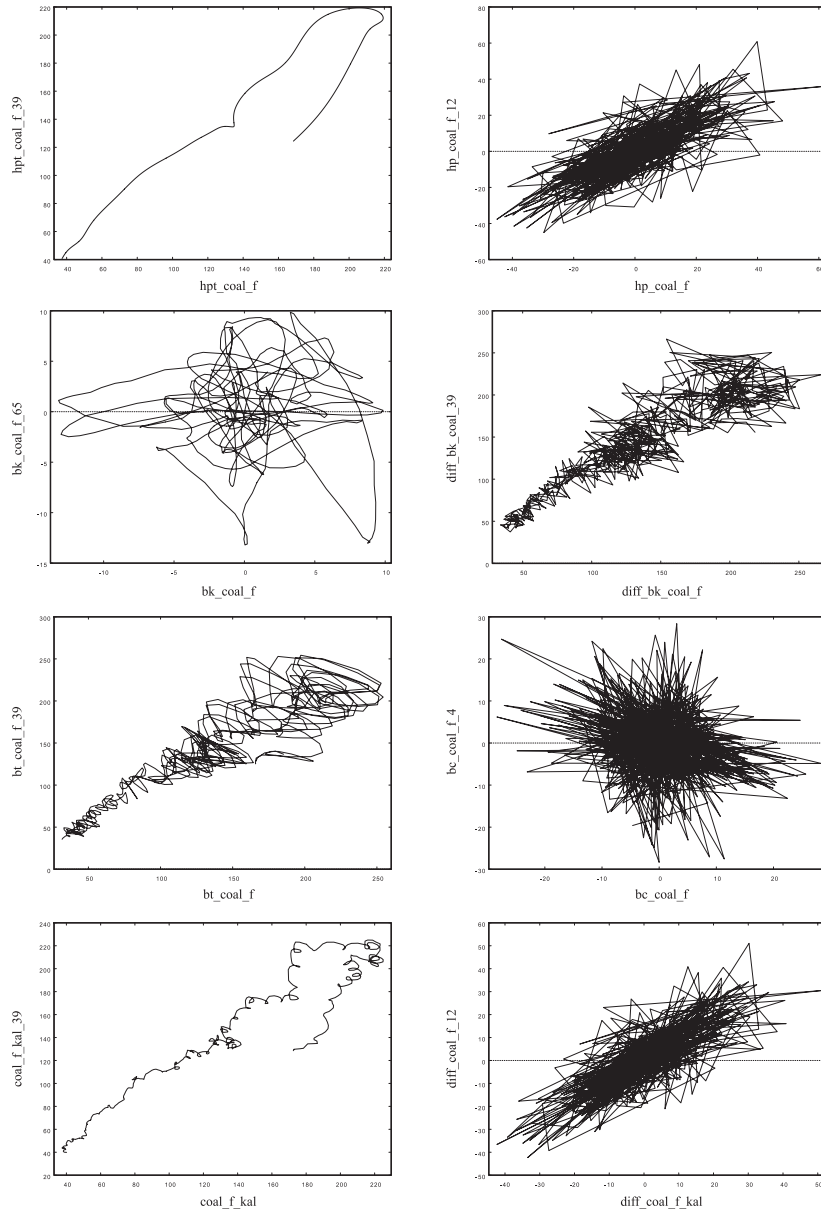
Rys. 9. Portrety fazowe przefiltrowanych indeksów DJIA dla składowych trendowych (lewy wykres) i cyklicznych (prawy wykres) uzyskanych w wyniku filtracji filtrami Hodricka-Prescotta, Baxtera-Kinga, Butterwortha i Kalmana

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 10. Portrety fazowe przefiltrowanych indeksów WIG dla składowych trendowych (lewy wykres) i cyklicznych (prawy wykres) uzyskanych w wyniku filtracji filtrami Hodricka-Prescotta, Baxtera-Kinga, Butterwortha i Kalmana

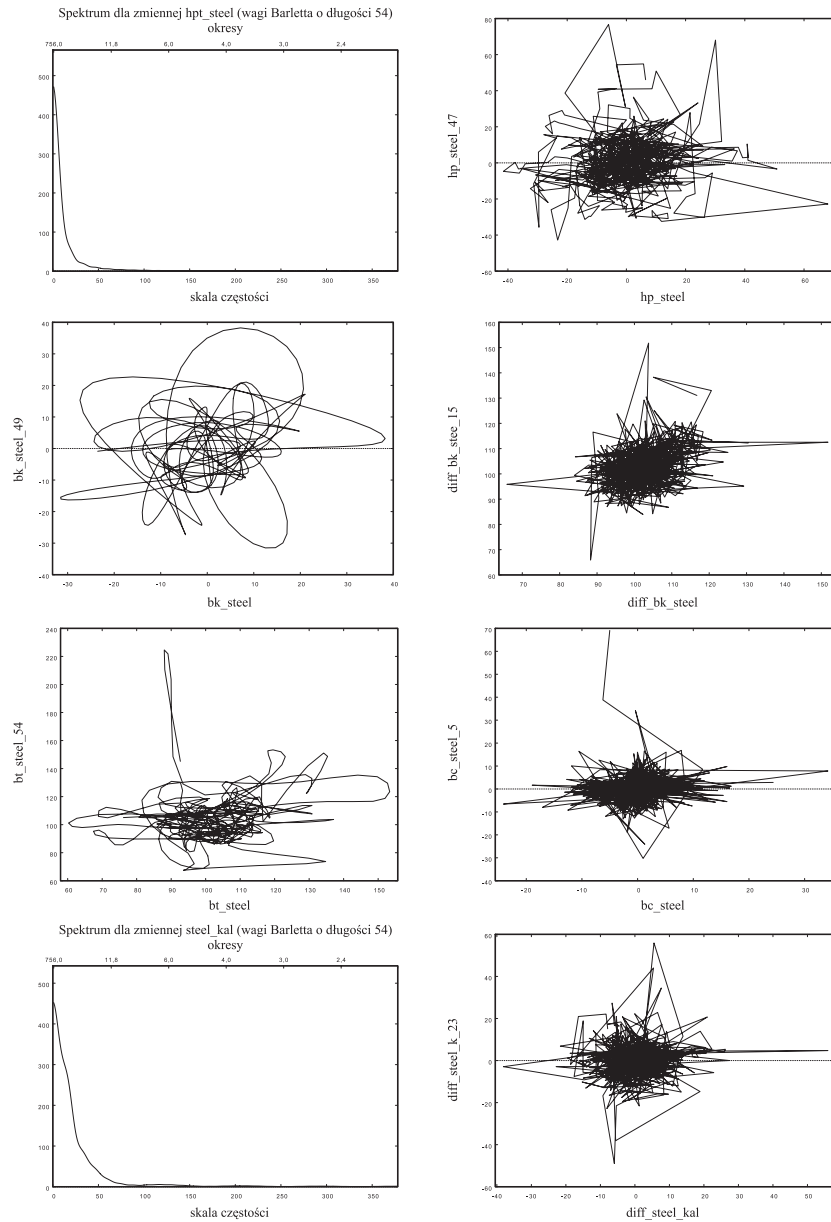
Źródło: opracowanie własne.



Rys. 11. Portrety fazowe przefiltrowanych indeksów miesięcznych (1947 = 100) wydobywania węgla kamiennego w Niemczech dla składowych trendowych (lewy wykres) i cyklicznych (prawy wykres) uzyskanych w wyniku filtracji filtrami Hodricka-Prescotta, Baxtera-Kinga, Butterwortha i Kalmana

Źródło: opracowanie własne.

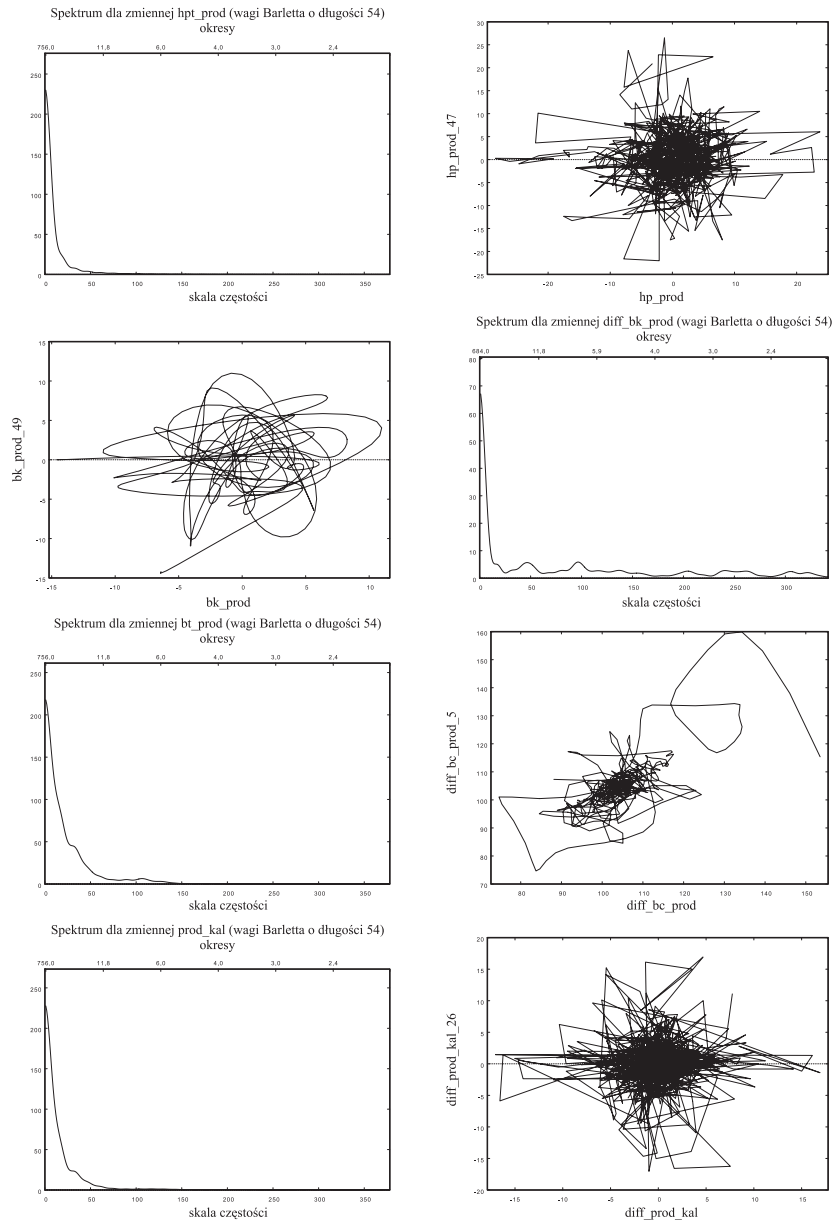




Rys. 12. Portrety fazowe przefiltrowanych łańcuchowych indeksów miesięcznych produkcji stali w Niemczech dla składowych trendowych (lewy wykres) i cyklicznych (prawy wykres) uzyskanych w wyniku filtracji filtrami Hodricka-Prescotta, Baxtera-Kinga, Butterwortha i Kalmana\*

\* Brak portretu fazowego wyniku z gładkiego przebiegu widma.

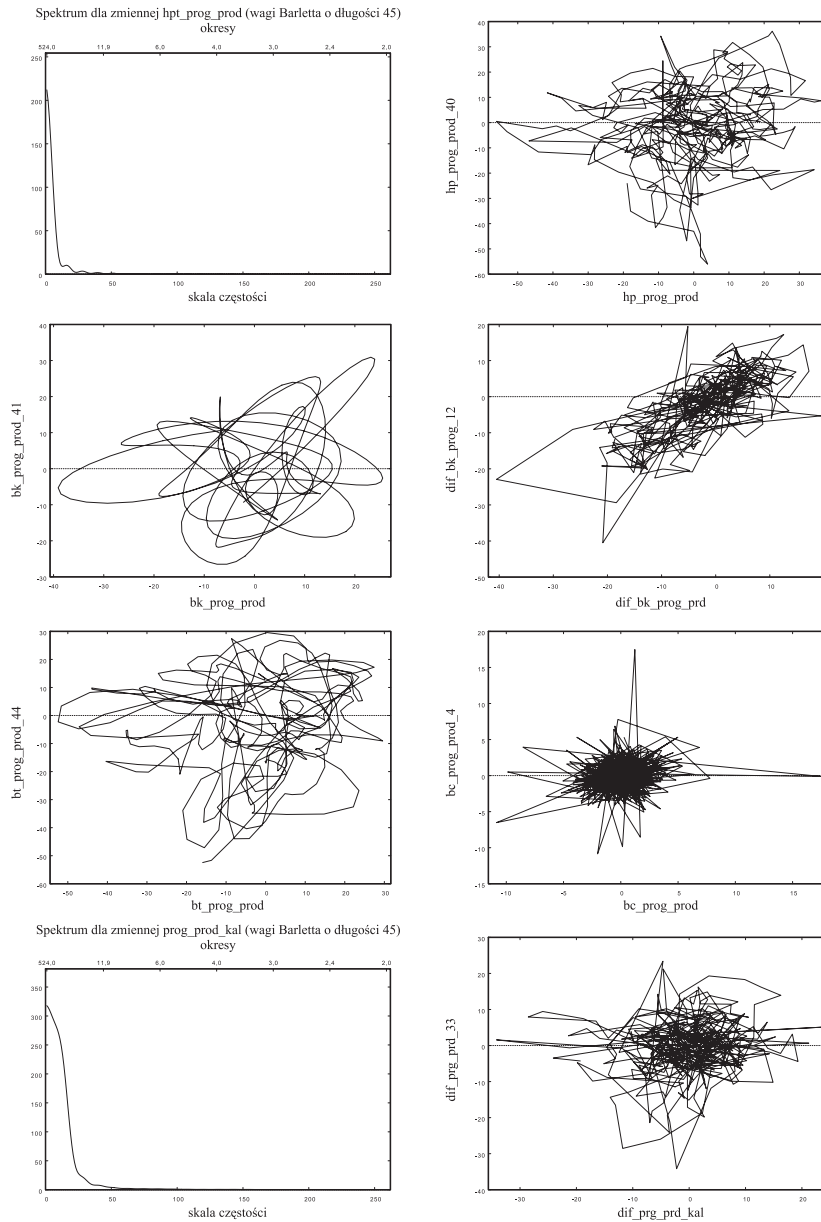
Źródło: opracowanie własne.



Rys. 13. Portrety fazowe przefiltrowanych łańcuchowych indeksów miesięcznych produkcji przemysłowej ogółem w Niemczech dla składowych trendowych (lewy wykres) i cyklicznych (prawy wykres) uzyskanych w wyniku filtracji filtrami Hodricka-Prescotta, Baxtera-Kinga, Butterwortha i Kalmana\*

\* Brak portretu fazowego wyniku z gładkiego przebiegu widma.

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 14. Portrety fazowe przefiltrowanych miesięcznych wskaźników koniunktury ifo-Institut prognozy produkcji przemysłowej Niemiec dla składowych trendowych (lewy wykres) i cyklicznych (prawy wykres) uzyskanych w wyniku filtracji filtrami Hodricka-Prescotta, Baxtera-Kinga, Butterwortha i Kalmana\*

\* Brak portretu fazowego wyniku z gładkiego przebiegu widma.

Źródło: opracowanie własne.

Następnie dane poddano filtracji za pomocą filtrów HP, BK, Butterwortha i Kalmana. Do przefiltrowanych szeregów dopasowano rozkład normalny, obliczono spektrum oraz wykładnik Hursta. W końcu uzyskano ich portrety fazowe.

Analiza spektralna przefiltrowanych szeregów wykazała dla składowych trendowych cykle o okresach 40 i (jedynie w przypadku filtra Butterwortha) 17 obserwacji. W przypadku składowych cyklicznych spektrum wyraźnie przesunęła się w kierunku wyższych częstotliwości (o okresie 17 obserwacji). Filtr Kalmana i w większym jeszcze stopniu filtr HP tłumią częstotliwości składowe (wysokie dla filtracji trendowej i niskie dla filtracji składowej cyklicznej). Spektrum składnika resztowego filtracji Baxtera-Kinga wykazuje obie składowe szeregi testowego, natomiast filtr górnoprzepustowy Butterwortha generuje cykle pozorne: spektrum wykazuje nie istniejące składowe.

Uzyskane portrety fazowe (rys. 8) ilustrują zmiany dominującej częstotliwości wahań w wyniku filtracji. W sytuacji, gdy filtracja, jak np. w przypadku filtra górnoprzepustowego Butterwortha generuje cykle pozorne, portret fazowy ma cechy dziwnego atraktora.

Tabela 2 zawiera wartości wykładników Hursta dla przefiltrowanych danych testowych. Zgodnie z oczekiwaniami przefiltrowane szeregi to szeregi powracające do wartości średniej i niewzmacniające trendów.

Tabela 2. Wykładniki Hursta dla przefiltrowanych danych testowych

Filtr	Składowa trendowa	Składowa cykliczna
Hodricka-Prescotta	0,296481	0,107754
Baxtera-Kinga	0,323846	0,312017
Butterwortha	0,273440	0,268641
Kalmana	0,449137	0,388137

Źródło: obliczenia własne w programie Gretl.

Portrety fazowe indeksów giełdowych DJIA, WIG, produkcji węgla, stali surowej, produkcji przemysłowej ogółem, prognozowanej produkcji przemysłowej zostały przedstawione na rysunkach 9-14. O ile „igły” dominujących częstotliwości składowych trendowych są, w porównaniu z częstotliwościami składowych cyklicznych, słabo zaznaczone, o tyle ich portrety fazowe wydają się bardziej regularne; w przypadku składowej cyklicznej portrety fazowe przypominają chaotyczne dziwne atraktory. Uzyskane wyniki analizy spektralnej i wartości wykładników Hursta zostały przedstawione w formie tabelarycznej (tab. 3). Ramy artykułu nie pozwalają na umieszczenie wszystkich wykresów portretów fazowych przefiltrowanych szeregów.

Zestawienie zbiorcze wszystkich badanych szeregów zawiera tabela 3.

Uzyskane wyniki pozwalają na sformułowanie odwrotnej zależności między wykładnikiem Hursta i występowaniem dominujących częstotliwości we wszystkich

Tabela 3. Okresy dominujących wahań oraz wykładniki Hursta dla nieprzefiltrowanych i dla przefiltrowanych szeregów czasowych (finansowych, realnych i koniunkturalnych) wyspecyfikowanych w tabeli 1

Szereg czasowy	Okres wahań – dane nie filtrowane (wykładnik Hursta)	Okres wahań składowej trendowej (wykładnik Hursta)	Okres wahań składowej cyklicznej (wykładnik Hursta)
wig	97,34 (0,995706)		
Hodrick-Prescott		97,34 (0,982157)	91,83* (0,539712)
Baxter-King		98,84 (0,986443)	5,34* (0,300565)
Butterworth		97,34 (0,988699)	4,28* (0,245548)
Kalman		97,34 (0,981764)	35,53* (0,393447)
dja	263,61 (0,988298)		
Hodrick-Prescott		263,61 (0,974019)	85,93, 85,72* (0,483903)
Baxter-King		263,43 (0,980929)	5,97* (0,332742)
Butterworth		263,61 (0,982862)	4,03* (0,325076)
Kalman		263,61 (0,976817)	25,65* (0,397414)
steel	brak (0,765439)		
Hodrick-Prescott		brak (0,883219)	47,25* (0,550679)
Baxter-King		48,86* (0,515175)	15,20 (0,883689)
Butterworth		54,00 (0,739067)	5,07* (0,564188)
Kalman		brak (0,775998)	22,91 * (0,44067)
cement	8,40*, 4,88*, 3,47* (0,736856)		
Hodrick-Prescott		brak (0,929574)	42,0*, 8,49*, 4,91*, 3,47* (0,441781)
Baxter-King		36,0* (0,572897)	8,44*, 4,89*, 3,47* (0,677409)
Butterworth		8,40* (0,747017)	4,88*, 3,47* (0,355894)
Kalman		brak (0,854987)	8,40*, 4,91*, 3,47* (0,404474)
electri	brak (0,899431)		
Hodrick-Prescott		brak (0,972772)	47,25*, 8,49* (0,533117)
Baxter-King		48,86*, (0,579637)	brak (0,977712)
Butterworth		brak (0,868573)	4,91*, 3,50*, 2,69*, 2,14* (0,306011)
Kalman		brak (0,915272)	24,39*, 8,49*, 5,01*, 3,50*, 2,69*, 2,14* (0,428407)
unemploy	68,73* (0,773218)		
Hodrick-Prescott		brak (0,909427)	50,40* (0,649873)
Baxter-King		45,60* (0,666554)	15,91* (0,974719)
Butterworth		68,73* (0,763883)	5,14*, 3,62*, 2,66*, 2,27* (0,555797)
Kalman		brak (0,799525)	30,24* (0,587314)

cd. tab. 3

Szereg czasowy	Okres wahań – dane nie filtrowane (wykładnik Hursta)	Okres wahań składowej trendowej (wykładnik Hursta)	Okres wahań składowej cyklicznej (wykładnik Hursta)
employ	brak (0,844864)	brak (0,906034)	63,00* (0,534813)
Hodrick-Prescott		62,18* (0,610031)	brak (0,962847)
Baxter-King		brak (0,844192)	4,88* (0,517401)
Butterworth		brak (0,869188)	24,39* (0,440741)
Kalman			
export	brak (0,85197)	brak (0,890891)	37,80* (0,579936)
Hodrick-Prescott		40,24* (0,616349)	brak (0,93995)
Baxter-King		brak (0,809564)	4,55* (0,28058)
Butterworth		brak (0,836641)	26,07* (0,447699)
Kalman			
import	6,79* (0,794018)	brak (0,967332)	50,40* (0,566679)
Hodrick-Prescott		52,62* (0,568412)	8,66* (0,908137)
Baxter-King		8,69* (0,77897)	5,07* (0,377583)
Butterworth		brak (0,852094)	22,24* (0,410624)
Kalman			
cars	brak (0,842893)	brak (0,864645)	63,00* (0,676944)
Hodrick-Prescott		45,60* (0,588991)	brak (0,944337)
Baxter-King		brak (0,788489)	4,70* (0,377583)
Butterworth		brak (0,801801)	32,87* (0,457585)
Kalman			
prod	brak (0,850183)	brak (0,890303)	47,25* (0,555696)
Hodrick-Prescott		48,86* (0,591867)	brak (0,943958)
Baxter-King		brak (0,816603)	4,97* (0,576348)
Butterworth		brak (0,833096)	26,07* (0,459644)
Kalman			
inv	brak (0,834622)	brak (0,876729)	47,25* (0,562921)
Hodrick-Prescott		52,62* (0,605362)	brak (0,922533)
Baxter-King		brak (0,801342)	4,88* (0,622675)
Butterworth		brak (0,81465)	24,39* (0,459644)
Kalman			

row	brak (0,84855)	brak (0,92568) 45,60* (0,556485) brak (0,825765) brak (0,846028)	47,25* (0,562612) brak (0,997475) 4,78*, 2,78*, 2,59*, 2,24* (0,598253) 25,20*, 8,59*, 4,88*, 2,59*, 2,24* (0,469578)
consum	brak (0,847386)	brak (0,88337) 45,60* (0,557505) brak (0,812027) brak (0,823144)	50,40* (0,577368) brak (0,897364) 4,58*, 3,38*, 2,86*, 2,63*, 2,22* (0,512632) 26,07*, 8,22*, 4,61*, 3,42*, 2,65*, 2,23* (0,388051)
coal_f	30,10 (1,0802)	39,10 (0,997388) 64,55* (0,685054) 39,10 (1,05151) 39,10 (1,00901)	12,03*, 6,02*, 2,40* (0,425468) 39,44 (1,09167) 4,01*, 2,89*, 2,40* (0,281148) 12,03*, 6,02*, 2,40* (0,235188)
coal_ch	23,00, 2,86* (0,862738)	brak (0,932516) 47,33*, 22,19* (0,533115) 23,00 (0,819562) brak (0,880509)	46,00*, 21,72*, 2,86*, 2,13* (0,462538) 15,43*, 2,86* (0,887699) 2,86* (0,410168) 20,58*, 2,86*, 2,13* (0,32393)
vacan	76,67* (0,793118)	brak (0,938416) 56,18* (0,628931) 76,67* (0,786301) 86,25* (0,816879)	57,50* (0,616393) brak (0,949691) 4,89*, 4,31*, 3,77*, 2,67*, 2,26* (0,390445) 40,59*, 8,85* (0,513685)
cen_dyn	brak (0,841498)	brak (0,967257) 47,54* (0,62142) brak (0,835452) brak (0,874437)	49,29* (0,603681) brak (0,995355) 4,57*, 3,35*, 2,73*, 2,14* (0,352613) 34,50*, 9,08 (0,545359)
tum_n	57,42, 2,87 (0,842358)	brak (0,944476) 47,46* (0,559238) 57,42* (0,793317) brak (0,832993)	45,93*, 2,87 (0,596925) 2,87* (0,918118) 2,87*, 2,58*, 2,13* (0,18342) 28,71*, 2,87* (0,492302)

Szereg czasowy	Okres wahań – dane nie filtrowane (wykładnik Hursta)	Okres wahań składowej trendowej (wykładnik Hursta)	Okres wahań składowej cyklicznej (wykładnik Hursta)
tum_r Hodrick-Prescott Baxter-King Butterworth Kalman	2,87* (0,884482)	brak (0,96403) 51,42* (0,589246) brak (0,832097) brak (0,866493)	53,0*, 2,87* (0,61372) 2,87* (0,957489) 2,87*, 2,58*, 2,13* (0,176142) 27,56*, 2,87* (0,461251)
prog_prod Hodrick-Prescott Baxter-King Butterworth Kalman	43,67*, 11,91 (0,801066)	brak (0,984116) 41,09* (0,567195) 43,67*, 11,91 (0,792056) brak (0,855398)	40,31*, 11,91 (0,559005) 12,22* (0,955735) 4,40*, 3,56*, 2,38*, 2,10* (0,30021) 32,75*, 11,91*, 6,09* (0,451943)
diag_prod Hodrick-Prescott Baxter-King Butterworth Kalman	brak (0,829969)	brak (0,943182) 50,22* (0,577535) brak (0,819794) brak (0,846192)	52,40* (0,631019) brak (0,986601) 3,97*, 2,86*, 2,59*, 2,37* (0,30021) 32,43*, 11,64 (0,567641)
prog_cen Hodrick-Prescott Baxter-King Butterworth Kalman	34,93, 12,19* (0,824948)	brak (1,00092) brak (0,935536) 34,93, 12,18* (0,819827) brak (0,902001)	40,31*, 12,19* (0,50464) 11,89* (0,949208) 4,00* (0,212746) 22,78*, 11,81*, 6,02*, 4,00* (0,567641)

\* Oznacza wyraźnie zaznaczoną „igłę” w przebiegu funkcji gęstości spektralnej.

Źródło: obliczenia własne w programie Gretl na podstawie danych – zob. tab. 1.



badanych szeregach: wraz ze wzrostem wykładnika Hursta (lub ze zmniejszaniem się wymiaru fraktalnego) zanika wyraźna struktura harmoniczna. Przeprowadzone symulacje z filtracją szeregów czasowych potwierdzają tezę, że regularność przebiegów cyklicznych cechuje raczej układy antypersystentne, powracające do wartości średnich. W układach wzmacniających trendy (persystentnych) wyraźna regularność występuje rzadko. Portrety fazowe uzyskane w wyniku filtracji Hodricka-Prescotta i Kalmana są najbliższe portretom fazowym cyklu granicznego, charakterystycznego dla układów oscylujących wokół pewnego stanu równowagi. Przeprowadzone badanie wskazuje, że ekonomiczne szeregi czasowe są cyklami nieokresowymi, tzn. nie mają ściśle określonej skali czasowej i długości<sup>29</sup>. Zastosowanie procedury filtracji pozwala wyjawiać okresową, regularną naturę ekonomicznych szeregów czasowych. Najbardziej efektywne wydaje się zastosowanie filtra Hodricka-Prescotta i filtra Kalmana.

## Literatura

- Baxter M., *Real exchange rates and real interest differentials: Have we missed the business-cycle relationship*, „Journal of Monetary Economics” 1994, Vol. 33, s. 5-37.
- Baxter M., King R.G., *Measuring Business Cycles: Approximate Band-Pass Filters for Economic Time Series*, „NBER Working Papers” 1995, No. 5022.
- Buss G., *Asymetric Baxter-King filter*, „Scientific Journal of Riga Technical University” 2010, Vol. 42, s. 95-99.
- Chatfield Ch., *Time-Series Forecasting*, Chapman & Hall/CRC, London, New York 2000.
- Cogley T., Nason J.M., *Effects of the Hodrick-Prescott filter on trend and difference stationary time series: Implications for business cycle research*, „Journal of Economic Dynamics and Control” 1995, Vol. 19, s. 253-278.
- finance.yahoo.com/q/hp?s=^dji+historical+prices [25.05.2012].
- Gomez V., *The Use of Butterworth Filters for Trend and Cycle Estimation in Economic Time Series*, „Journal of Business and Economic Statistics” 2001, Vol. 19, s. 365-373.
- Gopinath T., Choudhary A.K., *Countercyclical Capital Buffer Guidance for India*, „RBI Working Paper Series (DEPR)” 2012, No. 12, [rbidocs.rbi.org.in/rdocs/Publications/PDFs/12WPS210612.pdf](http://rbidocs.rbi.org.in/rdocs/Publications/PDFs/12WPS210612.pdf) [25.05.2012].
- Guay A., St-Amant P., *Do the Hodrick-Prescott and Baxter-King filters provide of good approximation of business cycles?*, „Working Paper Center for Research on Economic Fluctuations and Employment (CEREFÉ)” 1997, Vol. 53.
- Harvey A.C., *Forecasting, structural time series models and the Kalman filter*, Cambridge University Press, Cambridge 2001.
- Harvey A.C., Jaeger A., *Detrending, stylized facts and the business cycle*, „Journal of Econometrics” 1993, Vol. 8, s. 231-247.
- Haykin S., *Neural Networks and Learning Machines*, 3rd ed., Pearson Education, New Jersey 2009.

<sup>29</sup> Zob. E.E. Peters, *Teoria chaosu a rynki kapitałowe*, WIG-Press, Warszawa 1997, s. 138-140.

- Hodrick R.J., Prescott E.C., *Postwar U.S. Business Cycles: An Empirical Investigation*, „Journal of Money, Credit and Banking” 1997, Vol. 29, No. 1, Ohio State University Press, s. 1-6.
- Izydorczyk J., Płonka G., Tyma G., *Teoria sygnałów*, wyd. II, Helion, Gliwice 2006.
- Kaiser R., Maraval A., *Estimation of the Business Cycle: A Modified Hodrick-Prescott Filter*, „Spanish Economic Review” 1999, Vol. 1, s. 175-206.
- King R.G., Watson M., *Money, Prices, Interest Rates and the Business-Cycle*, „Review of Economics and Statistics” 1996, Vol. 78(1), MIT Press.
- Kleinbauer R., *Kalman Filtering Implementation with Matlab*, Study Report in the Field of Study Geodesy and Geoinformatics at Universität Stuttgart, Helsinki, November 2004.
- Kalman Filtering and Neural Networks*, red. S. Haykin, John Wiley & Sons, Toronto 2001.
- Kufel T., *Narzędzia ekonometrii dynamicznej w oprogramowaniu Gretl*, IX Ogólnopolskie Seminarium Naukowe „Dynamiczne modele ekonometryczne” 6-8 września 2005 r. Toruń, Katedra Ekonometrii i Statystyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu, [www.dem.umk.pl/DME/2005/34\\_kufel.pdf](http://www.dem.umk.pl/DME/2005/34_kufel.pdf) [25.05.2012].
- Murray Ch.J., *Cyclical Properties of Baxter-King Filtered Series*, s. 1-10, [userwww.service.emory.edu/~zliu5/seminars/murray.pdf](http://userwww.service.emory.edu/~zliu5/seminars/murray.pdf) [25.05.2012].
- Osborn D.R., *Moving average detrending and the analysis of business cycles*, „Oxford Bulletin Of Economics and Statistics” 1995, Vol. 57, s. 547-558.
- Pasricha G.K., *Kalman Filter and its Economic Applications*, University of California, Santa Cruz, [mpra.ub.uni-muenchen.de/22734/1/MPRA\\_paper\\_22734.pdf](http://mpra.ub.uni-muenchen.de/22734/1/MPRA_paper_22734.pdf) [15.10.2006].
- Peters E.E., *Teoria chaosu a rynki kapitałowe*, Wyd. WIG-Press, Warszawa 1997.
- Puthusserypady S., Kurian A.P., *Variants of Kalman Filter for the Synchronization of Chaotic Systems*, w: *Kalman Filter*, red. Vedran Kordić, May 2010, INTECH, Croatia, s. 209-224, [sciyo.com](http://sciyo.com) [25.05.2012].
- Ravn M.O., Uhlig H., *On adjusting the Hodrick-Prescott Filter for the frequency of observation*, „The Review of Economics and Statistics” 2002, Vol. 84, s. 371-376, published by: University College London.
- Rinne H., Specht K., *Zeitreihen. Statistische Modellierung, Schätzung und Prognose*, Verlag Franz Vahlen, München 2002.
- Schenk-Hoppe K.R., *Economic Growth and Business Cycles: A Critical Comment on Detrending Time Series*, „Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics” 2001, Vol. 5, s. 75-86.
- Stock J.H., Watson M.W., *Business cycle fluctuations in US macroeconomic time series*, „NBER Working Paper Series” 1998, No. 6528.
- Stranneby D., *Cyfrowe przetwarzanie sygnałów. Metody, algorytmy, zastosowania*, Wyd. BTC, Warszawa 2004.
- Tandon Ch., Khursheet A., Gupta N., *Kalman Filter and its Applications*, LAP LAMBERT Academic Publishing, Saarbrücken 2010.
- Weng Z., *An R Package for Continuous Time Autoregressive Models via Kaman Filter*, [cran.r-project.org/web/packages/cts/vignettes/kf.pdf](http://cran.r-project.org/web/packages/cts/vignettes/kf.pdf) [25.05.2012].
- Woitek U., *A Note on the Baxter-King Filter*, [dspace.gla.ac.uk/bitstream/1905/593/1/9813.pdf](http://dspace.gla.ac.uk/bitstream/1905/593/1/9813.pdf) [25.05.2012].
- Wośko Z., *Czy filtry liniowe są przydatnymi narzędziami badania koniunktury? Analiza spektralna na przykładzie ankietowych wskaźników koniunktury*, [www.ae.katowice.pl/images/user/File/katedra\\_ekonomii/](http://www.ae.katowice.pl/images/user/File/katedra_ekonomii/) [25.05.2012].
- [www.measuringworth.com](http://www.measuringworth.com) [25.05.2012].
- [www.indexmundi.com/commodities/?commodity=commodity-price-index&months=240](http://www.indexmundi.com/commodities/?commodity=commodity-price-index&months=240) [25.05.2012].
- Zieliński T.P., *Cyfrowe przetwarzanie sygnałów. Od teorii do zastosowań*, WKiŁ, Warszawa 2007.

## The influence of real financial filtration and economic time series on their phase portraits

**Summary.** The article attempts to assess the impact of filtration of economic time series in order to draw up to phase portraits of their trend and cyclical components. In principle, all transformations of time series connected with their (*i.e.* transformations) analysis, forecasting, modelling, control and the like can be treated as filtration. Digital filters find their application, among others, in economics, for smoothing time series, removing undesirable seasonal variations, accidental, high or low frequency fluctuations and the like, and forecasting and the modelling of economic processes.

Achieved results allow for formulating the opposite relation between the Hurst exponent and the appearance of dominating frequencies in all examined series: along with the height of the Hurst exponent (or with reduction of fractal dimension) a distinct harmonic structure fades out. Presented simulations with the filtration of time series confirm the thesis that the regularity of cyclical courses characterises rather antipersistent systems, and return to average values. In the systems amplifying trends (persistent systems) the distinct regularity rarely appears. Phase portraits obtained as a result of the Hodrick-Prescott filtration and that of Kalman are the closest for phase portraits of the limited cycle, characteristic of systems fluctuating around the certain steady-state. The conducted examination shows that economic time series are nonperiodic cycles, *i.e.* they do not have a closely determined temporary scale and length. Application of the procedure of filtration allows to reveal the periodic, regular nature of economic time series. The use of the Hodrick-Prescott filter and Kalman filter seems to be most effective.

**Key words:** digital filters, Hodrick-Prescott filter, Baxter-King filter, Butterworth filter, Kalman filter, Hurst exponent, fractal dimension, phase portraits

