



## Alicja Ganczarek-Gamrot

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach  
Wydział Informatyki i Komunikacji  
Katedra Demografii i Statystyki Ekonomicznej  
alicja.ganczarek-gamrot@ue.katowice.pl

### PORÓWNANIE METOD ESTYMACJI VaR NA POLSKIM RYNKU GAZU

**Streszczenie:** Celem pracy jest przeprowadzenie analizy porównawczej metod estymacji ryzyka zmiany ceny gazu oszacowanego za pomocą *Value-at-Risk* (VaR). W pracy do porównania efektywności estymacji ryzyka zmiany ceny gazu wybrano metodę symulacji Monte Carlo, w której VaR traktowany jest jako kwantyl rozkładu zmiennej losowej o rozkładzie normalnym, t-Studenta, GED oraz skośnym rozkładzie t-Studenta z VaR oszacowanym z uwzględnieniem dynamiki zmienności cen gazu za pomocą liniowych oraz nieliniowych modeli szeregów czasowych AR-GARCH. Analiza porównawcza została przeprowadzona w oparciu o wyniki testu przekroczeń Kupca na podstawie logarytmicznych stóp zwrotu wartości indeksu *gas\_base* notowanego na Rynku Dnia Następnego (RDN) TGE w okresie od 1 stycznia do 20 listopada 2014 roku.

**Słowa kluczowe:** VaR, rozkład stóp zwrotu, modele szeregów czasowych.

## Wprowadzenie

W 2012 roku na Rynku Terminowym Towarowym polskiej Towarowej Giełdy Energii (TGE) pojawiły się instrumenty terminowe towarowe na gaz, a 31 grudnia 2012 roku uruchomiony został rynek spot gazu, na którym od marca 2013 roku podawane są notowania ciągłe kontraktów na dostawę gazu, łączny dzienny wolumen obrotu oraz wartości indeksów *gas\_base* i *gas\_weekend*.

Celem pracy jest przeprowadzenie analizy porównawczej metod estymacji ryzyka zmiany ceny gazu oszacowanego za pomocą *Value-at-Risk* (VaR). Metody estymacji wartości zagrożonej generalnie można podzielić na metody traktujące VaR jako parametr, czyli kwantyl rozkładu zmiennej losowej, lub jako funkcję zależną od czasu, czyli kwantyl rozkładu procesu stochastycznego. W pracy do porównania efektywności estymacji ryzyka zmiany ceny gazu wybrano metodę,

w której VaR traktowany jest jako kwantyl rozkładu: normalnego, t-Studenta, GED oraz skośnego t-Studenta z VaR oszacowanym z uwzględnieniem dynamiki zmienności cen gazu za pomocą liniowych i nieliniowych modeli szeregów czasowych.

Analiza porównawcza została przeprowadzona w oparciu o wyniki testu przekroczeń Kupca na podstawie dziennych logarytmicznych stóp zwrotu wartości indeksu `gas_base` notowanego na Rynku Dnia Następnego (RDN) TGE w okresie od 1 stycznia do 20 listopada 2014 roku.

## 1. Wybrane metody estymacji VaR

Wartość narażona na ryzyko (ang. *Value-at-Risk*, VaR) jest to taka strata wartości, która z zadaniem prawdopodobieństwem  $\alpha \in (0,1)$  nie zostanie przekroczona w określonym czasie  $\Delta t$  [Jajuga, 2000]. VaR dla pozycji krótkiej definiowana jest następująco:

$$P(X_{t+\Delta t} \leq X_t - VaR_\alpha) = \alpha^1, \quad (1)$$

gdzie:

$X_t$  – obecna wartość waloru w chwili  $t$ ,

$X_{t+\Delta t}$  – zmienna losowa, wartość waloru na końcu trwania inwestycji.

Oznaczając przez  $Z$  logarytmiczną stopę zwrotu z inwestycji

$$Z = \ln\left(\frac{X_{t+\Delta t}}{X_t}\right), \quad (2)$$

równość (1) można zapisać jako kwantyl rzędu  $\alpha \in (0,1)$  rozkładu logarytmicznych stóp zwrotu [Jajuga, 2000]:

$$VaR_\alpha = (e^{Z_\alpha} - 1)X_t. \quad (3)$$

Spośród metod estymacji kwantyla w niniejszym artykule wybrano metodę symulacji Monte Carlo, w której przyjmuje się pewien hipotetyczny model najlepiej opisujący rozkład stóp zwrotu w szczególności w ogonach rozkładu. Kwantyl rzędu  $\alpha \in (0,1)$  można zapisać następująco [Blanco, 1998]:

$$Z_\alpha = \mu + F^{-1}(\alpha)\sigma, \quad (4)$$

<sup>1</sup> Dla pozycji dłuższej wartość straty  $VaR$  można zdefiniować następująco:  $P(X_{t+\Delta t} \geq X_t - VaR_\alpha) = \alpha$ .

gdzie:  $\mu$  – średnia rozkładu stóp zwrotu,  
 $\sigma$  – odchylenie standardowe rozkładu stóp zwrotu,  
 $F^{-1}(\alpha)$  – kwantyl rzędu  $\alpha$  rozpatrywanego zestandaryzowanego rozkładu,  
 $F(\alpha)$  – dystrybuanta rozkładu.

Podejście estymacji kwantyla danego równością (4) zostało porównane z estymacją kwantyla będącego funkcją czasu w następujący sposób [Doman, 2004a; Doman, 2004b, Piontek, 2002]:

$$Z_{\alpha t} = \mu_t + F^{-1}(\alpha)\sigma_t, \quad (5)$$

gdzie:  $\mu_t$  – średnia stóp zwrotu zależna od czasu,  
 $\sigma_t$  – odchylenie standardowe stóp zwrotu zależne od czasu,  
 $F^{-1}(\alpha)$  – kwantyl rzędu  $\alpha$  rozpatrywanego zestandaryzowanego rozkładu,  
 $F(\alpha)$  – dystrybuanta rozkładu.

Biorąc pod uwagę charakter zmienności oraz częstotliwość danych wartość oczekiwaną procesu stochastycznego zmienności cen gazu  $\mu_t$  można zapisać, wykorzystując modele uwzględniające trend, sezonowość i autokorelację, np. model SARIMA (ang. *Seasonal Auto-Regressive Integrated Moving Average*) (p,d,q) × (P, D, Q) [Brockwell i Davis, 1996]:

$$p(B)P_s(B^s)\nabla_s^d z_t = q(B)Q_s(B^s)\varepsilon_t, \quad (6)$$

gdzie:

$$p(B) = 1 - \sum_{i=1}^p p_i B^i, \quad P_s(B) = 1 - \sum_{i=1}^P P_{s_i} B^i,$$

$$q(B) = 1 - \sum_{i=1}^q q_i B^i, \quad Q_s(B) = 1 - \sum_{i=1}^Q Q_{s_i} B^i,$$

s – opóźnienie sezonowe,

d – rząd zintegrowania szeregu,

$z_t$  – empiryczne wartości szeregu,

B – operator przesunięcia  $B^s z_t = z_{t-s}$ ,

$\nabla$  – operator różnicowy  $\nabla^s z_t = z_t - z_{t-s} = (1 - B^s)z_t$ ,

$\varepsilon_t$  – reszty modelu,

p – rząd opóźnienia części autoregresyjnej modelu,

d – rząd stopnia zintegrowania modelu,

q – rząd opóźnienia części średniej ruchomej modelu,  
 P – rząd opóźnienia sezonowej części autoregresyjnej modelu,  
 D – rząd sezonowego stopnia zintegrowania modelu,  
 Q – rząd opóźnienia sezonowej części średniej ruchomej modelu.

Ze względu na obserwowany efekt skupiania się zmienności wariancję szeregu logarymicznych stóp zwrotu cen gazu opisano uogólnionym modelem wariancji GARCH(m, k) (ang. *Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*) [Engle i Bollerslev, 1986]:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i z_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^l \beta_i \sigma_{t-1}^2, \quad (7)$$

gdzie:

$\alpha_0$  – wartość bezwarunkowej wariancji procesu ( $\alpha_0 \geq 0$ ),

$\alpha_q, \beta_p > 0$  a pozostałe współczynniki są nieujemne,

m, l – rząd modelu.

Do porównania poprawności estymacji wartości VaR w pracy wykorzystano test ilości przekroczeń  $VarR_\alpha$  [Kupiec, 1995], w którym weryfikowana jest hipoteza:  $H_0: w_{VarR_\alpha} = \alpha$  wobec hipotezy alternatywnej  $H_1: w_{VarR_\alpha} \neq \alpha$ , gdzie:

$\alpha$  – rząd przekroczeń  $VarR_\alpha$ ,

$w_{VarR_\alpha}$  – udział przekroczeń  $VarR_\alpha$  w procesie rozpatrywanych stóp zwrotu,

$\hat{w}_{VarR_\alpha} = \frac{K}{T}$  – udział przekroczeń  $VarR_\alpha$  w szeregu rozpatrywanych stóp zwrotu

(K – liczba przekroczeń, T – długość szeregu).

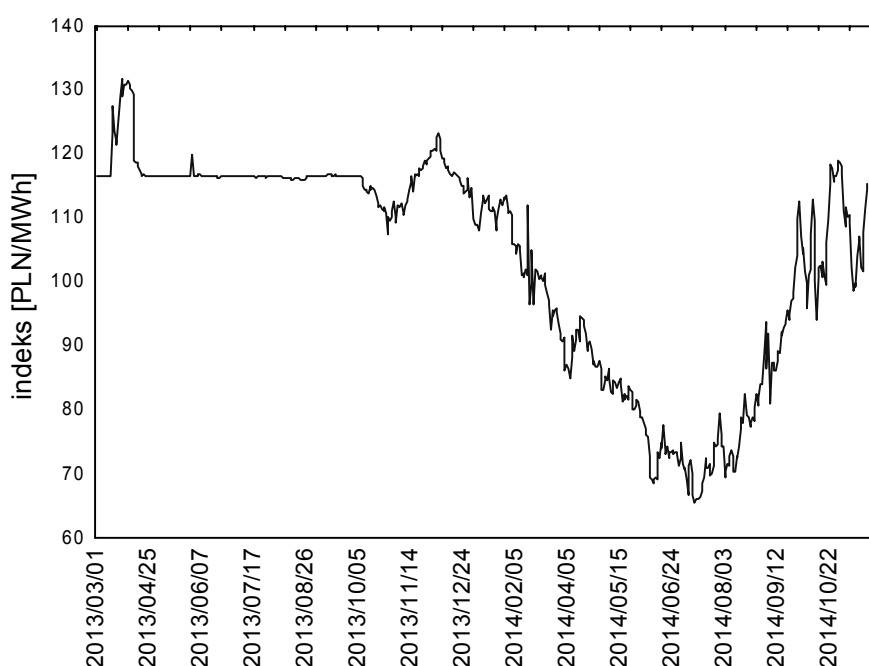
Przy założeniu prawdziwości hipotezy zerowej statystyka:

$$LR_{POF} = -2 \ln \left\{ \frac{(1-\alpha)^{T-K} \alpha^K}{\left[ \left(1 - \frac{K}{T}\right)^{T-K} \right] \left(\frac{K}{T}\right)^K} \right\} \sim \chi_1^2 \quad (8)$$

ma asymptotyczny rozkład  $\chi^2$  z jednym stopniem swobody [Kupiec, 1995].

## 2. Analiza empiryczna

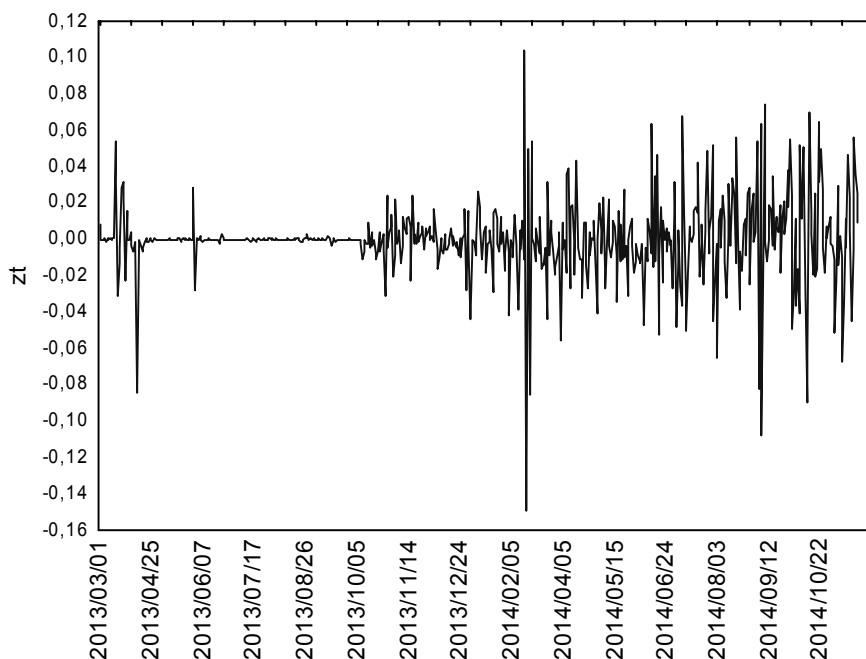
Na rys. 1 przedstawiono szereg czasowy wartości indeksu gas\_base notowanego od marca 2013 roku (początku funkcjonowania RDN gazu) do 20 listopada 2014 roku. Wartość indeksu gas\_base odpowiada średniej dziennej cenie gazu [PLN/MWh] spośród wszystkich transakcji zawartych na dany dzień. Indeks notowany jest każdego dnia tygodnia łącznie z dniami świątecznymi. Na początku wprowadzenia handlu kontraktami na gaz poza nielicznymi wyjątkami ceny gazu kształtowały się na stałym poziomie. Dopiero pod koniec roku 2013 można zauważyć zmiany w poziomie kształtowania się cen gazu, jak również trend i siedmiodniową cykliczność.



**Rys. 1.** Wartości indeksu gas\_base [PLN/MWh] notowanego na Rynku Dnia Następnego Towarowej Giełdy Energii w okresie od 1.03.2013 do 20.11.2014

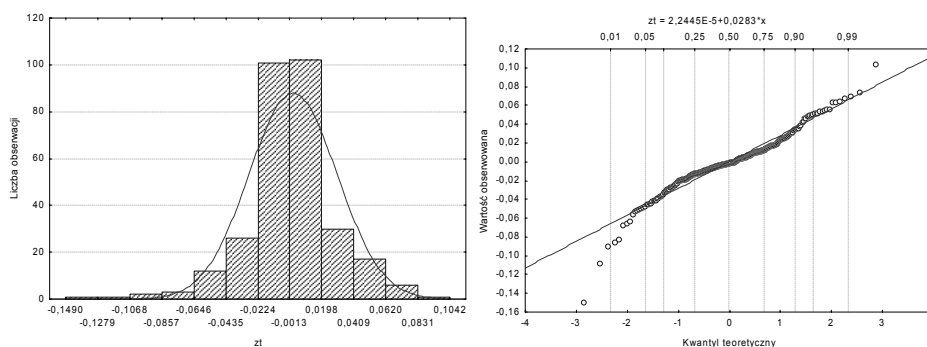
Źródło: [www 1].

Na rys. 2 przedstawiono szereg czasowy dziennych logarytmicznych stóp zwrotu indeksu gas\_base dla analogicznego okresu. W szeregu stóp zwrotu trend nie jest widoczny, natomiast wyraźnie widać okresy bardzo niskiej zmienności cen, czyli okresy niskiego ryzyka zmiany ceny gazu, jak również okresy podwyższonej zmienności cen, a najwyższy poziom ryzyka zmiany ceny obserwujemy w momencie pojawienia się konfliktu na Ukrainie.

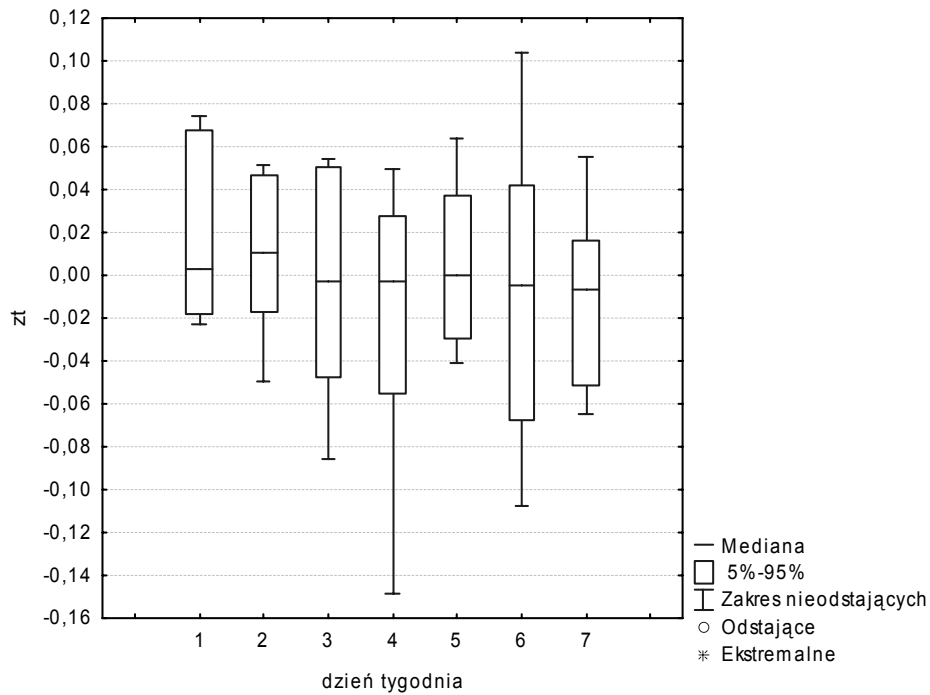


**Rys. 2.** Szereg czasowy logarytmicznych stóp zwrotu wartości indeksu gas\_base w okresie od 1.03.2013 do 20.11.2014

Biorąc pod uwagę kształtowanie się cen oraz logarytmicznych stóp zwrotu cen gazu (rys. 1-2), do analizy porównawczej efektywności metod estymacji VaR wybrano szereg logarytmicznych stóp zwrotu cen gazu notowanych na RDN od 1 stycznia do 20 października 2014. Na rys. 3 przedstawiono histogram rozkładu oraz wykres kwantyl-kwantyl. Na poziomie istotności 0,05 należy odrzucić hipotezę, że rozkład stóp zwrotu cen gazu jest rozkładem normalnym. W ocenie rozkładu należy uwzględnić takie charakterystyki jak: obserwowana na rys. 3 asymetria, grube ogony oraz leptokurtyczność.

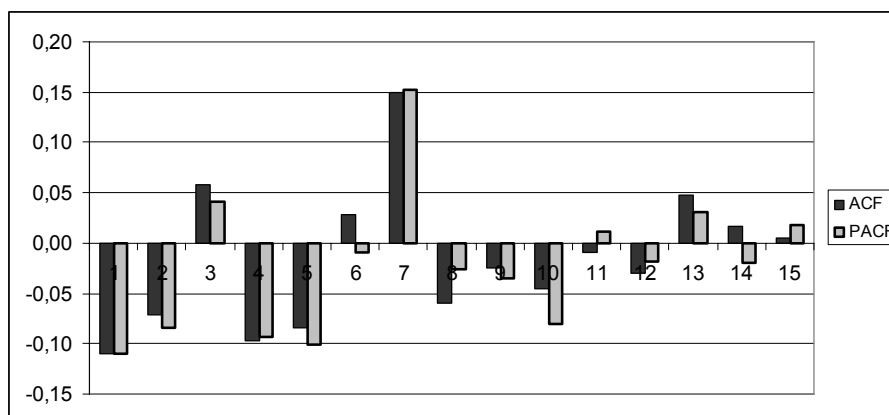


**Rys. 3.** Rozkład logarytmicznych stóp zwrotu wartości indeksu gas\_base w okresie od 1.01.2014 do 20.11.2014



**Rys. 4.** Wykres ramka-wąsy logarytmicznych stóp zwrotu wartości indeksu gas\_base w okresie od 1.01.2014 do 20.11.2014 w poszczególne dni tygodnia (1 – poniedziałek, 7 – niedziela)

W wyborze modelu szeregu czasowego logarytmicznych stóp zwrotu cen gazu należy uwzględnić brak trendu oraz efekt skupiania się zmienności (rys. 2), jak również występującą w szeregu autokorelację związaną z cyklicznością tygodniową widoczną na rys. 4-5. Wartości funkcji autokorelacji (ACF) oraz autokorelacji cząstkowej (PACF) (rys. 5) zanikają. Biorąc pod uwagę wymienione charakterystyki szeregu empirycznego (autokorelację, sezonowość) oraz istotność parametrów modelu, oszacowany model SARIMA metodą najmniejszych kwadratów został zredukowany do postaci  $\mu_t = 0,15z_{t-7}$ .



Rys. 5. Wykres funkcji ACF oraz PACF logarytmicznych stóp zwrotu wartości indeksu gas\_base w okresie od 1.01.2014 do 20.11.2014

Parametry modelu wariancji w zależności od zakładanego rozkładu zawiera tabela 1. Na mocy kryterium Schwarza (BIC) [Schwarz, 1978] najlepiej do danych dopasowany jest model z leptokurtycznym rozkładem GED.

Tabela 1. Parametry modelu wariancji

Rozkład	$a_0$	$a_1$	$b_1$	Parametry rozkładu	BIC
normalny (N)	2,54	0,23	0,43	N(0, 1)	-4,369178
t-Studenta (t)	2,28	0,31	0,46	t(0, 1, 4,13)	-4,436089
GED	2,27	0,26	0,45	GED(0, 1, 1,16)	-4,446606
skośny t-Studenta (sk-t)	2,28	0,31	0,45	sk-t(0, 1, 0,02, 4,11)	-4,417481

W tabeli 2 przedstawiono udział przekroczeń  $VaR_\alpha$ , oszacowanego z jednodniowym horyzontem trwania inwestycji, w zależności od wybranej metody szacunku oraz ustalonego rzędu  $\alpha$ . Dla wartości VaR oszacowanych z rozkładu zmiennej losowej udział przekroczeń znacznie odbiega od oczekiwanej. Natomiast w przypadku VaR szacowanego przy uwzględnieniu zmienności parametrów rozkładu udział przekroczeń jest zbliżony do oczekiwanych z wyjątkiem rozkładów z grubymi ogonami (rozkładem t-Studenta, GED, rozkładem skośnym t-Studenta) dla pozycji długiej i niskich wartości  $\alpha$ .

Tabela 2. Empiryczna liczba przekroczeń VaR w zależności od metody estymacji

Metoda	Zmienna losowa				Proces stochastyczny			
	2	3	4	5	6	7	8	9
Rozkład	N	t	GED	sk-t	N	t	GED	sk-t
$\alpha$	$\hat{w}_{VaR_\alpha} = \frac{K}{T}$							
	Pozycja krótka							
0,0500	0,3907	0,4404	0,4570	0,4404	0,0497	0,0563	0,0530	0,0563
0,0250	0,3676	0,4305	0,4371	0,4305	0,0331	0,0298	0,0298	0,0298



cd. tabeli 2.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0100	0,3543	0,3676	0,3676	0,3676	0,0133	0,0066	0,0066	0,0066
0,0050	0,3344	0,3344	0,3046	0,3278	0,0066	0,0033	0,0066	0,0033
0,0025	0,3278	0,2715	0,2318	0,2616	0,0066	0,0033	0,0033	0,0033
Pozycja długa								
0,0500	0,3841	0,3676	0,36755	0,3676	0,0629	0,0695	0,0563	0,0762
0,0250	0,3676	0,3477	0,33113	0,3477	0,0331	0,0331	0,0265	0,0331
0,0100	0,3477	0,2947	0,25166	0,2947	0,0232	0,0066	0,0099	0,0066
0,0050	0,3311	0,2417	0,21192	0,2517	0,0132	0,0000	0,0000	0,0000
0,0025	0,3179	0,2119	0,15563	0,2152	0,0033	0,0000	0,0000	0,0000

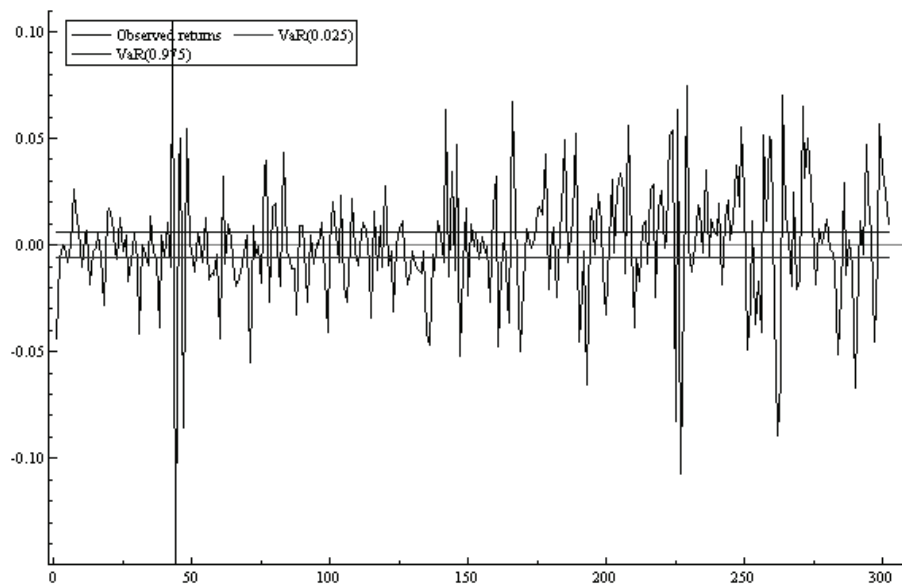
W tabeli 3 zamieszczono p-wartości testu przekroczeń Kupca. Biorąc pod uwagę wyniki z tabel 2-3 można powiedzieć, że spośród omawianych metod estymacji VaR zdecydowanie lepsze wyniki estymacji daje metoda traktująca obserwowane wartości stóp zwrotu jako realizacje procesu stochastycznego. Uwzględnienie zależności obserwacji od czasu wyraźnie poprawiło jakość estymacji wartości VaR na polskim rynku gazu. Porównując ze sobą wyniki estymacji VaR za pomocą modelu autokorelacji i warunkowej wariancji można dodatkowo stwierdzić, że efekt skośności, leptokurtyczności i grubych ogonów rozkładu logarytmicznych stóp zwrotu został poprawnie oszacowany za pomocą modeli warunkowych z rozkładem normalnym.

Tabela 3. P-wartości testu przekroczeń Kupca

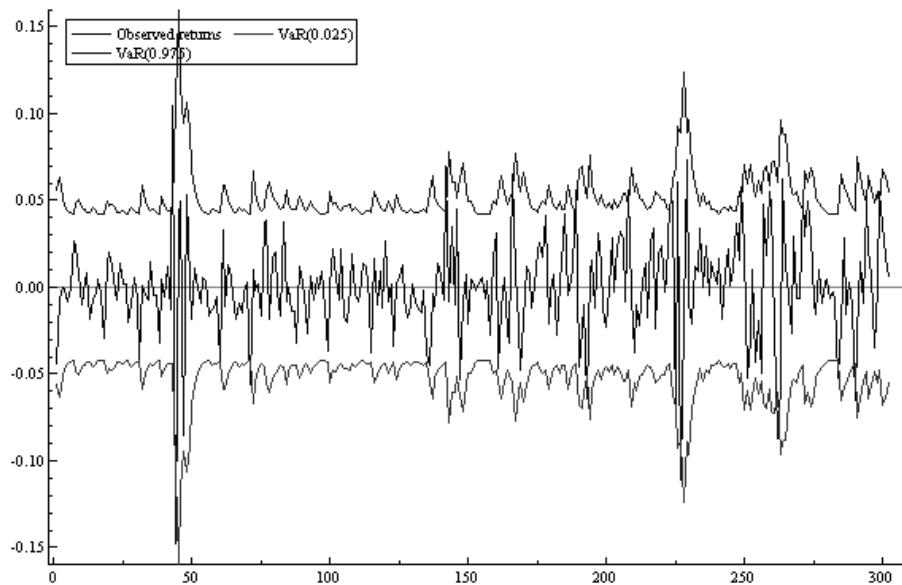
Metoda	Zmienna losowa				Proces stochastyczny				
	Rozkład	N	t	GED	sk-t	N	t	GED	sk-t
$\alpha$	p-wartość								
Pozycja krótka									
0,0500	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,9789	0,6226	0,8139	0,6226	
0,0250	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,3893	0,6038	0,6038	0,6038	
0,0100	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,5893	0,5297	0,5297	0,5297	
0,0050	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,7034	0,6574	0,7034	0,6574	
0,0025	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,2347	0,7881	0,7881	0,7881	
Pozycja długa									
0,0500	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,3213	0,1403	0,6226	0,0520	
0,0250	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,3893	0,3893	0,8695	0,3893	
0,0100	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0494	0,5297	0,9908	0,5297	
0,0050	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0923	0,0000	0,0000	0,0000	
0,0025	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,7881	0,0000	0,0000	0,0000	

## Podsumowanie

Na rysunkach zilustrowano wybrane oszacowania VaR jako kwantyla rozkładu zmiennej losowej oszacowanego na podstawie próby (rys. 6) oraz kwantyla procesu stochastycznego oszacowanego na podstawie empirycznego szeregu czasowego.



Rys. 6. VaR oszacowane w oparciu o rozkład normalny w okresie od 1.01.2014 do 20.11.2014



Rys. 7. VaR oszacowane w oparciu o model uwzględniający zmienność wartości oczekiwanej i wariancji w czasie z rozkładem normalnym w okresie od 1.01.2014 do 20.11.2014

Podsumowując uzyskane wyniki należy stwierdzić, że w estymacji VaR na polskim rynku gazu zdecydowanie należy uwzględnić w zmienności cen sezonowość oraz heteroskedastyczność wariancji. Dla wybranego szeregu czasowego najprostsze modele GARCH(1,1) z rozkładem normalnym na poziomie istotności 0,05 poprawnie oszacowały wartość zagrożoną dla większości poziomów tolerancji  $\alpha$ .

## Literatura

- Blanco C. (1998), *Value at risk for energy: Is VaR useful to manage energy price risk?*, Commodities-Now, December.
- Brockwell P.J., Davis R.A. (1996), *Introduction to Time Series and Forecasting*, Springer-Verlag, New York.
- Doman M. (2004a), *Zastosowanie modeli CAViaR w szacowaniu wartości zagrożonej*, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego, nr 389.
- Doman R. (2004b), *Dynamika korelacji między rynkami kapitałowymi krajów Europy Środkowej*, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego, nr 389.
- Engle R.F., Bollerslev T. (1986), *Modeling the persistence of conditional variance*, „Econometric Review”, Vol. 5.
- Jajuga K., Jajuga T. (1999), *Inwestycje*, WN PWN, Warszawa.
- Jajuga K. (2000), *Ryzyko w finansach. Ujęcie statystyczne* [w:] A. Zeliaś (red.), *Współczesne problemy badań statystycznych i ekonometrycznych*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Krakowie, Kraków.
- Kupiec P. (1995), *Techniques for verifying the accuracy of risk management models*, „Journal of Derivatives”, Vol. 2.
- Piontek K. (2002), *Pomiar ryzyka metodą VaR a modele AR-GARCH ze składnikiem losowym o warunkowym rozkładzie z „grubymi ogonami”*, „Rynek Kapitałowy. Skuteczne Inwestowanie”.
- Schwarz G. (1978), *Estimating the Dimension of a Model*, „The Annals of Statistics”, Vol. 6.
- [www 1] [www.polpx.pl](http://www.polpx.pl).

## COMPARISON OF VaR ESTIMATION METHODS ON POLISH NATURAL GAS MARKET

**Summary:** This work is aimed at comparing methods of Value-at-Risk (VaR) estimation on Polish natural gas market. Two methods of calculating VaR were examined. One of them uses a quantile of the normal, t-Student, skewed t-Student or GED distribution. Another method is based on AR-GARCH models. Empirical analysis was carried out for

logarithmic rates of return of gas-base index noted on the Day Ahead Market from 1<sup>th</sup> January to 20<sup>th</sup> November 2014. Based on Kupiec test results one may say that on Polish natural gas market VaR estimates calculated by time series models are more appropriate than VaR estimates calculated as a quantile of distribution.

**Key words:** VaR, rates of return distribution, time series models.