Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach

Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe
Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach
ISSN 2083-8611 Nr 221 · 2015

Współczesne Finanse 1

Monika Miśkiewicz-Nawrocka

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach
Wydział Zarządzania
Katedra Matematyki
monika.miskiewicz@ue.katowice.pl

Katarzyna Zeug-Żebro

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach
Wydział Zarządzania
Katedra Matematyki
katarzyna.zeug-zebro@ue.katowice.pl

ZASTOSOWANIE WYKŁADNIKÓW LAPUNOWA DO WYZNACZANIA PORTFELI OPTYMALNYCH

Streszczenie: Jednym z najbardziej istotnych narzędzi stosowanym w inwestowaniu jest analiza portfelowa. Jej głównym celem jest dywersyfikacja ryzyka inwestycyjnego. W ostatnich latach, obok klasycznej metody Markowitza, badacze rozwinęli zarówno metody będące modyfikacjami tej koncepcji, jak i stworzyli nowe, alternatywne narzędzia. Innym zaproponowanym tu podejściem jest zastosowanie miary identyfikacji chaosu polegającej na wyznaczeniu największego wykładnika Lapunowa. Celem artykułu jest konstrukcja portfela optymalnego z zastosowaniem największego wykładnika Lapunowa, miary *TMAI* oraz portfela Markowitza.

Słowa kluczowe: analiza portfelowa, największy wykładnik Lapunowa, taksonomiczna miara *TMAI*.

Wprowadzenie

Analizy giełdowe pokazały, że konstrukcja portfela optymalnego metodą Markowitza nie zawsze daje najlepsze rezultaty [Mastalerz-Kodzis i Pośpiech, 2011]. W ostatnich latach pojawiły się więc narzędzia, które poza stopą zwrotu i ryzykiem inwestycji wykorzystują wskaźniki określające kondycję ekonomiczno-finansową spółek. Alternatywnym podejściem zaproponowanym w poniższym artykule jest wykorzystanie miary identyfikacji chaosu polegającej na oszacowaniu wartości największego wykładnika Lapunowa. Ponieważ determinizm szeregów chaotycznych wskazuje między innymi na możliwość ich predykcji, przypuszcza się również, że istotnie wpływa na konstrukcję portfela optymalnego.

Celem artykułu jest próba zdywersyfikowania ryzyka portfela inwestycyjnego. W tym celu zostały zbudowane cztery portfele optymalne wyznaczone na podstawie największego wykładnika Lapunowa i taksonomicznej miary atrakcyjności inwestycji oraz portfela Markowitza. W badaniach pod uwagę wzięto ceny akcji wybranych spółek notowanych na GPW w Warszawie w okresie od 1.01.2005-30.09.2014. Na ich podstawie zostały wyznaczone stopy zwrotu.

1. Największy wykładnik Lapunowa

Wykładniki Lapunowa są miarą wrażliwości układu dynamicznego na zmianę warunków początkowych[1]. Określają one średnie tempo oddalania lub zbliżania się dwóch początkowo bliskich sobie stanów podczas ewolucji układu [Miśkiewicz-Nawrocka, 2012].

Dla układu dynamicznego (X, f), w którym $X \subset R^m$, $f : X \to X$ $(m \geq 1)$, wykładniki Lapunowa są zdefiniowane jako granice [Zawadzki, 1996, s. 161]:

$$\lambda_i(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln\left|\mu_i(n, x_0)\right|, \qquad i = 1,...,m, \tag{1}$$

gdzie:

$\mu_i(n, x_0)$ – wartości własne macierzy $Df^n(x_0)$,

$Df^n(x_0)$ – macierz Jacobiego odwzorowania f^n równa

$$Df^n(x_0) = Df(x_{n-1})\cdot\ldots\cdot Df(x_1)\, Df(x_0),$$

f^n – n-krotne złożenie funkcji f,

$Df(x) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right]$, f_i – składowe odwzorowania f,

$i, j = 1,2,\ldots,m$.

m – wymiarowy układ dynamiczny (X, f) posiadający m wykładników Lapunowa, które informują o zmianie odległości między bliskimi stanami względem odpowiedniego kierunku w przestrzeni stanów.

---

[1] Układ dynamiczny (X, f) jest wrażliwy na zmianę warunków początkowych, jeżeli istnieje $\varepsilon > 0$ takie, że dla każdego $x \in X$ oraz każdego otoczenia U punktu x istnieją $y \in U$ oraz $n \geq 1$ takie, że:

$$\left\|f^n(x) - f^n(y)\right\| > \varepsilon,$$

gdzie f^n jest n-krotnym złożeniem odwzorowania f [Deavney, 1987; za: Zawadzki, 1996].

Największy wykładnik Lapunowa $\lambda_{\max}$ służy do rozróżniania charakteru dynamiki układu: regularnej od chaotycznej. W 1993 roku Rosenstein [Rosenstein, Collins i De Luca, 1993], a rok później Kantz [Kantz, 1994] przedstawili algorytm wyznaczania największego wykładnika Lapunowa dla układów dynamicznych definiowanych przez jednowymiarowe szeregi obserwacji. Przebiega on według następujących etapów [Kantz i Schreiber, 2004]:

1. Wyznaczamy zbiory Z_t złożone z K najbliższych sąsiadów $\hat{x}_{t_j}^d$ wektorów opóźnień $\hat{x}_t^d$ [Zeug-Żebro i in., 2013], spełniających warunek $|t - t_j| > t^*$, gdzie t^* jest ustaloną liczbą naturalną. Dodany warunek zwiększa prawdopodobieństwo, że znaleziony sąsiad nie będzie należał do trajektorii wektora $\hat{x}_t^d$.
2. Obliczamy:

$$r_n(t) = \tfrac{1}{K} \sum_{\hat{x}_{tj}^d \in Z_t} \left| x_{t+n} - x_{t_j+n} \right|, \; t = 1, 2, \ldots, M; \; n = 0, 1, \ldots, n_{\max}, \tag{2}$$

gdzie $M = N - (d - 1)\tau$, $n_{\max}$ jest ustaloną liczbą naturalną określającą liczbę iteracji.

3. Wyznaczamy średnią z $r_n(t)$ po wszystkich d-historiach:

$$r_n = \tfrac{1}{M} \sum_{t=1}^{M} r_n(t). \tag{3}$$

4. Największy wykładnik Lapunowa jest współczynnikiem regresji:

$$\ln(r_n) = \ln(r_0) + \lambda_{\max} n. \tag{4}$$

Dla szeregów chaotycznych nachylenie prostej regresji wykresu ilustrującego zależność $\ln\Delta_n$ od numeru iteracji n w początkowej fazie powinno być dodatnie. $\lambda_{\max}$ szacuje się na podstawie zbioru punktów należących do tego obszaru. Zatem oszacowana wartość $\lambda_{\max}$ zależy nie tylko od wyboru metryki, liczby najbliższych sąsiadów, wymiaru zanurzenia, ale także od ustalonej wartości $n_{\max}$, dla której współczynnik regresji jest dodatni [Kantz i Schreiber, 2004].

2. *TMAI* – taksonomiczna miara atrakcyjności inwestycji

Jedną z metod wyboru spółek, które wejdą w skład portfela optymalnego, jest wyznaczenie taksonomicznej miary atrakcyjności inwestycji (*TMAI*). Metoda ta pozwala na kompleksową ocenę spółek na podstawie najważniejszych wskaźników finansowych i rynkowych oraz przedstawienie ich w postaci syntetycznej miary.

Punktem wyjścia konstrukcji *TMAI* jest określenie dwuwymiarowej macierzy zawierającej obserwacje cech diagnostycznych badanych obiektów [Hellwig, 1968, 1979; Tarczyński, 2002]:

$$X = \lfloor x_{ij} \rfloor, \quad i = 1, ..., n, \quad j = 1, ..., m, \tag{5}$$

gdzie:
X – macierz obserwacji,
x_{ij} – wartość j-tej zmiennej diagnostycznej dla i-tego obiektu (spółki),
n – liczba obiektów,
m – liczba zmiennych diagnostycznych.

Następnym etapem jest normalizacja zmiennych diagnostycznych według wzoru:

$$y_{ij} = \frac{x_{ij} - \bar{x}_j}{S_j}, \qquad i = 1, ..., n; \quad j = 1, ..., m, \tag{6}$$

gdzie:
y_{ij} – znormalizowana obserwacja x_{ij},
$\bar{x}_j$, S_j – średnia arytmetyczna i odchylenie standardowe j-tej zmiennej,
x_{ij} – jw.

Następnie wyznacza się odległość każdego obiektu od obiektu wzorca za pomocą wzoru:

$$d_i = \left[\frac{\sum_{j=1}^{m} \left(y_{ij} - y_{0j} \right)^2}{m} \right]^{1/2}, \quad i = 1, ..., n, \tag{7}$$

gdzie:
d_i – odległość i-tego obiektu od obiektu wzorca,
y_{0j} – obiekt wzorzec ustalony na podstawie wzoru:

$$y_{0j} = \max_i \{ y_{ij} \}, \tag{8}$$

y_{ij}, m – jw.

Ostatnim etapem jest normalizacja *TMAI*:

$$TMAI_i = 1 - \frac{d_i}{d_0}, \quad i = 1, ..., n, \tag{9}$$

gdzie:
$TMAI_i$ – taksonomiczna miara atrakcyjności i-tego obiektu,
d_0 – norma zapewniająca przyjmowanie przez $TMAI_i$ wartości z przedziału [0,1],

$$d_0 = \bar{d} + 2S_d, \tag{10}$$

$\bar{d}$, S_d – średnia arytmetyczna i odchylenie standardowe d_i.

3. Budowa optymalnych portfeli akcji

Podstawowymi charakterystykami opisującymi portfele akcji są oczekiwana stopa zwrotu portfela oraz ryzyko portfela, liczone za pomocą wzorów:

$$R_p = \sum_{i=1}^{m} x_i R_i \,, \tag{11}$$

$$S_p^2 = \sum_{i=1}^{m} x_i^2 S_i^2 + 2\sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^{m} x_i x_j S_i S_j \rho_{ij} \,, \tag{12}$$

gdzie:
R_p– oczekiwana stopa zwrotu portfela m akcji,
S_p – ryzyko portfela m akcji,
R_i – oczekiwana stopa zwrotu i-tej akcji,
S_i – odchylenie standardowe akcji i-tej spółki,
ρ_{ij} – współczynnik korelacji i-tej akcji z j-tą akcją,
x_i – udział i-tej akcji w portfelu,

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \quad x_i \geq 0, \quad i = 1,...,m, \tag{13}$$

m – liczba akcji w portfelu.

Udziały akcji w portfelu zazwyczaj wyznacza się na podstawie modelu H. Markowitza [Markowitz, 1952], tak aby zminimalizować ryzyko tego portfela. W tym przypadku zadanie optymalizacji przyjmuje postać:

Zadanie 1

$$\min S_p^2, \tag{14}$$

z warunkami ograniczającymi:

$$R_p \geq R_0,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1,$$

$$x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, m,$$

gdzie:
R_0 – oczekiwana stopa zwrotu dla spółek,
pozostałe oznaczenia jw.

W celu wyznaczenia optymalnego portfela rozwiązuje się również następujące zadania optymalizacyjne [Mastalerz-Kodzis, Pośpiech, 2011]:

Zadanie 2

$$\max\left(\sum_{i=1}^{m} TMAI_i x_i\right), \tag{15}$$

z warunkami ograniczającymi:

$$R_p \geq R_0,$$

$$\sum_{i=1}^{m} S_i x_i \leq S_0,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1,$$

$$x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, m,$$

gdzie:
S_0 – średnie odchylenie standardowe spółek,
pozostałe oznaczenia jw.

Zadanie 3

$$\max\left(\sum_{i=1}^{m} TMAI_i x_i\right), \tag{16}$$

z warunkami ograniczającymi:

$$R_p \geq R_0,$$

$$\sum_{i=1}^{m} S_i x_i \leq S_0,$$

$$\sum_{i=1}^{m} A_i x_i \geq A_0,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1,$$

$$x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, m,$$

gdzie:
A_i – współczynnik asymetrii,
A_0 – uśredniony współczynnik asymetrii,
pozostałe oznaczenia jw.

Propozycja autorów polega na wykorzystaniu do budowy portfela optymalnego narzędzia opartego na teorii nieliniowych układów dynamicznych – największym wykładniku Lapunowa. W tym celu należy rozwiązać następujące zadanie maksymalizacji:

Zadanie 4

$$\max\left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_{\max i}x_i\right), \tag{17}$$

z warunkami ograniczającymi:

$$R_p \geq R_0,$$

$$\sum_{i=1}^{m} S_i x_i \leq S_0,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1,$$

$$x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, m,$$

gdzie:

$\lambda_{\max\, i}$ – największy wykładnik Lapunowa dla szeregu czasowego generowanego przez ciąg notowań akcji i-tej spółki.

4. Wyniki badań empirycznych

Badaniami empirycznymi objęto akcje następujących spółek finansowych: Bank Handlowy w Warszawie SA (BHW), Bank Zachodni WBK SA (BZW), ING Bank Śląski SA (ING), mBank SA (MBK), Bank Polska Kasa Opieki (PEO), Powszechna Kasa Oszczędności Bank Polski SA (PKO) oraz spółek niefinansowych: Grupa Apator SA (APT), Asseco Poland SA (ACP), Firma Oponiarska Dębica SA (DBC), Globe Trade Centre SA (GTC), KGHM Polska Miedź SA (KGH), LPP SA (LPP), Mostostal Zabrze SA (MSZ), Orange Polska SA (OPL), Polski Koncern Naftowy ORLEN SA (PKN), Synthos SA (SNS), Vistula Group SA (VST), Grupa Żywiec SA (ZWC).

Do wyznaczenia wartości największego wykładnika Lapunowa dla analizowanych spółek wykorzystano szeregi czasowe utworzone z logarytmów dziennych stóp zwrotu cen zamknięcia ww. akcji notowanych w okresie 1.01.2005--30.09.2013. W pierwszym kroku skonstruowano wektory opóźnień, obliczając parametry rekonstrukcji przestrzeni stanów, tj. wymiar zanurzenia i czas opóźnienia [Zeug-Żebro i in., 2013]. Następnie na podstawie algorytmu przedstawionego w punkcie 1 oszacowano wartości największego wykładnika Lapunowa[2]. Wartości $\lambda_{\max\, i}$ oraz współczynnika determinacji R^2 przedstawiono w tabeli 1.

[2] Szczegóły szacowania największego wykładnika Lapunowa dla rzeczywistych szeregów czasowych można znaleźć np. w pracy Miśkiewicz-Nawrocka [2012].

Tabela 1. Wartości największych wykładników Lapunowa dla analizowanych spółek

Spółka	Największy wykładnik Lapunowa	R^2	Spółka	Największy wykładnik Lapunowa	R^2
APT	0,0547	0,1382	SNS	0,0719	0,1567
ACP	0,0221	0,1274	VST	0,0143	0,1270
DBC	0,1534	0,3564	ZWC	0,0697	0,1513
GTC	0,0301	0,3125	BHW	0,0010	0,3320
KGH	0,0008	0,3561	BZW	-0,0034	0,2134
LPP	0,0030	0,3605	ING	0,0005	0,3134
MSZ	0,0986	0,3764	MBK	0,0024	0,3126
OPL	0,0070	0,5119	PEO	0,0009	0,1469
PKN	0,0004	0,2753	PKO	0,0401	0,3576

Źródło: Opracowanie własne.

Do dalszej analizy wzięto akcje spółek o dodatniej stopie zwrotu z inwestycji. Wartości miary *TMAI* dla badanych spółek oszacowano na podstawie danych zamieszczonych w raportach finansowych za trzeci kwartał 2013[3]. Jako zmienne diagnostyczne wybrano, w zależności od specyfiki działalności spółek, wskaźniki rynkowe i/lub wskaźniki ekonomiczno-finansowe [Nawrocki i Jabłoński, 2011; Tarczyński, 2013]. Dla spółek finansowych wzięto następujące wskaźniki:

– rentowności: rentowność aktywów (ROA), rentowność kapitału własnego (ROE),
– adekwatności kapitałowej (współczynnik wypłacalności).

Natomiast dla spółek niefinansowych zastosowano:

– wskaźniki płynności: wskaźnik płynności bieżącej, wskaźnik płynności szybkiej,
– wskaźniki rentowności: rentowność aktywów (ROA), rentowność kapitału własnego (ROE), marża ze sprzedaży,
– wskaźniki zadłużenia: wskaźnik ogólnego zadłużenia,
– sprawność zarządzania: wskaźnik rotacji należności, wskaźnik rotacji zapasów.

Wybór tych cech był podyktowany względami merytorycznymi oraz dostępnością danych potrzebnych do ich wyznaczenia. Kryterium wyboru spółek do analizy taksonomicznej były dodatnie wartości powyższych wskaźników. Wartości oszacowanej miary *TMAI* dla analizowanych spółek na dzień 30.09.2013 przedstawia tabela 2.

[3] Dane pochodzą z obliczeń własnych autora wykonanych na podstawie raportów finansowych spółek.

Tabela 2. Wartości taksonomicznej miary atrakcyjności inwestycji dla analizowanych spółek

Spółka	*TMAI*	Spółka	*TMAI*	Spółka	*TMAI*
APT	0,22631	OPL	0,02758	BZW	0,504334
ACP	0,14432	SNS	0,18244	ING	0,195798
DBC	0,11120	VST	0,097475	MBK	0,313544
KGH	0,23225	ZWC	0,213638	PEO	0,585804
LPP	0,31304	BHW	0,836476	PKO	0,334507

Źródło: Opracowanie własne.

W kolejnym etapie badania zbudowano pięć optymalnych portfeli akcji, rozwiązując przedstawione w sekcji 3 zadania optymalizacyjne. W skład portfeli oznaczonych numerami 1-4 weszły spółki będące odpowiednio rozwiązaniem zadania: 1, 2, 3, 4. Natomiast w portfelu 4' umieszczono spółki będące rozwiązaniem zadania 4, dla których przyjęto dodatkowe założenie o istotności oszacowanego wykładnika Lapunowa, tj. współczynnik determinacji $R^2 > 0,3$. Ponadto w celu dywersyfikacji ryzyka tworzonych portfeli uwzględniono jeszcze jeden warunek ograniczający w postaci: $x_i \leq 0,3$, $i = 1, \ldots, m$. Do obliczenia udziałów poszczególnych spółek w portfelu wykorzystano narzędzie *solver* będące dodatkiem do arkusza kalkulacyjnego *Excel*. Następnie oszacowano stopę zwrotu i ryzyko każdego portfela. Wyniki umieszczono w tabeli 3. Znak „-" postawiono przy spółkach, które nie weszły w skład portfela optymalnego oraz przy tych, które ze względu na ujemne wartości wskaźników ekonomiczno-finansowych nie były brane pod uwagę przy szacowaniu taksonomicznej miary *TMAI* (portfel 2 i 3) oraz ze względu na nieistotność oszacowanego największego wykładnika Lapunowa nie zostały uwzględnione w budowie portfela 4'.

Tabela 3. Stopa zwrotu, ryzyko i udziały akcji w wyznaczonych portfelach

Spółka	Udziały akcji				
	Portfel 1	Portfel 2	Portfel 3	Portfel 4	Portfel 4'
1	2	3	4	5	6
APT	0,0525	-	0,0002	-	-
ACP	0,1688	-	-	-	-
DBC	0,1180	-	0,0001	0,3	0,3000
GTC	-	-	-	-	-
KGH	-	-	-	-	-
LPP	0,0387	-	0,0005	-	-
MSZ	0,0418	-	-	0,3	0,3000
OPL	0,1170	-	-	-	0,0935
PKN	-	-	-	-	-
SNS	0,0444	-	0,1463	0,1651	-

cd. tabeli 3

1	2	3	4	5	6
VST	0,1346	-	0,0020	0,1004	-
ZWC	0,1403	0,0609	0,0647	0,1346	-
BHW	-	0,3000	0,2039	-	0,2020
BZW	-	0,3000	0,2822	-	-
ING	0,0079	-	-	-	-
MBK	0,0004	-	-	-	-
PEO	0,0612	0,3000	0,3000	-	0,1044
PKO	0,0743	0,0391	-	-	-
Stopa zwrotu portfela	**0,0033**	**0,0030**	**0,0028**	**0,0029**	**0,0026**
Ryzyko portfela	**$4,8 \cdot 10^{-9}$**	**$7,3 \cdot 10^{-8}$**	**$6,1 \cdot 10^{-8}$**	**$1,9 \cdot 10^{-8}$**	**$2,8 \cdot 10^{-8}$**

Źródło: Opracowanie własne.

Na podstawie danych przedstawionych w tabeli 3 można stwierdzić, że portfel 1 charakteryzuje się najwyższą oczekiwaną stopą zwrotu i najniższym poziomem ryzyka. Najniższą stopę zwrotu oszacowano dla portfela 4', utworzonego na podstawie wartości największego wykładnika Lapunowa.

W tabeli 4 przedstawiono roczne stopy zwrotu dla wyznaczonych portfeli uzyskane w okresie 30.09.2013-30.09.2014.

Tabela 4. Roczna stopa zwrotu dla wyznaczonych portfeli akcji

	Portfel 1	Portfel 2	Portfel 3	Portfel 4	Portfel 4'
Stopa zysku portfela (%)	2,6087%	7,3327%	7,0074%	5,1612%	19,3240%

Źródło: Opracowanie własne.

Analizując roczne stopy zwrotu dla wyznaczonych portfeli akcji (tabela 4), należy zauważyć, że największy zysk w okresie 30.09.2013-30.09.2014 można było uzyskać inwestując w portfel 4' zbudowany na podstawie wartości największych wykładników Lapunowa. Portfele 2 i 3 będące rozwiązaniem zadania maksymalizacji średniej ważonej miar *TMAI* (zadanie 2 i 3) charakteryzuje zbliżona wartość zysku. Najniższą stopę zwrotu uzyskano dla portfela 1 zbudowanego na podstawie klasycznego modelu Markowitza.

Podsumowanie

Zastosowanie metod konstrukcji portfela optymalnego wywodzących się z analizy fundamentalnej jest ważnym elementem badań, gdyż uwzględnia istotną w inwestowaniu sytuację ekonomiczno-finansową przedsiębiorstwa. Równie ważne z punktu widzenia autorów jest użycie w procesie budowy portfela narzędzia identyfikacji chaosu deterministycznego, tj. największego wykładnika Lapunowa. Finansowe szeregi czasowe wykazują zachowania regularne lub nieregularne, symetryczne lub asymetryczne. Wieloletnie badania wykazały, że nieregularne zachowanie szeregu czasowego można zapisać w postaci nieliniowego modelu dynamicznego. Zauważono bowiem, że układy złożone mają własną dynamikę. Ich uporządkowanie i rozwój nie jest przypadkowy, lecz wynika z procesów, jakie w nich zachodzą. Modele te stały się bardzo ważne w teorii ekonomii. Za ich pomocą można próbować opisywać zjawiska i procesy ekonomiczne, które przebiegają w sposób nieregularny, np. trudne do przewidzenia fluktuacje kursów walutowych oraz kursów akcji na giełdzie [Zeug-Żebro, 2013].

Literatura

Devaney R.L. (1987), *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Redwood City.

Hellwig Z. (1979), *Wielowymiarowa analiza porównawcza i jej zastosowanie do badania wielocechowych obiektów gospodarczych*, Referat na I Konferencję *Metody taksonomiczne i ich zastosowania w badaniach ekonomicznych*, Szklarska Poręba.

Hellwig Z. (1968), *Zastosowanie metody taksonomicznej do typologicznego podziału krajów ze względu na poziom ich rozwoju oraz zasoby i strukturę wykwalifikowanych kadr*, „Przegląd Statystyczny”, nr 4.

Kantz H. (1994), *A Robust Method to Estimate the Maximal Lyapunov Exponent of a Time Series*, “Physical Letters A”, Vol. 185 (1), s. 77-87.

Kantz H., Schreiber T. (2004), *Nonlinear Time Series Analysis*, Cambridge University Press (second edition).

Markowitz H. (1952), *Portfolio Selection*, “Journal of Finance”, s. 77-91.

Mastalerz-Kodzis A., Pośpiech E. (2011), *Fundamental and Behavioral Methods in Investment Decision Making* [w:] *Financial Management of Firms and Financial Institutions*, Wydawnictwo Technicznego Uniwersytetu w Ostrawie, Ostrawa, s. 250-257.

Miśkiewicz-Nawrocka M. (2012), *Zastosowanie wykładników Lapunowa do analizy ekonomicznych szeregów czasowych*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego, Katowice.

Nawrocki T., Jabłoński B. (2011), *Inwestowanie na rynku akcji. Jak ocenić potencjał rozwojowy firm notowanych na GPW w Warszawie*, Wydawnictwo CeDeWu.

Rosenstein M.T., Collins J.J., De Luca C.J. (1993), *A Practical Method for Calculating Largest Lyapunov Exponents from Small Data Sets*, “Physica D”, Vol. 65, s. 117-134.

Tarczyński W. (2013), *Ocena efektywności metod analizy portfelowej na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie za lata 2001-2013*, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego nr 761, Finanse, rynki finansowe, ubezpieczenia nr 60, Szczecin, s. 537-550.

Tarczyński W. (2002), *Fundamentalny portfel papierów wartościowych*, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa.

Zawadzki H. (1996), *Chaotyczne systemy dynamiczne. Elementy teorii i wybrane zagadnienia ekonomiczne*, Zeszyty Naukowe Akademii Ekonomicznej, Katowice.

Zeug-Żebro K., Dębicka J., Kuśmierczyk P., Łyko J. (2013), *Wybrane modele matematyczne ekonomii. Decyzje i wybory*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego, Wrocław.

THE APPLICATION OF LYAPUNOV EXPONENTS TO BUILDING OPTIMAL PORTFOLIOS

Summary: Portfolio analysis is one of the most important techniques for investing in the capital market. Its main goal is to diversify the investment risk. In addition to the classical concept of Markowitz, researchers have developed methods which are its modifications, but they have also created new, alternative tools. An alternative approach proposed in the paper is the use of the measure for identifying chaos, i.e. the largest Lyapunov exponent. The paper aims to construct optimal portfolios determined based on the largest Lyapunov exponent, the *TMAI* measure and the Markowitz portfolio.

Keywords: portfolio analysis, largest Lyapunov exponent, measure *TMAI*.