

Adrianna Mastalerz-Kodzis

# TEORIA FAL ELLIOTTA A TEORIA FRAKTALI – PODOBIEŃSTWA I RÓŻNICE W PODEJŚCIU DO MODELOWANIA SZEREGÓW ORAZ OPISU ZACHOWAŃ INWESTORA

## Wprowadzenie

Opisem zachowania inwestora w procesie podejmowania decyzji zajmuje się wiele teorii ekonomicznych oraz psychologicznych. Niniejszy artykuł wskazuje na dwie z nich: teorię fal Elliotta oraz teorię bazującą na geometrii fraktalnej. Obydwie teorie są interesujące z matematycznego, a w szczególności geometrycznego punktu widzenia, i uwzględniają w procesie podejmowania decyzji inwestycyjnych wpływ danych historycznych na zachowania inwestora, jednakże opierają się na różnych przesłankach, wykorzystują inne narzędzia matematyczno-ekonometryczne. Zaskakujące są jednak pewne podobieństwa w modelowaniu np. szeregów czasowych za pomocą tych dwóch podejść. Niniejszy artykuł jest zatem polemiką na temat możliwości konstrukcji modelu zachowania inwestora z zastosowaniem wybranych metod.

Artykuł składa się z trzech części. W pierwszej krótko podano opis teorii fal, w drugiej skupiono się na wybranych elementach teorii fraktali, zaś część trzecia ma charakter empiryczny.

## 1. Elementy teorii fal

Teoria fal została stworzona w latach 30. XX wieku przez Ralpha Nelsona Elliotta, który próbował uwzględnić aspekt psychologiczny w zachowaniu uczestników rynku [4]. Teoria fal Elliotta jest analizą zmian na rynku akcji w kontekście psychologii tłumu. Między innymi na bazie teorii Elliotta rozwinęła się analiza techniczna rynków finansowych. Połączenie metod analizy technicznej, fundamentalnej oraz teorii fraktali zdaje się być ciekawym uzupełnieniem dotychczas stosowanych metod w teorii inwestowania na giełdzie.

## 1.1. Cykle, ciągi liczb Fibonacciego

Istnieje teoria głosząca, że wszystkie zjawiska na świecie mają charakter cykliczny [6]. Niektóre cykle trwają lata, inne miesiące, tygodnie, dni czy minuty. Rynki finansowe także zachowują się cyklicznie.

Zgodnie z teorią Elliotta istnieje dziewięć stopni trendu ze względu na długość cyklu:

- wielki supercykl – od kilku dziesięcioleci do kilku wieków,
- supercykl – od kilku lat do kilku dziesięcioleci,
- cykl – od roku do kilku lat,
- fale pierwotne – od kilku miesięcy do kilku lat,
- fala pośrednie – od kilku tygodni do kilku miesięcy,
- fale mniejsze,
- fale minutowe,
- fale minutowe,
- fale subminutkowe.

Ze względu na brak danych trudno jest rozważać wielki supercykl. Jednak efekty supercykli aż do fal minutowych można obserwować biorąc pod uwagę dane makroekonomiczne oraz giełdowe (przykłady w rozdziale 3 niniejszego artykułu).

Teoria Elliotta opiera się na analizie trzech elementów rynku: kształtu fali, proporcji i czasu. Uwzględnia się w niej aspekty psychologiczne, które oddziałują na rynki finansowe. Podstawowe założenia tej teorii to:

- rynek podlega cyklicznemu zachowaniu pięcioletowego ruchu w górę oraz trójfaleowego spadku w dół,
- każdej akcji odpowiada reakcja.

Według teorii Elliotta ceny zmieniają się zgodnie z cyklami opartymi na ciągu liczb Fibonacciego. Może on być zdefiniowany rekurencyjnie w następujący sposób:

$$\begin{aligned} F_0 &= 0, F_1 = 1, \\ F_n &= F_{n-1} + F_{n-2}, \text{ dla } n \geq 2 \end{aligned} \quad (1)$$

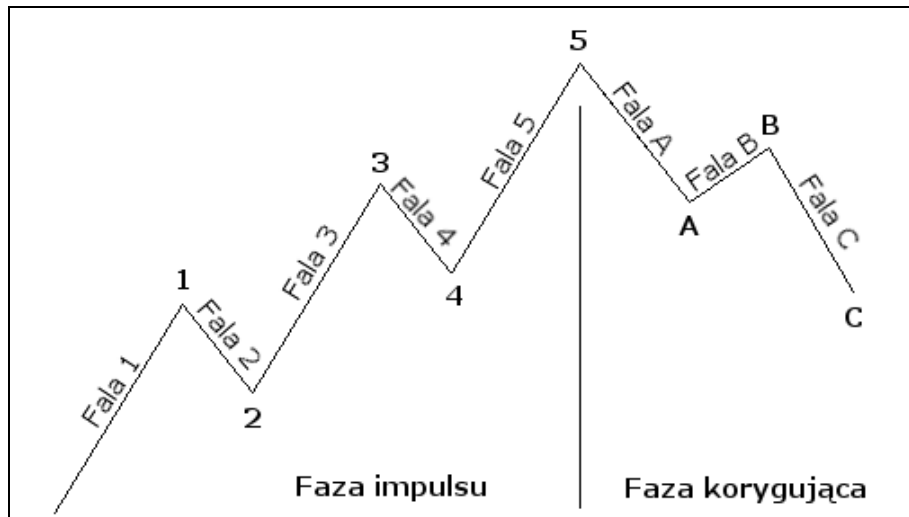
Ciąg ten posiada wiele interesujących własności. Granica ilorazu stosunku wyrazu ciągu do wyrazu go poprzedzającego wynosi 1,618. Liczba ta nazywana „złotym podziałem” jest jednym z rozwiązań równania:

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0 \quad (2)$$

czyli:

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad (3)$$

Klasyczny wzrost składa się z pięciu fal, z których trzy stanowią fale wzrostu (1,3,5), zaś dwie kolejne fale korygujące (2,4). Podczas spadku powstają trzy fale: dwie są zniżkowe (A, C) i jedna wzrostowa (B).



Rys. 1. Pojedynczy cykl

Źródło: Opracowanie na podstawie [4].

## 1.2. Charakterystyka fal cyklu

Fale cyklu posiadają następujące cechy. Fala numer:

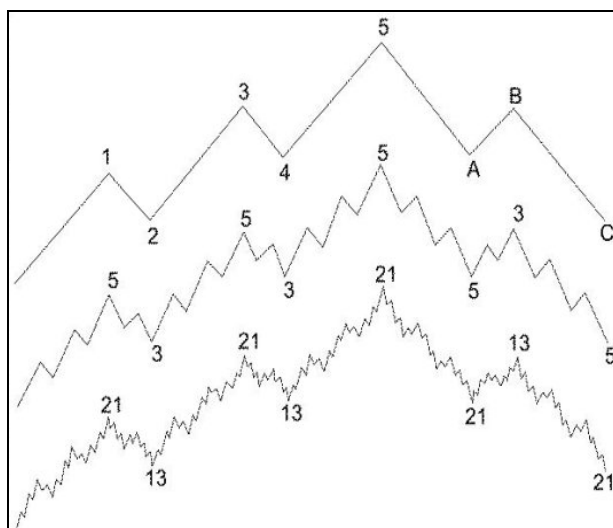
1. Jest początkiem nowego trendu, może zająć połowę długości trendu wzrostowego. Jest najczęściej najkrótszą z pięciu fal. W tym czasie rynek wykazuje się dużą dynamiką.
2. Zabiera część fali 1, nie może zejść poniżej poziomu początku fali 1.
3. Jest zazwyczaj najdłuższa, najszybciej zmieniają się ceny podczas jej trwania, występuje najwyższy wolumen obrotów, nigdy nie jest najkrótszą z fal. Co raz większą rolę odgrywają elementy fundamentalne rynku.
4. Koryguje wzrosty z fali 3. Nie powinna zachodzić na falę 1. Różni się nachyleniem od fali 2.
5. Wykazuje mniejszą dynamikę niż fala 3, w trakcie jej trwania dochodzi do spadków obrotów, osłabienia siły rynku i zmiany trendu.
  - A. Jest początkiem trendu spadkowego. Często wraz ze spadkami cen dochodzi do wzrostu wolumenu, następuje korekta rynku.

- B. Następuje odbicie do góry przy niskim wolumenie obrotów. Zwyżka może sięgnąć szczytu fali 5, jest widoczny podwójny szczyt, stanowi on sygnał zmiany trendu.
- C. Kolejne zniżki. Ceny mogą spaść nawet poniżej dołka fali A.

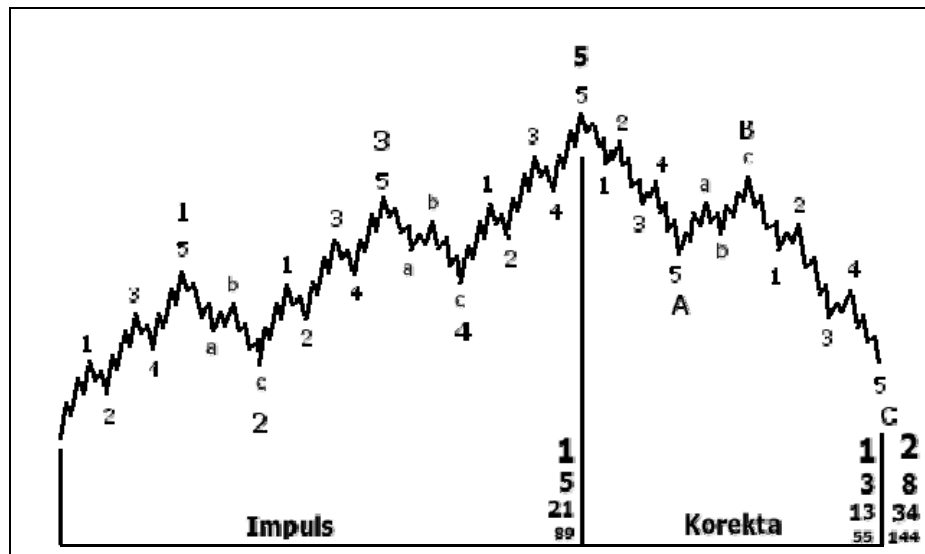
W praktyce fale mogą przybierać różne zmodyfikowane formy. Na przykład fale impulsu w trendzie wzrostowym mogą się wydłużać. Taka sytuacja zazwyczaj dotyczy jednej z fal impulsu, przy czym pozostałe dwie fale są do siebie podobne. Na przykład jeżeli wydłużaniu ulega fala 3, to wówczas fala 1 i 2 mają podobną długość, budowę i czas trwania. Zmianie mogą podlegać także fale korygujące.

Każda fala dzieli się na fale niższego stopnia, które dzielą się na fale jeszcze niższego stopnia. Na rysunku 2 przedstawiono dwie duże fale – wzrostową i korekcyjną, składające się na jeden pełny cykl. Dzielą się one na osiem mniejszych fal składających się z 34 fal jeszcze niższego stopnia. Przy kolejnym podziale uzyskano 144 fale jeszcze niższego stopnia.

Pełny cykl dzieli się na cykl hossy, w którym występują odpowiednio następujące ilości fal: 1, 5, 21, 89. W następującym po nim cyklu bessy można wyróżnić 1, 3, 13, 55 fal różnych stopni. Wszystkie wymienione powyżej liczby należą do ciągu Fibonacciego. Analizując fale korekty A, B, C, można dostrzec, że fale spadkowe A i C dzielą się na pięć fal. Wynika to z faktu, że zmierzają one w kierunku zgodnym z falą wyższego stopnia. Fala B składa się w tym przypadku z trzech fal, ponieważ jej kierunek jest przeciwny do fali wyższego stopnia.



a)



b)

Rys. 2. a) Różne poziomy fal Elliotta, b) Pełny cykl rynkowy (144 fale)

Źródło: [4].

### 1.3. Proporcje fal

Przy badaniu proporcji fal mają zastosowanie liczby z ciągu Fibonacciego. Główne zależności można zapisać w następujących punktach:

1. Jeżeli fala 3 się wydłuża, to minimalny jej zasięg stanowi sumę wartości poziomu dołka fali 2 oraz iloczynu długości fali 1 i liczby 1,618.
2. Zasięg fali 5 stanowi sumę wartości szczytu lub dna fali 1 oraz podwójnego iloczynu długości fali 1 i liczby 1,618.
3. Jeżeli fale 1 i 3 są jednakowej długości, wówczas najprawdopodobniej fala 5 będzie wydłużona. Jej zasięg oblicza się poprzez dodanie do poziomu dna fali 4 iloczynu liczby 1,618 oraz różnicy odległości szczytu fali 3 i poziomu dna fali 1.
4. W przypadku zygzaka (5-3-5) długość fali C oblicza się mnożąc liczbę 0,618 i długość fali A. Otrzymany wynik jest odejmowany od poziomu dna fali A.
5. Jeżeli ma miejsce płaska korekta (3-3-5), długość fali C stanowi 1,618 fali A.

Obliczone współczynniki procentowe Fibonacciego pozwalają określić wielkość przyszłej korekty cen. Wykorzystuje się zaokrąglone współczynniki 38%, 50%, 62%. Podczas silnego trendu korekta może wynieść 38%, natomiast w słabym trendzie – 62%.

Problem analizy czasu w teorii Elliotta jest uważany za najmniej istotny. W tym przypadku analitycy doszukują się również na osi czasu sekwencji liczb ciągu Fibonacciego.

Teoria Elliotta wygląda efektownie, budzi duże zainteresowanie wśród matematyków, a także inwestorów. Stosowanie analizy rynku z wykorzystaniem teorii fal wymaga dużego doświadczenia. Dlatego też równoległe do analizy z wykorzystaniem teorii Elliotta powinny być stosowane inne narzędzia i metody analityczne. Dopiero znalezienie w nich potwierdzenia przypuszczeń wysuniętych na podstawie teorii fal może prowadzić do właściwych wniosków.

Teoria fal Elliotta opiera się na regułach czysto matematycznych, graficznie fale w prostokątnym układzie współrzędnych są sumą odcinków (czasem o nieskończonej małej długości). Cykle długoterminowe składają się z cykli krótszych, na które jeszcze składają się fale minutowe, minutowe. Można zatem szukać analogii pomiędzy podziałem fal a elementami geometrii fraktalnej czy też multifraktalnej.

## 2. Wybrane elementy geometrii fraktalnej

Ceny akcji oraz indeksów giełdowych w wyniku gry rynkowej zmieniają się w czasie. Zmiany te są odnotowywane w dyskretnych momentach czasu (każdego dnia) bądź co minutę (notowania ciągłe). Wykresy obrazujące zachodzące zmiany w czasie cen instrumentów giełdowych są łamanymi o wymiarze topologicznym równym jeden.

Fraktalem nazywa się zbiór  $A \subset \mathfrak{R}^n$  ( $n \geq 1$ ), który:

- ma wymiar Hausdorffa większy niż wymiar topologiczny<sup>\*</sup>,
- posiada pewną formę samopodobieństwa (samoafiniczności), może to być samopodobieństwo przybliżone lub statystyczne,
- w miarę powiększania fragmentów zbioru  $A$  więcej jego detali staje się widocznych,
- jest zdefiniowany w prosty, często rekurencyjny sposób.

W modelach matematycznych stosowanych w finansach, modelach z czasem ciągłym stosuje się analizę stochastyczną. Wychodzi się z założenia, że dynamika procesu zmian cen instrumentów finansowych (akcji, indeksów giełdowych, kursów walutowych) jest opisana za pomocą stochastycznych równań różniczkowych Itô. Rozwiązaniami tych równań są procesy stochastyczne, których trajektorie aproksymują realne, quasi-fraktalne szeregi czasowe, tj. wykresy zmian cen instrumentów finansowych w czasie. Fraktalami losowymi są wykresy trajektorii procesów stochastycznych z czasem ciągłym, takie jak proces ru-

---

<sup>\*</sup> Wymiar Hausdorffa można zastąpić wymiarem pojemnościowym, samopodobieństwa bądź też korelacyjnym. Zob. [7; 3].

chu Browna (standardowy, arytmetyczny, geometryczny), ułamkowy i multiułamkowy proces ruchu Browna [8; 10; 1].

Obiekty fraktalne posiadają własność samopodobieństwa. Można je podzielić na części o takiej własności, że każda z nich stanowi pomniejszoną kopię całości. Wykres wahań cen papierów wartościowych wygląda podobnie niezależnie od tego, czy się go pomniejszy, czy też powiększy, by dopasować go do określonej skali czasu lub cen. O samopodobieństwie mówi się wtedy, gdy każdy element obrazu zostaje pomniejszony lub powiększony w takim samym stosunku. Jednakże wykresy notowań na rynkach finansowych zachowują się „nie całkiem podobnie”, biorąc pod uwagę wykres roczny, miesięczny bądź dzienny. Czasami oś czasu jest bardziej „ściśnięta” od osi cen, czasami na odwrót. Opisem tego typu zachowań rynku są multifraktale.

Procesy multifraktalne są zależne od funkcji Höldera ( $H(t) \in (0,1)$ ), a ułamkowy ruch Browna zależy od wykładnika Hursta ( $H \in (0,1)$ ).

Niech  $(X, d_x)$  i  $(Y, d_y)$  będą przestrzeniami metrycznymi. Funkcję  $f : X \rightarrow Y$  nazywamy funkcją Höldera o wykładniku  $\alpha$  ( $\alpha > 0$ ), jeśli dla każdego  $x, y \in X$  takich, że  $d_x(x, y) < 1$  funkcja spełnia nierówność z dodatnią stałą  $c$ :

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq c \cdot d_X(x, y)^\alpha \quad (4)$$

Niech będzie dana funkcja  $f : D \rightarrow \mathfrak{R}$  ( $D \subset \mathfrak{R}$ ) oraz parametr  $\alpha \in (0,1)$ . Funkcja  $f : D \rightarrow \mathfrak{R}$  jest funkcją klasy  $C^\alpha$  Höldera ( $f \in C^\alpha$ ), jeżeli istnieją stałe  $c > 0$  oraz  $h_0 > 0$  takie, że dla każdego  $x$  oraz wszystkich  $h$  takich, że  $0 < h \leq h_0$  jest spełniona nierówność:

$$|f(x+h) - f(x)| \leq c h^\alpha \quad (5)$$

Niech  $x_0 \in D \subset \mathfrak{R}$ . Funkcja  $f : D \rightarrow \mathfrak{R}$  jest w punkcie  $x_0$  funkcją klasy  $C_{x_0}^\alpha$  Höldera, jeżeli istnieją stałe  $\varepsilon, c > 0$  takie, że dla każdego  $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$  jest spełniona nierówność:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq c |x - x_0|^\alpha \quad (6)$$

Punktowym wykładnikiem Höldera funkcji  $f$  w punkcie  $x_0$  nazywa się liczbę  $\alpha_f(x_0)$  daną wzorem:

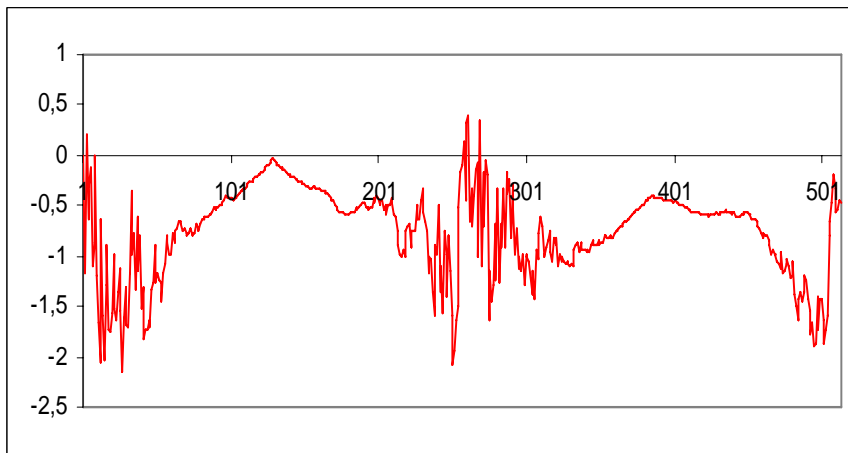
$$\alpha_f(x_0) = \sup \{ \alpha : f \in C_{x_0}^\alpha \} \quad (7)$$

Funkcją Höldera dla funkcji  $f$  nazywa się funkcję, która każdemu punktowi  $x \in D$  przyporządkowuje liczbę  $\alpha_f(x)$ .

Niech  $H_t : [0, \infty) \rightarrow (0, 1)$  będzie funkcją Höldera o wykładniku  $\alpha > 0$ . Multiłamkowym procesem ruchu Browna z parametrem funkcyjnym  $H_t$  jest nazywany proces stochastyczny  $B_{H_t}(t)$  zdefiniowany dla  $t \geq 0$  wzorem:

$$B_{H_t}(t) = \frac{1}{\Gamma(H_t + \frac{1}{2})} \left\{ \int_{-\infty}^0 [(t-s)^{H_t-\frac{1}{2}} - (-s)^{H_t-\frac{1}{2}}] dB(s) + \int_0^t (t-s)^{H_t-\frac{1}{2}} dB(s) \right\} \quad (8)$$

gdzie  $B$  jest standardowym procesem ruchu Browna.

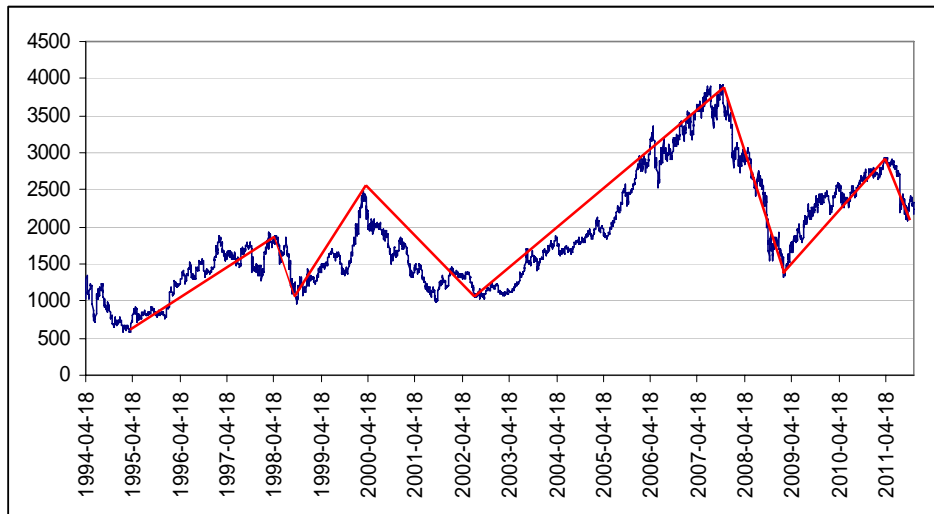


Rys. 3. Multiłamkowy proces ruchu Browna dla funkcji Höldera w postaci  $H(t) = (\sin^2(6t) + 0,1) / 1,3$

### 3. Podejmowanie decyzji z uwzględnieniem powyższych teorii

Do analizy empirycznej posłużą dane indeksu GPW w Warszawie – WIG20 za okres 16.04.1994-21.11.2011. Widać podobieństwa rysunków teoretycznych 1 i 2 oraz rysunku empirycznego 4. Wyraźnie w badanym okresie są zaznaczone fale wzrostowe 1, 3 oraz 5, a także fale zniżkowe A oraz C. Można także wyodrębnić fale korygujące: 2, 4 oraz B.



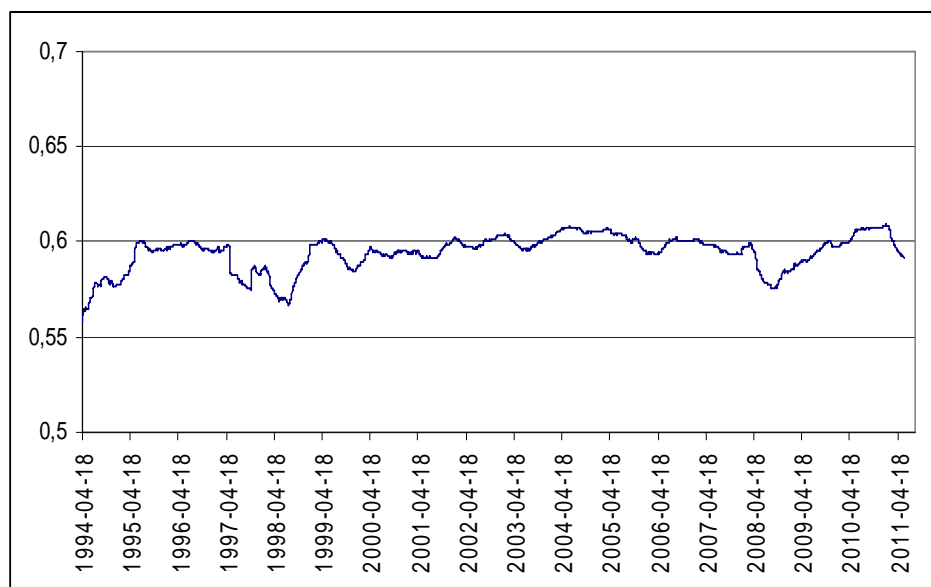


Rys. 4. Wartości kursu zamknięcia indeksu WIG20 w okresie 16.04.1994-21.11.2011

Źródło: Opracowanie własne na podstawie danych GPW w Warszawie.

Analizując długość fali A oraz korzystając z własności mówiącej, że długość fali C oblicza się mnożąc liczbę 0,618 i długość fali A, otrzymuje się informację, że fala zniżkowa C zakończy się około 4474 notowania (około lutego 2012 roku) na poziomie około 1372. Jeżeli natomiast ma miejsce płaska korekta, wówczas długość fali C stanowi 1,618 fali A, czyli fala C zakończy się około 4818 notowania (około lipca 1013 roku), miałyby ona jednak poziom ujemny! Podobnie można analizować fale krótsze oraz liczby z ciągu Fibonacciego.

Dla danych indeksu WIG20 obliczono metodą przeskalowanego zakresu wykładnik Hursta. Jego wartość dla całego szeregu to 0,594657, a zatem szereg jest persystentny, występuje w nim pamięć, jednakże nie jest on stacjonarny, co można zbadać za pomocą testu. Świadczy to także o braku stacjonarności, np. nieregularny kształt wyestymowanej funkcji Höldera. Punktowe wykładniki Höldera przedstawia rysunek 5. Wykładniki zawierają się w przedziale (0,56;0,61). Świadczy to o pamięci w szeregu, czyli na obserwacje przyszłe mają wpływ obserwacje historyczne. Z prawdopodobieństwem bliskim 0,6 po wzroście wartości indeksu nastąpi kolejny wzrost (po spadku kolejny spadek), z prawdopodobieństwem 1-0,6 trend się odwróci.



Rys. 5. Punktowe wykładniki Höldera dla danych WIG20 w okresie 16.04.1994-21.11.2011

Biorąc pod uwagę wielkości wyznaczone za pomocą fal Elliotta, jeszcze przez kilka miesięcy będzie występował trend spadkowy, patrząc zaś na wartości funkcji Höldera można dodać, że z niewielkimi wahaniami wartości indeksowych.

## Podsumowanie

Decydent podejmujący działalność inwestycyjną kieruje się chęcią osiągnięcia maksymalnego zysku przy minimalnym ryzyku. Racjonalny inwestor może w tym działaniu posilkować się różnymi metodami (w tym ilościowymi) umożliwiającymi analizy i wspomagającymi proces podejmowania decyzji.

Połączenie wybranych metod ilościowych jest uzasadnione, jednakże czas pokaże, na ile uwzględnienie powyższych metod będzie przydatne w trakcie podejmowania decyzji oraz zarządzania ryzykiem inwestycyjnym. Z pewnością jednak opisane powyżej metody, biorąc pod uwagę ich własności geometryczne, są interesujące dla matematyka i przydatne dla inwestora.

## Literatura

1. Benassi A., Jaffard S., Roux D.: *Gaussian Processes and Pseudodifferential Elliptic Operators*. „Rev. Mat. Iberoamericana” 1997, 13 (1), s. 19-89.
2. Daoudi K., Lévy Véhel J., Meyer Y.: *Construction of Continuous Functions with Prescribed Local Regularity*. „Journal of Constructive Approximations” 1998, 014(03), s. 349-385.

3. Falconer K.J.: *Fractal Geometry, Mathematical Foundations and Applications*. John Wiley & Sons, New York 1990.
4. Frost A.J., Prechter R.R.: *Teoria fal Elliotta*. Wydawnictwo WIG-PRESS, Warszawa 1995.
5. Jaworski J.: *Teoria i praktyka zarządzania finansami przedsiębiorstw*. CeDeWu, Warszawa 2010.
6. Lewandowski A., Michalski T.: *Analiza techniczna rynku kapitałowego*. Szkoła Główna Handlowa, Warszawa 2001.
7. Mandelbrot B.B.: *Fractals and Scaling in Finance. Discontinuity, Concentration, Risk*. Springer-Verlag, New York 1997.
8. Mandelbrot B.B., Van Ness J.W.: *Fractional Brownian Motion, Fractional Noises and Applications*. „SIAM Review“ 1968, Vol. 10, No. 4, s. 422-437.
9. Nowakowski J., Borowski K.: *Zastosowanie teorii Carolana i Fischera na rynku kapitałowym*. DIFIN, Warszawa 2005.
10. Peltier R.F., Lévy Véhel J.: *Multifractional Brownian Motion: Definition and Preliminary Results*. INRIA Recquencourt, Rapport de recherche No. 2645, 1995.
11. Surdel P.: *Forex – analiza techniczna*. Złote Myśli, Warszawa 2004.

## ELLIOTT THEORY AND FRACTALS – SIMILARITIES AND DIFFERENCES BETWEEN MODELLING FINANCIAL TIME SERIES AND DESCRIPTIONS OF INVESTORS DECISION MAKING

### Summary

The article presents theoretical basis and practical applications of selected quantity methods that can be used in modeling financial time series, where elements of Elliott theory and fractal geometry are included. The aim of this work is to present models to support the investor in decision making, which includes new market tendencies. The process of investing into financial markets is a dynamic process depending on frequent changes, that direction and impact is difficult to predict in the long periods of time. This work shows theoretical basis of used methods and results of carried out empirical analyses.