PRZEGLĄD STATYSTYCZNY
R. LXII– ZESZYT 1 – 2015

KATARZYNA FILIPOWICZ, RAFAŁ WISŁA, TOMASZ TOKARSKI

PRODUKTYWNOŚĆ KAPITAŁU A INWESTYCJE ZAGRANICZNE W DWUBIEGUNOWYM MODELU WZROSTU GOSPODARCZEGO – ANALIZA KONWERGENCJI[1]

1. WPROWADZENIE

Celem prezentowanego opracowania jest analiza oddziaływania inwestycji krajowych i zagranicznych na równowagę długookresowego wzrostu gospodarczego na gruncie dwubiegunowego modelu wzrostu. Model ten stanowi rozszerzenie neoklasycznego modelu wzrostu Solowa (1956) o przepływy inwestycyjne. W modelu analizuje się bowiem funkcjonowanie dwóch gospodarek – nazywanych dalej umownie gospodarkami bogatą oraz biedną[2]. W prezentowanym modelu zakłada się m.in., że zarówno gospodarka bogata inwestuje w gospodarce biednej, jak i gospodarka biedna inwestuje w bogatej. Co więcej, przyjmuje się, że przepływy inwestycyjne między tymi gospodarkami zależne są od produktywności kapitału w obu typach rozważanych gospodarek.

Struktura opracowania przedstawia się następująco. W punkcie 2 znajduje się przegląd literatury dotyczącej determinantów przepływów inwestycyjnych. Punkt 3 zawiera założenia rozważanego modelu wzrostu gospodarczego oraz analizę stabilności i właściwości ekonomicznych długookresowej równowagi owego modelu wzrostu (przez punkt równowagi rozważanego w pracy modelu wzrostu rozumie się asymptotycznie stabilny punkt stacjonarny analizowanego weń układu równań różniczkowych[3]). W punkcie 4 przedstawiono kalibrację jego parametrów oraz symulacje

---

[1] Autorzy dziękują Pani Profesor Magdalenie Osińskiej (z Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu) oraz Panom Profesorom Eugeniuszowi Kwiatkowskiemu i Michałowi Majsterkowi (z Uniwersytetu Łódzkiego) za uwagi do wstępnej wersji prezentowanego opracowania. Rzecz jasna, całkowita odpowiedzialność za ostateczną wersję pracy spada na autorów.

[2] Wydaje się, że gospodarki te można utożsamiać zarówno z grupami bogatych gospodarek krajowych północy i biednych gospodarek południa (w skali gospodarki światowej), gospodarek Europy Zachodniej i Wschodniej (w skali Europy), regionów północy i południa we Włoszech lub województw zachodu i wschodu w Polsce.

[3] Szeroki przegląd alternatywnych modeli wzrostu gospodarczego oraz stanów długookresowej równowagi znaleźć można np. w pracach Acemoglu (2009) lub Aghiona, Howitta (2009).

numeryczne wybranych stanów długookresowej równowagi modelu. Opracowanie kończy punkt 5, w którym znaleźć można podsumowanie prowadzonych w nim rozważań oraz ważniejsze wnioski.

1. PRZEGLĄD LITERATURY

Międzynarodowe ugrupowania integracyjne, gospodarki krajowe, czy wydzielone w ich granicach względnie jednorodne obszary, odróżniające się od terenów przyległych naturalnymi lub nabytymi atrybutami cechuje zróżnicowany poziom i tempo wzrostu gospodarczego[4]. Do kryzysu w 2008 roku dysproporcje między gospodarkami regionów w UE malały. Było to spowodowane głównie tym, iż regiony z najniższym PKB na mieszkańca rozwijały się ponadprzeciętnie szybko i doganiały zamożniejsze regiony. W latach 2008–2011 dysproporcje między regionami uległy niewielkiemu pogłębieniu (Komisja Europejska, 2014, s.3). Duże dysproporcje gospodarcze zarówno między gospodarkami krajowymi jak i regionami można dostrzec w obszarze Północnoamerykańskiego Układu Wolnego Handlu, w państwach BRIC (Brazylia, Rosja, Indie, Chiny) oraz w obrębie innych porozumień, ugrupowań integracyjnych, związków państw, jak również między nimi.

Występowanie w przestrzeni ekonomicznej gospodarek bogatych i gospodarek biednych stanowi konsekwencję polaryzacji rozwoju jako wynik m.in. zróżnicowanej produktywności czynników produkcji oraz kierunków i dynamiki nakładów inwestycyjnych. Artykuł wpisuje się w szeroki nurt poszukiwań przyczyn procesów polaryzacji rozwoju z uwzględnieniem tych właśnie stymulant rozwojowych (Solow, 1956; Lucas, 1988; Mankiw i inni, 1992; Nonneman, Vanhoudt, 1996; Mroczek i inni, 2014). Obok wyżej wymienionych, podstawowych determinant wzrostu, jest widoczny również silny nurt poszukiwań w zakresie oddziaływania zmian stopy redystrybucji budżetowej, nierówności dochodowych oraz kapitału społecznego na równowagę długookresowego wzrostu gospodarczego (Sztaudynger, 2007; Kumor i inni, 2009).

Szerszym kontekstem dla prowadzonych rozważań są: teoria kumulatywnej przyczynowości (Myrdal, 1957; Kaldor, 1970), teoria polaryzacji (Hirschmann, 1958) oraz teoria centrum i peryferie (Friedmann, Weaver, 1979).

Teoria kumulatywnej przyczynowości Myrdala akcentuje konieczność wywołania wystarczająco dużej i intensywnej zmiany (np. w postaci strumienia inwestycji zagranicznych) by wywołać impuls dla korzystnego kierunku zmian. Proces ten może wywoływać w dalszej kolejności efekty dwojakiego rodzaju. Początkowo, efekt zasysania (czynników wzrostu) z otoczenia, a w dalszej kolejności (z różną intensywnością) efekt rozprzestrzeniania. Bilans wielkości i siły tych efektów wyjaśnia poziom zróżnicowania rozwoju. Zdaniem Myrdala (1963) mechanizm rynkowy pozostawiony

---

[4] Szeroko na temat różnic pomiędzy poziomem i tempem wzrostu oraz rozwoju gospodarczego por. np. Malaga (2013).

sam sobie powoduje raczej wzrost niż zmniejszanie nierówności w przestrzeni gospodarczej. Wykorzystanie narzędzi interwencji publicznej ogranicza niekorzystne zjawiska w tym względzie. W rozwiniętym przez Kaldora (1970) modelu kumulatywnej przyczynowości, prócz zmian inwestycyjnych, wielkości produkcji ważna jest również produktywność kapitału. Z modelu Kaldora płynie wniosek, że gospodarki (analizowane na różnym poziomie agregacji), w których występują większe nierówności wykazują wyższe stopy wzrostu[5].

Teoria polaryzacji Hirschmanna również wykorzystuje efekty wymywania i odprysku. Z tym, że efekt rozprzestrzeniania się powinien stopniowo doprowadzić do rozwoju wszystkich gospodarek w określonej przestrzeni bez interwencji państwa. Warunkiem zaistnienia takiego zjawiska jest powstanie efektu sieci między różnymi stadiami procesu wytwórczego. Jednak samo już powiązania między wcześniejszymi (opóźnione południe) i późniejszymi (rozwinięta północ) stadiami produkcji powoduje tworzenie centrów przemysłowych. W tak pierwotnie ukształtowanych warunkach działania, instytucjonalizacja powiązań z wykorzystaniem inwestycji prywatnych i publicznych może pozwolić na przekształcenie struktury tych relacji w efektywną sieć gospodarczej współpracy.

Teoria centrów i peryferii powstała jako uogólnienie obserwowanej rzeczywistości Ameryki Łacińskiej w latach czterdziestych XX wieku. Trudne do pokonania efekty dominacji i zależności pewnej grupy krajów świata stały się przyczynkiem do wprowadzenia pojęcia gospodarki peryferyjnej (Prebisch, 1950). Rozwój obszarów peryferyjnych odbywa się w wyniku oddziaływania centrum w relacji podporządkowania i wzmacniającej jego dominacji dzięki efektom kumulatywnym. Współcześnie, nierówność relacji między bogatymi a biednymi krajami jest jedną z ważniejszych przyczyn objaśniających zróżnicowanie rozwoju.

Prócz wymienionych dalej szczegółowych założeń modelu, uznaje się również za istotne ogólne spostrzeżenia Myrdala i Kaldora w części konieczności wywołania pierwszej (korzystnej) zmiany (np. poprzez wzrost nakładów inwestycyjnych) oraz Hirschmanna w części nieinterwencyjnego, stopniowego efektu rozprzestrzeniania się pozytywnych efektów z gospodarek bogatych do gospodarek biednych.

---

[5] Kaldor objaśnia to zjawisko poprzez różnice krańcowych stóp oszczędności ludzi bogatych i biednych. W przypadku tych pierwszych są one większe. Taka sytuacja wpływa na relacje między stopą oszczędności, stopą inwestycji a stopą wzrostu gospodarczego.

2. MODEL WZROSTU GOSPODARCZEGO Z PRZEPŁYWAMI INWESTYCYJNYMI ZALEŻNYMI OD PRODUKTYWNOŚCI KAPITAŁU[6]

2.1. ZAŁOŻENIA MODELU

W prowadzonych rozważaniach przyjmuje się następujące założenia dotyczące funkcjonowania dwóch gospodarek (bogatej, oznaczanej dalej subskryptem 1, i biednej – do której stosuje się subskrypt 2).

1) Proces produkcyjny w i-tej (dla i=1, 2) gospodarce opisuje rozszerzona funkcja produkcji Cobba-Douglasa (1928) dana wzorem (por. też np. Żółtowska, 1997; Tokarski, 2009, 2011)[7]:

$$\forall(i, j = 1,2 \ \wedge \ i \neq j) \quad Y_i(t) = a(k_j(t))^{\beta}(K_i(t))^{\alpha}(L_i(t))^{1-\alpha}, \tag{1}$$

gdzie α, β, $(\alpha + \beta) \in (0;1)$ oraz $a>0$. Y_i w funkcji produkcji (1) oznacza wielkość produkcji w gospodarce i w momencie $t \geq 0$, K_i oraz L_i – zasoby kapitału (rzeczowego) i pracy w owej gospodarce, natomiast k_j (gdzie $k_j=K_j/L_j$) to zasób technicznego uzbrojenia pracy (czyli kapitału na pracującego) w gospodarce j. α w równaniu (1) oznacza elastyczność produkcji względem nakładów kapitału (a zatem $1 - \alpha$ oznacza elastyczność Y_i względem L_i), zaś β jest elastycznością łącznej produkcyjności czynników produkcji[8] (lub wielkości produkcji) w gospodarce i względem technicznego uzbrojenia pracy (lub zasobu kapitału) w gospodarce j. Oddziaływanie technicznego uzbrojenia pracy w gospodarce j na łączną produkcyjność czynników produkcji w gospodarce i (dla $i \neq j$) można uzasadnić na trzy sposoby.

Po pierwsze, podobnie jak ma to miejsce w grawitacyjnym modelu wzrostu gospodarczego (Mroczek, Tokarski, 2014; Mroczek i inni, 2014), może ono wynikać z działania efektu grawitacyjnego. Potwierdzają to wyniki badań empirycznych w zakresie czynników determinujących przepływy handlowe w Unii Europejskiej.

---

[6] Prezentowany model wzrostu gospodarczego stanowi rozszerzenie modelu zaproponowanego w pracy Mroczek, Tokarskiego, 2015a. W opracowaniu tym traktowano jednak kombinacje inwestycji krajowych i zagranicznych egzogenicznie. Nie uwzględniano zatem oddziaływania produktywności kapitału na przepływy inwestycji pomiędzy wyróżnionymi w modelu typami gospodarek.

[7] O wszystkich występujących dalej zmiennych makroekonomicznych zakłada się, iż są różniczkowalnymi funkcjami czasu $t \geq 0$. Zapis $x(t)$ oznaczał będzie dalej wartość zmiennej x w momencie t, zaś $\dot{x}(t) = dx/dt$ – pochodną zmiennej x po czasie t, czyli (ekonomicznie rzecz biorąc) przyrost wartości owej zmiennej w momencie t.

[8] Przy funkcji produkcji Cobba-Douglasa danej wzorem: $Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$, gdzie Y oznacza strumień wytworzonego produktu, K – nakłady kapitału rzeczowego, L – nakłady pracy, zaś $\alpha \in (0;1)$, łączną produkcyjność czynników produkcji A (pomija się tu subskrypty i odnoszące się do kolejnych gospodarek) można utożsamiać w produktem Y wytworzonym z jednostkowych nakładów kapitału K i pracy L. Przy funkcji produkcji (1) łączna produkcyjność czynników produkcji w gospodarce i równa jest zatem ak_j^{β} (dla $j \neq i$).

Obok wyraźnego wpływu wielkości gospodarek, poziomu ich rozwoju, ważnym czynnikiem sprzyjającym rozwojowi obrotów handlowych okazują się bezpośrednie inwestycje zagraniczne (Pietrzak, Łapińska, 2014).

Po drugie, oddziaływanie k_j na Y_i, gdzie $k_j>k_i$, może być skutkiem tego, iż gospodarki biedne (absorbując drogą imitacji nowe rozwiązania technologiczne) korzystają z wysokiego technicznego uzbrojenia pracy w gospodarkach bogatych. Po trzecie wreszcie, na efektywność funkcjonowania gospodarek biednych pozytywnie oddziałuje lepiej rozwinięta infrastruktura (np. transportowa) w gospodarkach bogatych, na efektywność funkcjonowania gospodarek bogatych negatywnie zaś wpływa słabiej rozwinięta infrastruktura gospodarek biednych[9].

Funkcje produkcji (1) są jednorodne stopnia 1 względem K_i oraz L_i i jednorodne stopnia $1+\beta>1$ względem K_i, L_i oraz k_j. Dlatego też funkcje te charakteryzują się stałymi efektami skali względem K_i oraz L_i i rosnącymi efektami skali względem K_i, L_i oraz k_j (szerzej na temat wpływu efektów skali na długookresową równowagę wzrostu gospodarczego por. np. Tokarski 2006, 2007a, 2007b, 2008).

Z funkcji produkcji (1) wynika również m.in., że relacje pomiędzy ilorazami wydajności pracy y_i i technicznych uzbrojeń pracy k_i (dla dowolnych k_1, $k_2>0$) opisują związki:

$$\frac{y_1(t)}{y_2(t)}=\left(\frac{k_1(t)}{k_2(t)}\right)^{\alpha-\beta} \Rightarrow \frac{d(y_1/y_2)}{d(k_1/k_2)}=(\alpha-\beta)\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{\alpha-\beta-1}>0\,. \tag{2}$$

Z zależności (2) wyciągnąć można wniosek, iż poziom wydajności pracy y_i jest wyższy w tej gospodarce, która charakteryzuje się wyższym poziomem technicznego uzbrojenia pracy k_i.

2) Przyrosty zasobów kapitału w gospodarkach i (czyli $\dot{K}_i$) opisują równania różniczkowe:

$$\forall(i, j=1{,}2\wedge j\neq i)\quad \dot{K}_i(t)=s_{ii}(t)Y_i(t)+s_{ij}(t)Y_j(t)-\delta_i K_i(t), \tag{3}$$

gdzie $\delta_i \in (0;1)$. $s_{ii}Y_i$ w równaniu (3) oznacza wielkość inwestycji zarówno realizowanych w gospodarce i, jak i finansowanych przez ową gospodarkę, zaś $s_{ij}Y_j$ – wielkość inwestycji realizowanych w gospodarce i a finansowanych przez gospodarkę j. Oznacza to, że wielkość $s_{ij}Y_j$ opisuje inwestycje zagraniczne przepływające z gospodarki j do gospodarki i (ograniczenia na stopy s_{ii} oraz s_{ij} wprowadzone są w założeniach 3–4). Natomiast δ_i oznacza stopę deprecjacji kapitału w gospodarce i. Równania akumulacji kapitału (3) stanowią rozszerzenie równania akumulacji kapitału z neo-

[9] Przemyśl korzysta np. z autostrady wiodącej z Rzeszowa przez Kraków i Wrocław do Niemiec, zaś Rzeszów nie ma możliwości korzystania z dobrej infrastruktury transportowej leżącej na wschód od tego miasta, gdyż taka infrastruktura nie istnieje (por. też np. Mroczek, Tokarski, 2015a, 2015b).

klasycznego modelu wzrostu Solowa. Rozszerzenie to polega na tym, iż w modelu Solowa nie uwzględnia się przepływów inwestycyjnych pomiędzy różnymi gospodarkami (gdyż jest to model wzrostu gospodarki zamkniętej), zaś w prezentowanym tu modelu wzrostu uwzględnia się przepływy inwestycyjne pomiędzy gospodarkami bogatą oraz biedną.
3) Gospodarka i (dla i=1, 2) inwestuje (u siebie oraz za granicą) w każdym momencie t część swojego produktu równą $s_i \in (0;1)$. Stopa s_i nazywana będzie dalej stopą inwestycji gospodarki i.
4) Inwestycje finansowane przez gospodarkę i (dla i=1, 2) dzielą się na inwestycje realizowane w owej gospodarce (czyli $s_{ii}Y_i$) oraz inwestycje realizowane w gospodarce j (a więc $s_{ji}Y_i$, dla $j \neq i$). Co więcej, przyjmujemy, że udział inwestycji finansowanych przez gospodarkę i a realizowanych w gospodarce j w ogólnych inwestycjach gospodarki i (oznaczany dalej przez $\ell_i = s_{ji}/s_i$)) jest (po pierwsze) tym wyższy, im wyższa jest relacja produktywności kapitału $p_j=y_j/k_j$ w gospodarce j w stosunku do produktywności kapitału $p_i=y_i/k_i$ w gospodarce i oraz (pod drugie) relacja ta opisana jest przez funkcję logitową daną wzorem[10]:

$$\forall(i=1,2 \wedge j \neq i) \quad \ell_i\left(p_j(t)/\,p_i(t)\right)=\frac{\ell}{1+\exp\left(-\,p_j(t)/\,p_i(t)\right)}, \tag{4}$$

gdzie $\ell \in (0;1)$ w równaniu (4) oznacza górną granicę udziału inwestycji, które realizowane są za granicą. Jeśli zaś przez:

$$\pi(t)=\frac{p_1(t)}{p_2(t)} \tag{5}$$

oznaczy się iloraz produktywności kapitału w gospodarkach 1 i 2, to z zależności (4–5) wynika, iż:

$$\ell_1(\pi)=\frac{\ell}{1+e^{-1/\pi}} \tag{6}$$

---

[10] Ponieważ iloraz p_j/p_i (przy k_1, k_2>0) można zapisać jako: $\frac{p_j}{p_i}=\frac{y_j k_i}{y_i k_j}$, a stąd oraz z równania (2) wynika, iż: $\frac{p_j}{p_i}=\left(\frac{k_j}{k_i}\right)^{\alpha-\beta}\frac{k_i}{k_j}=\left(\frac{k_j}{k_i}\right)^{-(1-\alpha+\beta)}$, co powoduje, że: $\forall k_j/k_i>0 \quad \frac{d\left(p_j/p_i\right)}{d\left(k_j/k_i\right)}=-(1-\alpha+\beta)\left(\frac{k_j}{k_i}\right)^{-(2-\alpha+\beta)}<0$, zatem w gospodarkach bogatszych produktywność kapitału jest niższa, niż w gospodarkach biedniejszych.

oraz:

$$\ell_2(\pi) = \frac{\ell}{1+e^{-\pi}}. \tag{7}$$

Z równań (6–7) wyciągnąć można następujące wnioski:

i. Jeśli $\pi \to 0^+$ (a zatem wówczas, gdy produktywność kapitału p_1 zmierza do zera, przy produktywności kapitału $p_2>0$), to $\ell_1 \to \ell$ oraz $\ell_2 \to \ell/2$. Czyli wówczas gospodarka bogata inwestuje za granicą część łącznych swoich inwestycji równą ℓ, zaś gospodarka biedna inwestuje w bogatej część inwestycji wynoszącą $\ell/2$.

ii. Przy $\pi \to +\infty$ (a więc w sytuacji przeciwnej do scharakteryzowanej uprzednio) $\ell_1 \to \ell/2$ oraz $\ell_2 \to \ell$.

iii. Ponieważ[11] $d\ell_1/d\pi < 0$ oraz $d\ell_2/d\pi > 0$, zatem im wyższa jest relacja produktywności kapitału w gospodarce 1 do produktywności kapitału w gospodarce 2, tym niższy jest odsetek inwestycji zagranicznych w gospodarce bogatej, wyższy zaś – w gospodarce biednej.

iv. Stąd zaś, że dla każdego $\pi>0$ zachodzi $d^2\ell_1/d\pi^2 > 0$ oraz $d^2\ell_2/d\pi^2 < 0$ wyciągnąć można wniosek, iż jeśli iloraz π rośnie, to udział ℓ_1 (ℓ_2) spada (rośnie) coraz szybciej (wolniej).

v. Udziały ℓ_1 i ℓ_2 inwestycji zagranicznych są sobie równe wtedy i tylko wtedy, gdy: $\frac{\ell}{1+e^{-1/\pi}} = \frac{\ell}{1+e^{-\pi}}$, co powoduje, że przy $\pi>0$ iloraz produktywności kapitału $\pi=p_1/p_2$ musi być równy 1. Co więcej, z przedstawionych tu właściwości funkcji (6–7) wynika, że jeśli iloraz produktywności kapitału π jest mniejszy (większy) od 1, to $\ell_1 > \ell_2$ ($\ell_1 < \ell_2$), a zatem gospodarka bogata przeznacza na inwestycje zagraniczne większą część swoich inwestycji, niż gospodarka biedna.

Z założenia 4 oraz z równania (4) wynika także, że:

$$s_{11}(t) = [1-\ell_1(\pi(t))]s_1 = \left(1 - \frac{\ell}{1+\exp(-p_2(t)/p_1(t))}\right)s_1, \tag{8}$$

$$s_{21}(t) = \ell_1(\pi(t))s_1 = \frac{\ell}{1+\exp(-p_2(t)/p_1(t))}s_1, \tag{9}$$

$$s_{22}(t) = [1-\ell_2(\pi(t))]s_2 = \left(1 - \frac{\ell}{1+\exp(-p_1(t)/p_2(t))}\right)s_2 \tag{10}$$

oraz:

$$s_{12}(t) = \ell_2(\pi(t))s_2 = \frac{\ell}{1+\exp(-p_1(t)/p_2(t))}s_2. \tag{11}$$

[11] Znaki pierwszych i drugich pochodnych funkcji (6–7) bezpośrednio wynikają z właściwości funkcji logitowych.

5) W gospodarce bogatej pracuje odsetek pracujących (w obu gospodarkach) równy $\omega \in (0;1)$, zaś w gospodarce biednej – odsetek wynoszący $1 - \omega$. Płynie stąd wniosek, że:

$$L_1(t) = \omega L(t) \quad \wedge \quad L_2(t) = (1-\omega)L(t), \tag{12}$$

gdzie L jest łączną liczbą pracujących w obu analizowanych gospodarkach.
6) Liczba pracujących w obu gospodarkach rośnie według stopy wzrostu $n>0$, co powoduje, że:

$$L(t) = L_0 e^{nt} \;\Rightarrow\; \dot{L}(t)/L(t) = n, \tag{13}$$

przy czym $L_0>0$ jest łączną liczbą pracujących w momencie $t=0$.

2.2. RÓWNOWAGA MODELU

Wydajności pracy $y_i=Y_i/L_i$ (dla $i=1, 2$) w obu rozważanych gospodarkach, zgodnie z zależnościami (1), można zapisać wzorami:

$$\forall (i, j = 1{,}2 \;\wedge\; j \neq i) \quad y_i(t) = a(k_i(t))^{\alpha}(k_j(t))^{\beta}. \tag{14}$$

Ponieważ dla każdego $i=1, 2$ $k_i=K_i/L_i$, zatem – po zróżniczkowaniu powyższych zależności względem czasu t oraz uwzględnieniu związków (12–13) – mamy:

$$\dot{k}_i(t) = \frac{\dot{K}_i(t)L_i(t) - K_i(t)\dot{L}_i(t)}{(L_i(t))^2} = \frac{\dot{K}_i(t)}{L_i(t)} - nk_i(t). \tag{15}$$

Wstawiając do równania różniczkowego (15) zależności (3) dochodzi się do wzorów:

$$\dot{k}_1(t) = s_{11}(t)y_1(t) + s_{12}(t)\frac{L_2(t)}{L_1(t)}y_2(t) - \mu_1 k_1(t) \tag{16}$$

oraz:

$$\dot{k}_2(t) = s_{22}(t)y_2(t) + s_{21}(t)\frac{L_1(t)}{L_2(t)}y_1(t) - \mu_2 k_2(t), \tag{17}$$

gdzie dla kolejnych $i=1, 2$ $\mu_i = \delta_i + n > 0$ oznacza stopę ubytku kapitału na pracującego w gospodarce i. Ponieważ z równań (12) wynika, iż: $\frac{L_1}{L_2} = \frac{\omega}{1-\omega}$ oraz $\frac{L_2}{L_1} = \frac{1-\omega}{\omega}$, więc równania różniczkowe (16–17) można zapisać następująco:

$$\dot{k}_1(t) = s_{11}(t)y_1(t) + s_{12}(t)\frac{1-\omega}{\omega}y_2(t) - \mu_1 k_1(t) \tag{18}$$

i:

$$\dot{k}_2(t) = s_{22}(t)y_2(t) + s_{21}(t)\frac{\omega}{1-\omega}y_1(t) - \mu_2 k_2(t). \tag{19}$$

Wstawiając zaś funkcje wydajności pracy (14) do równań (18–19) okazuje się, że:

$$\left.\begin{aligned}\dot{k}_1(t) &= s_{11}(t)a(k_1(t))^{\alpha}(k_2(t))^{\beta} + s_{12}(t)\frac{1-\omega}{\omega}a(k_2(t))^{\alpha}(k_1(t))^{\beta} - \mu_1 k_1(t)\\ \dot{k}_2(t) &= s_{22}(t)a(k_2(t))^{\alpha}(k_1(t))^{\beta} + s_{21}(t)\frac{\omega}{1-\omega}a(k_1(t))^{\alpha}(k_2(t))^{\beta} - \mu_2 k_2(t)\end{aligned}\right\}. \tag{20}$$

Ponieważ dla dowolnych i, j=1, 2 (przy $j \neq i$) relacje produktywności kapitału p_i/p_j opisują związki:

$$\frac{p_i(t)}{p_j(t)} = \left(\frac{k_i(t)}{k_j(t)}\right)^{-(1-\alpha+\beta)}, \tag{21}$$

więc stąd oraz z równań (4) uzyskuje się:

$$\ell_1(\pi(t)) = \iota_1\left(\frac{k_1(t)}{k_2(t)}\right) = \frac{\ell}{1+\exp\left(-(k_1(t)/k_2(t))^{1-\alpha+\beta}\right)} \tag{22}$$

oraz:

$$\ell_2(\pi(t)) = \iota_2\left(\frac{k_1(t)}{k_2(t)}\right) = \frac{\ell}{1+\exp\left(-(k_1(t)/k_2(t))^{-(1-\alpha+\beta)}\right)}. \tag{23}$$

Wstawiając zaś równania (22–23) do związków (8–11) mamy:

$$s_{11}(t) = \left[1-\iota_1\left(\frac{k_1(t)}{k_2(t)}\right)\right]s_1 = \left(1-\frac{\ell}{1+\exp\left(-(k_1(t)/k_2(t))^{1-\alpha+\beta}\right)}\right)s_1, \tag{24}$$

$$s_{21}(t) = \iota_1\left(\frac{k_1(t)}{k_2(t)}\right)s_1 = \frac{\ell}{1+\exp\left(-(k_1(t)/k_2(t))^{1-\alpha+\beta}\right)}s_1, \tag{25}$$

$$s_{22}(t)=\left[1-\iota_2\left(\frac{k_1(t)}{k_2(t)}\right)\right]s_2=\left(1-\frac{\ell}{1+\exp\left(-\left(k_1(t)/k_2(t)\right)^{-(1-\alpha+\beta)}\right)}\right)s_2 \tag{26}$$

oraz:

$$s_{12}(t)=\iota_2\left(\frac{k_1(t)}{k_2(t)}\right)s_2=\frac{\ell}{1+\exp\left(-\left(k_1(t)/k_2(t)\right)^{-(1-\alpha+\beta)}\right)}s_2\,. \tag{27}$$

Po wstawieniu zależności (24–27) do układu równań różniczkowych (20) sprowadzamy go do następującej postaci:

$$\left.\begin{aligned}\dot{k}_1(t)&=s_1\left[1-\iota_1\left(\frac{k_1(t)}{k_2(t)}\right)\right]a\left(k_1(t)\right)^{\alpha}\left(k_2(t)\right)^{\beta}+s_2\iota_2\left(\frac{k_1(t)}{k_2(t)}\right)\frac{1-\omega}{\omega}a\left(k_2(t)\right)^{\alpha}\left(k_1(t)\right)^{\beta}-\mu_1k_1(t)\\ \dot{k}_2(t)&=s_2\left[1-\iota_2\left(\frac{k_1(t)}{k_2(t)}\right)\right]a\left(k_2(t)\right)^{\alpha}\left(k_1(t)\right)^{\beta}+s_1\iota_1\left(\frac{k_1(t)}{k_2(t)}\right)\frac{\omega}{1-\omega}a\left(k_1(t)\right)^{\alpha}\left(k_2(t)\right)^{\beta}-\mu_2k_2(t)\end{aligned}\right\}. \tag{28}$$

Układ równań różniczkowych (28) analizowany będzie w przestrzeni fazowej $P=(0;+\infty)^2$. Pokażemy też, że w przestrzeni fazowej P rozważany układ równań różniczkowych posiada dokładnie jeden punkt stacjonarny $k^*=\left(k_1^*,k_2^*\right)$. W punkcie tym $\dot{k}_1=\dot{k}_2=0$, co oznacza, że iloraz k_1^*/k_2^* jest wówczas pewną dodatnią liczbą rzeczywistą κ. Dlatego też k^* jest rozwiązaniem następującego układu równań:

$$\left.\begin{aligned}\left(s_1\left(1-\iota_1(\kappa)\right)\kappa^{\alpha}+s_2\iota_2(\kappa)\frac{1-\omega}{\omega}\kappa^{\beta}\right)a\left(k_2^*\right)^{\alpha+\beta}&=\mu_1\kappa k_2^*\\ \left(s_2\left(1-\iota_2(\kappa)\right)\kappa^{\beta}+s_1\iota_1(\kappa)\frac{\omega}{1-\omega}\kappa^{\alpha}\right)a\left(k_2^*\right)^{\alpha+\beta}&=\mu_2k_2^*\end{aligned}\right\}. \tag{29}$$

Dzieląc pierwsze przez drugie z równań układu równań (29) dochodzi się do związku:

$$\frac{s_1}{\mu_1}\left(1-\iota_1(\kappa)\right)\kappa^{\alpha}+\frac{s_2(1-\omega)}{\mu_1\omega}\iota_2(\kappa)\kappa^{\beta}=\frac{s_2}{\mu_2}\left(1-\iota_2(\kappa)\right)\kappa^{\alpha+1}+\frac{s_1\omega}{\mu_2(1-\omega)}\iota_1(\kappa)\kappa^{\beta+1},$$

który można zapisać także następująco:

$$\phi(\kappa)=\frac{s_2}{\mu_2}\left(1-\iota_2(\kappa)\right)\kappa^{\alpha+1}+\frac{s_1\omega}{\mu_2(1-\omega)}\iota_1(\kappa)\kappa^{\beta+1}-\frac{s_1}{\mu_1}\left(1-\iota_1(\kappa)\right)\kappa^{\alpha}-\frac{s_2(1-\omega)}{\mu_1\omega}\iota_2(\kappa)\kappa^{\beta}=0\,.$$

Powyższe równanie zapisać można również wzorem:

$$\phi(\kappa)=\kappa\overline{\phi}(\kappa)=0\,, \tag{30}$$

gdzie:

$$\bar{\phi}(\kappa)=\frac{s_2}{\mu_2}\left(1-\iota_2(\kappa)\right)\kappa^{\alpha}+\frac{s_1\omega}{\mu_2(1-\omega)}\iota_1(\kappa)\kappa^{\beta}-\frac{s_1}{\mu_1}\left(1-\iota_1(\kappa)\right)\kappa^{\alpha-1}-\frac{s_2(1-\omega)}{\mu_1\omega}\iota_2(\kappa)\kappa^{\beta-1}. \quad (31)$$

Ze związku (30) wynika, że dla każdego $\kappa>0$ $\operatorname{sgn}\phi(\kappa)=\operatorname{sgn}\bar{\phi}(\kappa)$. Natomiast funkcja $\bar{\phi}(\kappa)$ dana wzorem (31) charakteryzuje się następującymi właściwościami:

i. Z równań (22–23) wynika, że $\lim_{\kappa\to 0^+}\iota_1(\kappa)=\ell/2\in(0;1/2)$ i $\lim_{\kappa\to 0^+}\iota_2(\kappa)=\ell\in(0;1)$, zatem $\lim_{\kappa\to 0^+}\bar{\phi}(\kappa)=-\infty$.

ii. Stąd zaś, że $\lim_{\kappa\to+\infty}\iota_1(\kappa)=\ell$ oraz $\lim_{\kappa\to+\infty}\iota_2(\kappa)=\ell/2$ otrzymujemy, iż $\lim_{\kappa\to+\infty}\bar{\phi}(\kappa)=+\infty$.

iii. Co więcej, ponieważ:

$$\bar{\phi}'(\kappa)=\frac{s_2}{\mu_2}\left[-\frac{d\iota_2}{d\kappa}\kappa^{\alpha}+\alpha\left(1-\iota_2(\kappa)\right)\kappa^{\alpha-1}\right]+\frac{s_1\omega}{\mu_2(1-\omega)}\left[\frac{d\iota_1}{d\kappa}\kappa^{\beta}+\beta\iota_1(\kappa)\kappa^{\beta-1}\right]+$$
$$-\frac{s_1}{\mu_1}\left[-\frac{d\iota_1}{d\kappa}\kappa^{\alpha-1}-(1-\alpha)\left(1-\iota_1(\kappa)\right)\kappa^{\alpha-2}\right]-\frac{s_2(1-\omega)}{\mu_1\omega}\left[\frac{d\iota_2}{d\kappa}\kappa^{\beta-1}-(1-\beta)\iota_2(\kappa)\kappa^{\beta-2}\right],$$

$$\frac{d\iota_1}{d\kappa}=\frac{\ell(1-\alpha+\beta)\kappa^{-\alpha+\beta}\exp\left(-\kappa^{1-\alpha+\beta}\right)}{\left(1+\exp\left(-\kappa^{1-\alpha+\beta}\right)\right)^2}>0$$

oraz:

$$\frac{d\iota_2}{d\kappa}=-\frac{\ell(1-\alpha+\beta)\kappa^{-(2-\alpha+\beta)}\exp\left(-\kappa^{-(1-\alpha+\beta)}\right)}{\left(1+\exp\left(-\kappa^{-(1-\alpha+\beta)}\right)\right)^2}<0$$

zatem dla każdego $\kappa\in(0;+\infty)$ $\bar{\phi}'(\kappa)>0$. Płynie stąd wniosek, że dla $\kappa\in(0;+\infty)$ funkcja $\bar{\phi}(\kappa)$ jest funkcją ciągłą oraz rosnącą od $-\infty$ do $+\infty$. Dlatego też (zgodnie z własnością Darboux) istnieje dokładnie jedno $\kappa^*>0$, przy którym $\bar{\phi}(\kappa)=0$, czyli istnieje wyłącznie jedno κ^* spełniające równanie (30).

Jeśli zaś istnieje dokładnie jedno κ^* rozwiązujące równanie (30), to – z drugiego z równań układu równań (29) – wyciągnąć można wniosek, że istnieje także dokładnie jedno $k_2^*>0$ rozwiązujące ów układ równań. Stąd zaś oraz z podstawienia $k_1^*=\kappa k_2^*$ wnioskujemy, że układ równań różniczkowych (28) ma wyłącznie jeden punkt stacjonarny $k^*\in P$.

Macierz Jacobiego J układu równań różniczkowych (28) określa związek:

$$J=\begin{bmatrix}\partial\varphi_1/\partial k_1 & \partial\varphi_1/\partial k_2\\ \partial\varphi_2/\partial k_1 & \partial\varphi_2/\partial k_2\end{bmatrix}, \quad (32)$$

gdzie:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial k_1} = s_1\left[\alpha\left[1-\iota_1\left(k_1/k_2\right)\right]k_2 - \frac{d\iota_1}{d\left(k_1/k_2\right)}k_1\right]ak_1^{\alpha-1}k_2^{\beta-1} +$$

$$+\frac{s_2(1-\omega)}{\omega}\left[\beta\iota_2\left(k_1/k_2\right)k_2 + \frac{d\iota_2}{d\left(k_1/k_2\right)}k_1\right]ak_1^{\beta-1}k_2^{\alpha-1} - \mu_1,$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial k_2} = s_1\left[\beta\left[1-\iota_1\left(k_1/k_2\right)\right]k_2 + \frac{d\iota_1}{d\left(k_1/k_2\right)}k_1\right]ak_1^{\alpha}k_2^{\beta-2} +$$

$$+\frac{s_2(1-\omega)}{\omega}\left[\alpha\iota_2\left(k_1/k_2\right)k_2 - \frac{d\iota_2}{d\left(k_1/k_2\right)}k_1\right]ak_1^{\beta}k_2^{\alpha-2},$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial k_1} = s_2\left[\beta\left[1-\iota_2\left(k_1/k_2\right)\right]k_2 - \frac{d\iota_2}{d\left(k_1/k_2\right)}k_1\right]ak_1^{\beta-1}k_2^{\alpha-1} +$$

$$+\frac{s_1\omega}{1-\omega}\left[\alpha\iota_1\left(k_1/k_2\right)k_2 + \frac{d\iota_1}{d\left(k_1/k_2\right)}k_1\right]ak_1^{\alpha-1}k_2^{\beta-1}$$

oraz:

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial k_2} = s_2\left[\alpha\left[1-\iota_2\left(k_1/k_2\right)\right]k_2 + \frac{d\iota_2}{d\left(k_1/k_2\right)}k_1\right]ak_1^{\beta}k_2^{\alpha-2} +$$

$$+\frac{s_1\omega}{1-\omega}\left[\beta\iota_1\left(k_1/k_2\right)k_2 - \frac{d\iota_1}{d\left(k_1/k_2\right)}k_1\right]ak_1^{\alpha}k_2^{\beta-2} - \mu_2.$$

W punkcie stacjonarnym $k^* \in P$ zachodzą związki:

$$\mu_1 = s_1\left[1-\iota_1\left(\kappa^*\right)\right]a\left(k_1^*\right)^{\alpha-1}\left(k_2^*\right)^{\beta} + \frac{s_2(1-\omega)}{\omega}\iota_2\left(\kappa^*\right)a\left(k_1^*\right)^{\beta-1}\left(k_2^*\right)^{\alpha} \tag{33}$$

i:

$$\mu_2 = s_2\left[1-\iota_2\left(\kappa^*\right)\right]a\left(k_1^*\right)^{\beta}\left(k_2^*\right)^{\alpha-1} + \frac{s_1\omega}{1-\omega}\iota_1\left(\kappa^*\right)a\left(k_1^*\right)^{\alpha}\left(k_2^*\right)^{\beta-1}. \tag{34}$$

Z zależności (32–34) płynie wniosek, że w punkcie stacjonarnym $k^* \in P$ macierz Jacobiego J (oznaczaną dalej przez J^*) zapisać można wzorem:

$$J^* = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{bmatrix}, \tag{35}$$

gdzie[12]:

$$j_{11} = -s_1\left[(1-\alpha)[1-\iota_1(\kappa^*)]k_2^* + \left.\frac{d\iota_1}{d\kappa}\right|_{\kappa=\kappa^*} k_1^*\right] a\left(k_1^*\right)^{\alpha-1}\left(k_2^*\right)^{\beta-1} +$$

$$-\frac{s_2(1-\omega)}{\omega}\left[(1-\beta)\iota_2(\kappa^*)k_2^* - \left.\frac{d\iota_2}{d\kappa}\right|_{\kappa=\kappa^*} k_1^*\right] a\left(k_1^*\right)^{\beta-1}\left(k_2^*\right)^{\alpha-1} < 0,$$

$$j_{12} = s_1\left[\beta[1-\iota_1(\kappa^*)]k_2^* + \left.\frac{d\iota_1}{d\kappa}\right|_{\kappa=\kappa^*} k_1^*\right] a\left(k_1^*\right)^{\alpha}\left(k_2^*\right)^{\beta-2} +$$

$$+\frac{s_2(1-\omega)}{\omega}\left[\alpha\iota_2(\kappa^*)k_2^* - \left.\frac{d\iota_2}{d\kappa}\right|_{\kappa=\kappa^*} k_1^*\right] a\left(k_1^*\right)^{\beta}\left(k_2^*\right)^{\alpha-2} > 0,$$

$$j_{21} = s_2\left[\beta[1-\iota_2(\kappa^*)]k_2^* - \left.\frac{d\iota_2}{d\kappa}\right|_{\kappa=\kappa^*} k_1^*\right] a\left(k_1^*\right)^{\beta-1}\left(k_2^*\right)^{\alpha-1} +$$

$$+\frac{s_1\omega}{1-\omega}\left[\alpha\iota_1(\kappa^*)k_2^* + \left.\frac{d\iota_1}{d\kappa}\right|_{\kappa=\kappa^*} k_1^*\right] a\left(k_1^*\right)^{\alpha-1}\left(k_2^*\right)^{\beta-1} > 0$$

oraz:

$$j_{22} = -s_2\left[(1-\alpha)[1-\iota_2(\kappa^*)]k_2^* - \left.\frac{d\iota_2}{d\kappa}\right|_{\kappa=\kappa^*} k_1^*\right] a\left(k_1^*\right)^{\beta}\left(k_2^*\right)^{\alpha-2} +$$

$$-\frac{s_1\omega}{1-\omega}\left[(1-\beta)\iota_1(\kappa^*)k_2^* + \left.\frac{d\iota_1}{d\kappa}\right|_{\kappa=\kappa^*} k_1^*\right] a\left(k_1^*\right)^{\alpha}\left(k_2^*\right)^{\beta-2} < 0.$$

Wartości własne macierzy Jacobiego (35) są pierwiastkami następującego równania:

$$\lambda^2 - trJ^*\lambda + \det J^* = 0. \tag{36}$$

---

[12] Zapis: $\left.\frac{d\iota_i}{d(\kappa)}\right|_{\kappa=\kappa^*}$ (dla i=1, 2) oznaczał będzie dalej wartość pochodnej funkcji ι_i w punkcie κ^*. Rozważając zaś znaki wyrażeń j_{ij} (dla $i.j$=1, 2) należy również pamiętać o tym, że – zgodnie z równaniami (22–23) – dla dowolnego κ>0: $\frac{d\iota_1}{d\kappa} > 0$ oraz $\frac{d\iota_2}{d\kappa} < 0$.

Pierwiastki równania (36) są liczbami rzeczywistymi, gdyż jego wyróżnik:

$$\Delta = \left(trJ^*\right)^2 - 4\det J^* = \left(j_{11} + j_{22}\right)^2 - 4\left(j_{11}j_{22} - j_{12}j_{21}\right) = \left(j_{11} - j_{22}\right)^2 + 4j_{12}j_{21} \geq 4j_{12}j_{21} > 0.$$

Z wzorów Viete'a oraz równania (36) wynika, iż sumę $\lambda_1 + \lambda_2$ oraz iloczyn $\lambda_1\lambda_2$ wartości własnych macierzy Jacobiego J^* określają związki $\lambda_1 + \lambda_2 = trJ^*$ i $\lambda_1\lambda_2 = \det J^*$. Ponieważ $trJ^* = j_{11} + j_{22} < 0$, zatem suma wartości własnych jest rzeczywistą liczbą ujemną.

Iloczyn $j_{11}j_{22}$ można zaś zapisać następująco:

$$j_{11}j_{22} = a\left(u_1 s_1 s_2 \left(k_1^*\right)^{\alpha+\beta-1}\left(k_2^*\right)^{\alpha+\beta-3} + u_2 s_1^2 \frac{\omega}{1-\omega}\left(k_1^*\right)^{2\alpha-1}\left(k_2^*\right)^{2\beta-3} + u_3 s_2^2 \frac{1-\omega}{\omega}\left(k_1^*\right)^{2\beta-1}\left(k_2^*\right)^{2\alpha-3}\right), \quad (37)$$

gdzie:

$$u_1 = \left(\left(1-\alpha\right)\left[1-\iota_1\left(\kappa^*\right)\right]k_2^* + \left.\frac{d\iota_1}{d\kappa}\right|_{\kappa=\kappa^*} k_1^*\right)\left(\left(1-\alpha\right)\left[1-\iota_2\left(\kappa^*\right)\right]k_2^* - \left.\frac{d\iota_2}{d\kappa}\right|_{\kappa=\kappa^*} k_1^*\right) +$$

$$+\left(\left(1-\beta\right)\iota_2\left(\kappa^*\right)k_2^* - \left.\frac{d\iota_2}{d\kappa}\right|_{\kappa=\kappa^*} k_1^*\right)\left(\left(1-\beta\right)\iota_1\left(\kappa^*\right)k_2^* + \left.\frac{d\iota_1}{d\kappa}\right|_{\kappa=\kappa^*} k_1^*\right),$$

$$u_2 = \left(\left(1-\alpha\right)\left[1-\iota_1\left(\kappa^*\right)\right]k_2^* + \left.\frac{d\iota_1}{d\kappa}\right|_{\kappa=\kappa^*} k_1^*\right)\left(\left(1-\beta\right)\iota_1\left(\kappa^*\right)k_2^* + \left.\frac{d\iota_1}{d\kappa}\right|_{\kappa=\kappa^*} k_1^*\right)$$

i:

$$u_3 = \left(\left(1-\beta\right)\iota_2\left(\kappa^*\right)k_2^* - \left.\frac{d\iota_2}{d\kappa}\right|_{\kappa=\kappa^*} k_1^*\right)\left(\left(1-\alpha\right)\left[1-\iota_2\left(\kappa^*\right)\right]k_2^* - \left.\frac{d\iota_2}{d\kappa}\right|_{\kappa=\kappa^*} k_1^*\right).$$

Ponadto:

$$j_{12}j_{21} = v_1 s_1 s_2 \left(k_1^*\right)^{\alpha+\beta-1}\left(k_2^*\right)^{\alpha+\beta-3} + v_2 s_1^2 \frac{\omega}{1-\omega}\left(k_1^*\right)^{2\alpha-1}\left(k_2^*\right)^{2\beta-3} + v_3 s_2^2 \frac{1-\omega}{\omega}\left(k_1^*\right)^{2\beta-1}\left(k_2^*\right)^{2\alpha-3}, \quad (38)$$

przy czym:

$$v_1 = \left(\beta\left[1-\iota_1\left(\kappa^*\right)\right]k_2^* + \left.\frac{d\iota_1}{d\kappa}\right|_{\kappa=\kappa^*} k_1^*\right)\left(\beta\left[1-\iota_2\left(\kappa^*\right)\right]k_2^* - \left.\frac{d\iota_2}{d\kappa}\right|_{\kappa=\kappa^*} k_1^*\right) +$$

$$+\left(\alpha\iota_2\left(\kappa^*\right)k_2^* - \left.\frac{d\iota_2}{d\kappa}\right|_{\kappa=\kappa^*} k_1^*\right)\left(\alpha\iota_1\left(\kappa^*\right)k_2^* + \left.\frac{d\iota_1}{d\kappa}\right|_{\kappa=\kappa^*} k_1^*\right),$$

$$v_2 = \left(\beta\left[1-\iota_1\left(\kappa^*\right)\right]k_2^* + \left.\frac{d\iota_1}{d\kappa}\right|_{\kappa=\kappa^*} k_1^*\right)\left(\alpha\iota_1\left(\kappa^*\right)k_2^* + \left.\frac{d\iota_1}{d\kappa}\right|_{\kappa=\kappa^*} k_1^*\right)$$

oraz:

$$v_3 = \left(\alpha \iota_2(\kappa^*)k_2^* - \left.\frac{d\iota_2}{d\kappa}\right|_{\kappa=\kappa^*} k_1^* \right)\left(\beta[1-\iota_2(\kappa^*)]k_2^* - \left.\frac{d\iota_2}{d\kappa}\right|_{\kappa=\kappa^*} \right).$$

Ponieważ $1 - \alpha > \beta$ i $1 - \beta > \alpha$, gdyż $(\alpha + \beta) \in (0;1)$, zatem:

$$u_1 > \left(\beta[1-\iota_1(\kappa^*)]k_2^* + \left.\frac{d\iota_1}{d\kappa}\right|_{\kappa=\kappa^*} k_1^* \right)\left(\beta[1-\iota_2(\kappa^*)]k_2^* - \left.\frac{d\iota_2}{d\kappa}\right|_{\kappa=\kappa^*} k_1^* \right) +$$

$$+ \left(\alpha \iota_2(\kappa^*)k_2^* - \left.\frac{d\iota_2}{d\kappa}\right|_{\kappa=\kappa^*} k_1^* \right)\left(\alpha \iota_1(\kappa^*)k_2^* + \left.\frac{d\iota_1}{d\kappa}\right|_{\kappa=\kappa^*} k_1^* \right) = v_1 .$$

Podobnie:

$$u_2 > \left(\beta[1-\iota_1(\kappa^*)]k_2^* + \left.\frac{d\iota_1}{d\kappa}\right|_{\kappa=\kappa^*} k_1^* \right)\left(\alpha \iota_1(\kappa^*)k_2^* + \left.\frac{d\iota_1}{d\kappa}\right|_{\kappa=\kappa^*} k_1^* \right) = v_2$$

oraz:

$$u_3 > \left(\alpha \iota_2(\kappa^*)k_2^* - \left.\frac{d\iota_2}{d\kappa}\right|_{\kappa=\kappa^*} k_1^* \right)\left(\beta[1-\iota_2(\kappa^*)]k_2^* - \left.\frac{d\iota_2}{d\kappa}\right|_{\kappa=\kappa^*} k_1^* \right) = v_3 .$$

Stąd zaś, że dla każdego i=1, 2, 3 $u_i > v_i$ oraz z równań (37–38) wynika, że $\det J^* = j_{11}j_{22} - j_{12}j_{21} > 0$.

Ponieważ ślad macierzy Jacobiego J^* jest ujemny, zaś jej wyznacznik dodatni, więc obie wartości własne tej macierzy są rzeczywistymi liczbami ujemnymi. To zaś – na mocy twierdzenia Grobmana-Hartmana (por. Ombach, 1999, twierdzenie 6.2.1) – gwarantuje, iż punkt stacjonarny k^* układu równań różniczkowych (28) jest punktem asymptotycznie stabilnym. Dlatego też punkt ten jest punktem długookresowej równowagi rozważanego tu modelu wzrostu.

3. KALIBRACJA PARAMETRÓW MODELU I SYMULACJE NUMERYCZNE

3.1. KALIBRACJA PARAMETRÓW MODELU[13]

Kalibrację parametrów analizowanego modelu wzrostu autorzy rozpoczęli od próby wyznaczenia wartości parametrów α i β. W tym celu wyszli od tzw. dekompozycji Solowa (1957) oraz grawitacyjnego modelu wzrostu gospodarczego z prac Mroczek, Tokarskiego (2014) i Mroczek i innych (2014). Z dekompozycji Solowa wynika, że $\alpha \approx 1/3$. Natomiast kalibracja parametrów grawitacyjnego modelu wzrostu daje wartość β nieco mniejszą od $\alpha/3$. Gdyby więc przyjąć, że α=1/3 oraz β=1/9, to z równania (2) uzyskuje się, że $\frac{y_1(t)}{y_2(t)} = \left(\frac{k_1(t)}{k_2(t)}\right)^{2/9}$, co przy k_1/k_2=5 daje $y_1/y_2 \approx 1{,}430$. Relacja $y_1/y_2 \approx 1{,}430$ wydaje się wielkością mocno niedoszacowaną. Co więcej, gdyby założyć, że nie występuje oddziaływanie k_j na y_i (dla $i \neq j$), czyli β=0, to równanie (2) przy α=1/3 sprowadza się do zależności $\frac{y_1(t)}{y_2(t)} = \sqrt[3]{\frac{k_1(t)}{k_2(t)}}$ i wówczas dla k_1/k_2=5 mamy: $y_1/y_2 \approx 1{,}710$. Wielkość ta również wydaje się niedoszacowana[14].

Dlatego też kalibrując parametry prezentowanego modelu wzrostu autorzy zdecydowali się ustalić elastyczność α (przy dodatkowym założeniu, że $\beta=0{,}3\alpha$) na takim poziomie, by przy k_1/k_2=5 iloraz wydajności pracy y_1 i y_2 równy był 3. Wówczas, zgodnie z równaniem (2), powinien być spełniony związek: $\alpha = \frac{\ln 3}{0{,}7 \ln 5} \approx 0{,}9752$, co powoduje, że $\beta \approx 0{,}2925$, a zatem $\alpha + \beta > 1$. Ponieważ suma elastyczności α i β (zgodnie z przyjętymi w punkcie 3 założeniami) winna być mniejsza od 1, zatem zdecydowano się na analogiczną kalibrację parametrów α i β przy k_1/k_2=5 oraz y_1/y_2=2.

---

[13] Por. też Mroczek, Tokarski (2015a), gdzie w podobnym modelu wzrostu (ale przy egzogenicznych stopach inwestycji) skalibrowano parametry opisujące funkcjonowanie dwóch analogicznych typów gospodarek.

[14] Rzecz jasna, przyjmując założenie, że w każdej z analizowanych gospodarek funkcja wydajności pracy dana jest wzorem: $y_i = a_i k_i^{\alpha}$, (gdzie a_i>0 oznacza łączną produkcyjność czynników produkcji w i-tej gospodarce, dla i=1, 2), mamy: $\frac{y_1}{y_2} = \frac{a_1}{a_2}\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{\alpha}$ i wówczas (nawet przy α=1/3) można dobrać łączne produkcyjności czynników produkcji a_i tak, by przy k_1/k_2=5 relacja y_1/y_2 równa była 3 lub 4. Ale w tym przypadku należy przyjąć, że albo relacja a_1/a_2 (z jakiś tajemniczych względów) jest dana raz na zawsze, albo (jak ma to miejsce *implicite* w modelach Mankiwa-Romera-Weila, 1992; Nonnemana-Vanhoudta, 1996; Lucasa, 1988 i w prezentowanym w tym opracowaniu modelu wzrostu gospodarczego) można endogenizować łączną produkcyjność czynników produkcji w każdej z gospodarek.

Wówczas uzyskano $\alpha = \dfrac{\ln 2}{0{,}7 \ln 5} \approx 0{,}6153$ oraz β = 0,3 $\alpha \approx$ 0,1846[15]. Przy tej kalibracji parametrów α i β wyjściowa relacja produkcyjności kapitału p_1/p_2 wynosi 0,4.

Mając skalibrowane wartości $\alpha \approx 0{,}6153$ oraz $\beta \approx 0{,}1846$ autorzy przyjęli arbitralnie, że stopy ubytku kapitału na pracującego w każdej z badanych typów równe są 6% (a więc $\mu_1 = \mu_2 = 0{,}06$), $a = 1$ oraz, że $\ell = 0{,}15$. Pozwoliło to (przy ustalonych wartościach k_1 i k_2 oraz s_1 i s_2 w roku t=1) na obliczenie stóp s_{ij} (dla i, j = 1, 2) w kolejnych latach t>1.

O stopach s_1 oraz s_2 założono w kolejnych wariantach, że $s_1 = 0{,}25$ i $s_2 = 0{,}2$ (prezentowane dalej warianty A) lub $s_1 = s_2 = 0{,}225$ (warianty B) lub $s_1 = 0{,}2$ i $s_2 = 0{,}25$ (warianty C w tabeli 1).

Przyjęto też, że wyjściowa relacji technicznego uzbrojenia pracy równa była 5, co daje iloraz wyjściowych poziomów wydajności pracy y_1/y_2 równy 2.

3.2. SYMULACJE NUMERYCZNE

Model symulacyjny opisany jest przez następujące równania (odpowiadające w czasie dyskretnym równaniom modelu z punktu 3 oraz skalibrowanym jego parametrom):

$$\forall (i, j = 1{,}2 \wedge i \neq j) \;\; y_{it} = k_{it}^{0{,}6153} k_{jt}^{0{,}1846}, \tag{39}$$

$$s_{11t} = \left(1 - \frac{0{,}15}{1 + \exp(-(p_{2t} / p_{1t}))}\right) s_1, \tag{40}$$

$$s_{21t} = \frac{0{,}15}{1 + \exp(-(p_{2t} / p_{1t}))} s_1, \tag{41}$$

$$s_{22t} = \left(1 - \frac{0{,}15}{1 + \exp(-(p_{1t} / p_{2t}))}\right) s_2, \tag{42}$$

$$s_{12t} = \frac{0{,}15}{1 + \exp(-(p_{1t} / p_{2t}))} s_2, \tag{43}$$

[15] Skalibrowana elastyczność $\alpha \approx 0{,}6153$ jest zbliżona do oszacowanych elastyczności funkcji wydajności pracy w polskich województwach prezentowanych w pracy Mroczek, Tokarskiego (2013).

$$\forall(i, j = 1,2 \wedge i \neq j) \quad \frac{p_{it}}{p_{jt}} = \left(\frac{k_{jt}}{k_{it}}\right)^{0,5693}, \tag{44}$$

$$\Delta k_{1t} = s_{11t-1} y_{1t-1} + s_{12t-1} \frac{1-\omega}{\omega} y_{2t-1} - 0,06 k_{1t-1} \tag{45}$$

oraz:

$$\Delta k_{2t} = s_{22t-1} y_{2t-1} + s_{21t-1} \frac{\omega}{1-\omega} y_{1t-1} - 0,06 k_{2t-1}. \tag{46}$$

Wyniki symulacji numerycznych modelu opisanego przez równania (39–46), przy udziale pracujących ω zmieniającym się od 20% do 80% co 10 punktów procentowych, zestawiono w tabeli 1.

Z tabeli 1 oraz symulacji numerycznych wyciągnąć można następujące wnioski:

– Gdyby w gospodarce bogatej pracowało 20% pracujących w obu gospodarkach, to gospodarka biedna nigdy nie dogoniłaby gospodarki bogatej. Wystąpi jednak wówczas proces częściowej konwergencji technicznego uzbrojenia pracy i wydajności pracy. Po 25 latach relacje technicznego uzbrojenia pracy spadną bowiem do ok. 1,609–2,317, wydajności pracy – do 1,227–1,436, po 50 latach (odpowiednio) do 1,369–2,029 oraz 1,145–1,356, po 100 latach – 1,327–1,965 i 1,130–1,338, by w długim okresie ustabilizować się na poziomie 1,325–1,961 (w przypadku technicznego uzbrojenia pracy) oraz 1,129–1,336 (w przypadku wydajności pracy).
– Również 30% udział pracujących w gospodarce bogatej prowadził będzie jedynie do częściowej konwergencji kapitału i produktu na pracującego. Po 25 latach techniczne uzbrojenia pracy w gospodarce bogatej będzie o 37,4%–102,1% wyższe niż w gospodarce biednej, po 50 latach o 11,1%–71,6% wyższe, po 100 latach – o 5,9%–64,5%, by w długim okresie iloraz k_1/k_2 ukształtował się na poziomie 1,056–1,640. Analogiczne relacje wydajności pracy w wariantach 2ABC wynosić powinny 1,147–1,354 (po 25 latach), 1,046–1,262 (po 50 latach), 1,025–1,239 (po 100 latach) i 1,024–1,237 (w długookresowej równowadze).
– Do podobnych wniosków prowadzą warianty 3AB. Natomiast w wariancie 3C gospodarka biedna powinna po 41 latach dogonić gospodarkę bogatą tak pod względem technicznego uzbrojenia pracy, jak i wydajności pracy. Długookresowe relacje technicznego uzbrojenia pracy powinny być wówczas równe 0,900, wydajności zaś pracy – 0,956.
– Przy 50% udziale pracujących w obu gospodarkach i 25% stopie inwestycji w gospodarce bogatej oraz 20% stopie inwestycji w gospodarce biednej gospodarka biedna nigdy nie dogoni bogatej. Po 25 latach relacja technicznego uzbro-

Tabela 1.

Wyniki symulacji numerycznych

Wariant	ω	s_1	s_2	s_{11}/s_{11}^*	s_{12}/s_{12}^*	s_{22}/s_{22}^*	s_{21}/s_{21}^*	Długookresowe relacje[b]			Po ilu latach gospodarka 2 dogoni gospodarkę 1?
	w % [a]							technicznego uzbrojenia pracy	wydajności pracy	produktywności kapitału	
1A	20,0	25,0	20,0	21,5/22,0	1,8/2,0	18,2/18,0	3,5/3,0	1,961	1,336	0,682	nigdy
1B		22,5	22,5	19,4/19,8	2,0/2,3	20,5/20,2	3,1/2,7	1,594	1,222	0,767	nigdy
1C		20,0	25,0	17,2/17,7	2,2/2,6	22,8/22,4	2,8/2,3	1,325	1,129	0,852	nigdy
2A	30,0	25,0	20,0	21,5/22,0	1,8/2,0	18,2/18,0	3,5/3,0	1,640	1,237	0,755	nigdy
2B		22,5	22,5	19,4/19,9	2,0/2,4	20,5/20,1	3,1/2,6	1,305	1,121	0,859	nigdy
2C		20,0	25,0	17,2/17,8	2,2/2,7	22,8/22,3	2,8/2,2	1,056	1,024	0,969	nigdy
3A	40,0	25,0	20,0	21,5/22,1	1,8/2,1	18,2/17,9	3,5/2,9	1,434	1,168	0,815	nigdy
3B		22,5	22,5	19,4/20,2	2,0/2,4	20,5/20,1	3,1/2,5	1,131	1,054	0,932	nigdy
3C		20,0	25,0	17,2/17,8	2,2/2,8	22,8/22,2	2,8/2,2	0,900	0,956	1,062	41
4A	50,0	25,0	20,0	21,5/22,2	1,8/2,1	18,2/17,9	3,5/2,8	1,267	1,107	0,874	nigdy
4B		22,5	22,5	19,4/20,0	2,0/2,5	20,5/20,0	3,1/2,5	1	1	1	nigdy[c]
4C		20,0	25,0	17,2/17,9	2,2/2,8	22,8/22,2	2,8/2,1	0,789	0,903	1,144	30
5A	60,0	25,0	20,0	21,5/22,2	1,8/2,2	18,2/17,8	3,5/2,8	1,111	1,046	0,942	nigdy
5B		22,5	22,5	19,4/20,1	2,0/2,5	20,5/20,0	3,1/2,4	0,884	0,948	1,073	39
5C		20,0	25,0	17,2/17,9	2,2/2,9	22,8/22,1	2,8/2,1	0,698	0,856	1,228	24
6A	70,0	25,0	20,0	21,5/22,3	1,8/2,2	18,2/17,8	3,5/2,7	0,947	0,977	1,032	46
6B		22,5	22,5	19,4/20,1	2,0/2,6	20,5/19,9	3,1/2,4	0,766	0,892	1,164	26
6C		20,0	25,0	17,2/18,2	2,2/3,0	22,8/22,0	2,8/2,0	0,610	0,808	1,325	19
7A	80,0	25,0	20,0	21,5/22,4	1,8/2,3	18,2/17,7	3,5/2,6	0,755	0,886	1,174	20
7B		22,5	22,5	19,4/20,2	2,0/2,7	20,5/19,8	3,1/2,3	0,628	0,818	1,304	17
7C		20,0	25,0	17,2/18,0	2,2/3,0	22,8/22,0	2,8/2,0	0,510	0,748	1,467	14

a – s_{ij} oznacza stopy inwestycji w roku t = 1, zaś s_{ij}^* – stopy inwestycji w długookresowej równowadze, b – przez długookresowe relacje rozumie się relacje w roku symulacji t = 1000, c – ale przy $t \to +\infty$ będą ze sobą zbieżne.

jenia pracy ukształtuje się na poziomie 1,610, wydajności pracy – 1,228, po 50 latach (odpowiednio) 1,334 i 1,132, po 100 latach – 1,271 i 1,109, zaś w długim okresie gospodarka bogata będzie cieszyła się o 26,7% wyższym poziomem technicznego uzbrojenia pracy oraz o 10,7% wyższą wydajnością pracy. W wariancie 4B w długim okresie gospodarka biedna dogoni bogatą (po 50 latach techniczne uzbrojenie pracy w gospodarce bogatej będzie wyższe niż w biednej tylko o 6,6%, zaś wydajność pracy – jedynie o 2,8%). Natomiast wariant 4C doprowadzi do tego, że gospodarka początkowo biedna po 30 latach cechować się będą wyższym poziomem kapitału i produktu na pracującego, niż gospodarka początkowo bogata. W wariancie tym długookresowa relacja technicznego uzbrojenia pracy powinna wynosić 0,789, natomiast wydajności pracy – 0,903.

– 60% udział pracujących w gospodarce bogatej powinien prowadzić do tego, że w wariancie 5A gospodarka biedna nigdy nie dogoni bogatej, jednak zmniejszy w długim okresie relację technicznego uzbrojenia pracy do 1,111 oraz wydajności pracy do 1,046. Warianty 5BC sugerują, że gospodarka biedna prześcignie gospodarkę bogatą po upływie 39 lat (wariant 5B) lub 24 lat (5C). W tych wariantach relacje długookresowej technicznego uzbrojenia pracy powinny ukształtować się na poziomach (odpowiednio) 0,884 i 0,698, zaś wydajności pracy – 0,948 oraz 0,856.
– Przy 70% udziale pracujących w gospodarce 1 gospodarka ta stanie się gospodarką biedną po 19–46 latach. Po 25 latach wydajność pracy w gospodarce 1 będzie o 7,7% (wariant 6A) lub 0,9% (6B) wyższa niż w gospodarce 2, bądź też o 5,9% niższa (wariant 6C) niż w gospodarce 2. Po 50 latach relacje wydajności pracy powinny się kształtować na poziomie 0,995, 0,915 lub 0,836, po 100 latach – 0,978, 0,893 lub 0,810, by w długim okresie ustabilizować się na poziomie między 0,808 a 0,977.
– Do podobnych wniosków można dojść rozważając warianty 7ABC. W tych wariantach gospodarka początkowo biedna dogoni gospodarkę początkowo bogatą już po upływie 14 (wariant 7C), 17 (7B) lub 20 lat (7A). Długookresowe relacje technicznego uzbrojenia pracy winny się wówczas ustabilizować na poziomach 0,510–0,755, wydajności zaś pracy – 0,748–0,886.

4. PODSUMOWANIE

Prowadzone w pracy rozważania można podsumować następująco:

I. Zaprezentowany w opracowaniu dwubiegunowy model wzrostu bazuje na neoklasycznym modelu wzrostu Solowa (1956) i jego późniejszych rozszerzeniach. Model ten wpisuje się w szeroki nurt rozważań nad przyczynami procesów polaryzacji rozwoju ekonomicznego, będących wynikiem zróżnicowanej produktywności czynników produkcji oraz kierunków i dynamiki przepływów inwestycyjnych. W związku z tym szerszym kontekstem dla opisanego modelu są m.in. teoria kumulatywnej przyczynowości (Myrdal, 1957; Kaldor, 1970), teoria polaryzacji (Hirschmann, 1958) oraz teoria centrum i peryferii (Friedmann, Weaver, 1979).

II. W dwubiegunowym modelu wzrostu gospodarczego przyjmuje się, że pomiędzy dwoma typami gospodarek występują przepływy inwestycyjne, które zależną od relacji produktywności kapitału w tych gospodarkach. Stąd proces akumulacji kapitału rzeczowego w każdej z gospodarek jest zarówno wynikiem oszczędności krajowych, jak i inwestycji zagranicznych.

III. W modelu zakłada się m.in., iż udział inwestycji zagranicznych danej gospodarki w jej inwestycjach ogółem jest opisany przez funkcję logitową i zależy od ilorazu produktywności kapitału w obu typach gospodarek. Im wyższa jest relacja produktywności kapitału w gospodarce bogatej w stosunku do gospodarki biednej, tym niższy jest udział inwestycji zagranicznych w gospodarce bogatej i tym wyższy jest odsetek inwestycji zagranicznych w gospodarce biednej. Ponadto, gdy produktywność kapitału w gospodarce bogatej jest niższa, niż w gospodarce biednej, to kraje bogate przeznaczają większą część swoich inwestycji na inwestycje zagraniczne od krajów biednych.

IV. Rozważany model wzrostu posiada asymptotycznie stabilny, nietrywialny punkt stacjonarny. O punkcie tym przyjmuje się, iż jest to punkt długookresowej równowagi rozważanych gospodarek.

V. By móc przeprowadzić symulacje numeryczne stanów długookresowej równowagi skalibrowano podstawowe parametry modelu. Parametr α, czyli elastyczność wydajności pracy w bogatej (biednej) gospodarce względem technicznego uzbrojenia pracy w bogatej (biednej) gospodarce został wyznaczony na poziomie równym ok. 0,6153. Natomiast parametr β, czyli elastyczność łącznej produktywności czynników produkcji w bogatej (biednej) gospodarce względem kapitału na pracującego w biednej (bogatej) gospodarce skalibrowano na poziomie wynoszącym ok. 0,1846. Przyjęto także, że górna granica udziału inwestycji, które realizowane są za granicą równa jest 15%, a stopy ubytku kapitału na pracującego wynoszą 6% w każdym z analizowanych typów gospodarek.

VI. Symulacje numeryczne pozwoliły na oszacowanie długookresowych relacji pomiędzy gospodarkami bogatymi i biednymi w poziomie technicznego uzbrojenia pracy, wydajności pracy oraz produktywności kapitału. Symulacje umożliwiły także wyliczenie horyzontu czasowego, w którym gospodarka biedna mogłaby dogonić gospodarkę bogatą pod względem poziomu analizowanych w pracy zmiennych makroekonomicznych.

VII. W analizach numerycznej przyjęto, iż wyjściowa relacja pomiędzy poziomem technicznego uzbrojenia pracy w gospodarce bogatej i w gospodarce biednej równa jest 5. Symulacje numeryczne przeprowadzono dla siedmiu poziomów udziału pracujących w gospodarce bogatej (od 20% do 80% co 10 punktów procentowych). Dodatkowo dla każdego poziomu owego udziału rozważano trzy warianty stóp inwestycji – pierwszy, w którym stopa inwestycji w gospodarce bogatej wynosi 25%, a w biednej 20%; drugi – stopy inwestycji są równe 22,5%

w każdej z gospodarek; trzeci – stopa inwestycji w gospodarce bogatej wynosi 20%, a w biednej 25%.

VIII. Jeśli w krajach bogatych pracować będzie 20% i 30% udział pracujących, to niezależnie od przyjętego wariantu stóp inwestycji gospodarka biedna nigdy nie dogoni bogatej. Przy udziale tym równym 40% kraje biedne dogoniłyby bogate tylko przy trzeciej kombinacji stóp inwestycji (czyli inwestując o 5 punktów procentowych więcej niż kraje bogate). Przy 50% i 60% udziale pracujących w krajach bogatych, gospodarki biedne mogłyby dogonić gospodarki bogate tylko w sytuacji, gdy stopy inwestycji będą w nich równe lub wyższe niż w krajach bogatych. Zaś przy 70% i 80% udziale pracujących w krajach bogatych gospodarki biedne prześcigną gospodarki bogate niezależnie od tego, który z rozważanych wariantów stóp inwestycji zostanie w nich przyjęty.

Katarzyna Filipowicz, Rafał Wisła, Tomasz Tokarski – Uniwersytet Jagielloński

LITERATURA

Acemoglu D., (2009), *Introduction to Modern Economic Growth*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

Aghion P., Howitt P. W., (2009), *The Economics of Growth*, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, London, England.

Cobb C. W., Douglas, P. H., (1928), A Theory of Production, *American Economic Review*, 18, 139–165.

Friedmann J., Weaver C., (1979), *Territory and Function: the Evolution of Regional Planning*, Edward Arnold, London.

Hirschmann, A. O., (1958), *The Strategy of Economic Development*, Yale University Press, New Haven.

Kaldor N., (1970), The Case for Regional Policies, *Scottish Journal of Political Economy*, 17 (4), 337–348.

Kumor P., Pawlak W., Sztaudynger J. J. (2009), Growth and Inequality: Differences in Optimal Income Inequality between Sweden, the United States and Poland, w: Liberda Z. B., Grochowska A., (red.), *Civilizational competences and regional development in Poland*, Warsaw University Press, Warsaw, 204–219.

Lucas R. E., (1988), On the Mechanics of Economics Development, *Journal of Monetary Economics*, 22, 3–42.

Malaga K., (2013), Jednolita teoria wzrostu gospodarczego – stan obecny i nowe wyzwania, referat na IX Kongres Ekonomistów Polskich PTE, Warszawa.

Mankiw N. G., Romer D., Weil D. N., (1992), A Contribution to the Empirics of Economic Growth, *Quarterly Journal of Economics*, 107, 407–437.

Mroczek K., Tokarski T., (2013), Przestrzenne zróżnicowanie technicznego uzbrojenia pracy, wydajności pracy i łącznej produkcyjności czynników produkcji w Polsce w latach 1995–2009, *Studia Prawno-Ekonomiczne*, tom LXXXVIII, Łódzkie Towarzystwo Naukowe, Łódź, 333–357.

Mroczek K., Tokarski T., (2014), Efekt grawitacyjny a zróżnicowanie wydajności pracy w krajach UE, referat na *IV Ogólnopolską Konferencję im. Prof. Z. Czerwińskiego pt. Matematyka i informatyka na usługach ekonomii*, WIGE UEP, Poznań, 25 kwietnia 2014 roku.

Mroczek K., Tokarski T., (2015a), Dwubiegunowy model wzrostu gospodarczego z przepływami inwestycyjnymi, opracowanie przyjęte do druku przez Redakcję *Studiów Prawno-Ekonomicznych*.
Mroczek K., Tokarski T., (2015b), Wpływ efektu grawitacyjnego na zróżnicowania rozwoju ekonomicznego powiatów, opracowanie przyjęte do druku przez Redakcję *Wiadomości Statystycznych*.
Mroczek K., Tokarski T., Trojak M., (2014), Grawitacyjny model zróżnicowania rozwoju ekonomicznego województw, *Gospodarka Narodowa*, 3, 5–34.
Myrdal G., (1957), *Rich Lands and Poor*, Harper and Brothers, New York.
Myrdal G., (1963), Economic Theory and Underdeveloped Regions, University Paperbacks, Methuen&Co. Ltd., London.
Nonneman W., Vanhoudt P., (1996), A Further Augmentation of the Solow Model and the Empirics of Economic Growth for the OECD Countries, *Quarterly Journal of Economics*, 111 (3), 944–953.
Ombach J., (1999), *Wykłady z równań różniczkowych wspomagane komputerowo – Maple*, Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków.
Pietrzak M. B., Łapińska J., (2014), Zastosowanie modelu grawitacji do identyfikacji czynników determinujących przepływy handlowe w Unii Europejskiej, *Przegląd Statystyczny*, 61 (1), 65–77.
Prebisch R., (1950), The Economic Development of Latin America and its Principal Problems, *Economic Bulletin for Latin America*, 7 (1), 1–12.
Solow R. M., (1956), A Contribution to the Theory of Economic Growth, *Quarterly Journal of Economics*, 70 (1), 65–94.
Solow R. M., (1957), Technical Change and the Aggregate Production Function, *Review of Economics and Statistics*, 39 (3), 312–320.
Sztaudynger J. J., (2007), Społeczne problemy wzrostu gospodarczego – analiza ekonometryczna, w: Klimczak B., Lewicka-Strzałecka A., (red.) *Etyka i ekonomia*, Wydawnictwo Polskiego Towarzystwa Ekonomicznego, Warszawa, 133–164,
Tokarski T., (2006), Efekty skali, akumulacja kapitału i wzrost gospodarczy, *Studia Prawno-Ekonomiczne*, tom LXXIII, 103–135.
Tokarski T., (2007a), Efekty skali a akumulacja kapitału i wzrost zatrudnienia, *Ekonomista*, (5), 631–649
Tokarski T., (2007b), Efekty skali a wzrost gospodarczy, *Gospodarka Narodowa*, (1–2), 9–31.
Tokarski T., (2008), *Efekty skali a wzrost gospodarczy*, Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków.
Tokarski T., (2009), *Matematyczne modele wzrostu gospodarczego (ujęcie neoklasyczne)*, Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków.
Tokarski T., (2011), *Ekonomia matematyczna. Modele makroekonomiczne*, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa.
Żółtowska E., (1997), *Funkcja produkcji. Teoria, estymacja, zastosowania*, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź.

PRODUKTYWNOŚĆ KAPITAŁU A INWESTYCJE ZAGRANICZNE W DWUBIEGUNOWYM MODELU WZROSTU GOSPODARCZEGO – ANALIZA KONWERGENCJI

Streszczenie

W artykule konstruuje się dwubiegunowy model wzrostu gospodarczego, którego głównymi założeniami są: (1) przepływy inwestycyjne zależne od relacji produktywności kapitału w dwóch typach gospodarek – umownie nazywanych bogatymi i biednymi, (2) udział inwestycji zagranicznych danej gospodarki w jej inwestycjach ogółem jest opisany przez funkcję logitową i zależy od ilorazu produktywności kapitału w obu typach gospodarek. Podstawowym celem artykułu jest empiryczna weryfikacja modelu i jego założeń poprzez analizę oddziaływania inwestycji krajowych i zagranicznych na równowagę długookresowego wzrostu gospodarczego. Prezentowany w opracowaniu dwubiegunowy model wzrostu gospodarczego bazuje na neoklasycznym modelu wzrostu Solowa i jego późniejszych rozszerzeniach. Model ten wpisuje się w szeroki nurt rozważań nad przyczynami procesów polaryzacji rozwoju ekonomicznego, będących wynikiem zróżnicowanej produktywności czynników produkcji oraz kierunków i dynamiki przepływów inwestycyjnych. Przeprowadzone symulacje numeryczne pozwoliły na oszacowanie długookresowych relacji pomiędzy gospodarkami bogatymi i biednymi w poziomie technicznego uzbrojenia pracy, wydajności pracy oraz produktywności kapitału. Symulacje umożliwiły również wyliczenie horyzontu czasowego, w którym gospodarka biedna mogłaby dogonić gospodarkę bogatą pod względem poziomu analizowanych zmiennych makroekonomicznych.

Słowa kluczowe: dwubiegunowy model wzrostu gospodarczego, grawitacyjny model wzrostu gospodarczego, determinanty przepływów inwestycyjnych

CAPITAL PRODUCTIVITY AND FOREIGN INVESTMENTS IN THE BIPOLAR ECONOMIC GROWTH MODEL – CONVERGENCE ANALYSIS

A b s t r a c t

In this article, the authors have been constructing a bipolar economic growth model, whose main assumptions are: investment flows depend on the ratio of capital productivity in two types of economies – conventionally called the rich and the poor, and the share of foreign investments in the economy of its total investment is described by logit function and depends on the ratio of capital productivity in both types of economies. The main purpose of this paper, is the empirical verification of the bipolar economic growth model and its assumptions, by analyzing the impact of domestic and foreign investments on the long-term economic growth balance. The bipolar economic growth model is based on the Solow's neoclassical growth model and its subsequent extensions. The bipolar economic growth model enters into a broad current investigation of the causes of polarization processes of economic development. Numerical simulations allows an estimate of the long-term relationship between the rich and poor economies, in regard to the capital-labour ratio, labor efficiency and capital productivity. The simulations also allow the calculation of the time horizon over which the poor economy would equal the rich economy in terms of the level of macroeconomic variables analyzed.

Keywords: Bipolar Economic Growth Model, Gravity Economic Growth Model, Determinants of Investment Flows