STRUKTURA TERMINOWA STÓP PROCENTOWYCH OPISANA MODELAMI STOPY KRÓTKOTERMINOWEJ

ŚLĄSKI PRZEGLĄD STATYSTYCZNY
Nr 12(18)

Agnieszka Mruklik
Uniwersytet Przyrodniczy we Wrocławiu

ISSN 1644-6739

Streszczenie: W artykule przedstawiono zarys podstaw teoretycznych struktury terminowej stóp procentowych, przypominając jej trzy główne koncepcje. Wskazano na teoretyczne i praktyczne korzyści płynące z takiego rodzaju modelowania. Wymieniono argumenty wspierające opinię, że model rynku finansowego z czasem ciągłym jest lepszy niż model z czasem dyskretnym. Nieco obszerniej omówiono jedno- i dwuczynnikowe modele dynamiki stopy krótkoterminowej opisane stochastycznymi równaniami różniczkowymi.

Słowa kluczowe: stopa krótkoterminowa, struktura terminowa stóp procentowych, krzywa dochodowości, modele jednoczynnikowe stopy krótkoterminowej, modele dwuczynnikowe stopy krótkoterminowej.

DOI: 10.15611/sps.2014.12.15

1. Wstęp

Problematyka stopy procentowej jest nader istotnym zagadnieniem rozpatrywanym w ujęciu zarówno teoretycznym, jak i praktycznym m.in. przez ekonomistów, finansistów oraz matematyków. Stopa procentowa odgrywa zasadniczą rolę w funkcjonowaniu rynku finansowego i wywiera wpływ na wiele innych wielkości oraz zjawisk ekonomicznych. Oddziałuje na procesy gospodarowania podmiotów gospodarczych, a w konsekwencji – na bardziej złożone układy typu gospodarki narodowej [Dębski 2010, s. 99]. Niektórzy badacze opowiadają się za scaleniem modeli makroekonomicznych, zwłaszcza modeli wzrostu gospodarczego, z modelami stóp procentowych [Jajuga 2005]. W tym kontekście problematyka stopy procentowej zyskuje dodatkowe, doniosłe znaczenie. Z całokształtu zagadnień związanych ze stopą procentową wybierzemy kwestię modelowania. Świadomie ograniczymy się przy tym do rozważenia przede wszystkim pewnej podklasy modeli stopy krótkoterminowej.

Poniżej wymienimy oznaczenia i definicje używane w dalszych rozważaniach.

ŚLĄSKI PRZEGLĄD STATYSTYCZNY

Nr 12(18)

2. Oznaczenia i definicje

Niech T^* oznacza skończony horyzont czasowy rozpatrywanego modelu rynku finansowego z czasem ciągłym. Zakładamy, że $T^* > 0$. Przez $\boldsymbol{P}$ oznaczymy rzeczywistą (fizyczną) miarę prawdopodobieństwa. Ponadto $W = (W(t))_{t\in[0,T^*]}$ symbolizuje jednowymiarowy, standardowy proces Wienera względem miary $\boldsymbol{P}$.

Proces stochastyczny $r = (r(t)\ _{t\in[0,T^*]}$ określony na przestrzeni $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ modeluje krótkoterminową stopę procentową (inne określenia to: chwilowa natychmiastowa stopa procentowa, chwilowa stopa spot) (*short term rate*, *instantaneous spot rate*). Stopa ta reprezentuje oprocentowanie pożyczki rozpoczętej dzisiaj i trwającej przez dowolnie mały okres. Stopa $r(t)$ wyraża bieżący stan rynku stóp procentowych. Niestety stopa krótkoterminowa nie jest bezpośrednio obserwowana na rynkach finansowych.

W matematycznym opisie rynku finansowego występuje również proces $P(t, T)$. Proces ten określony jest na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ i oznacza cenę w chwili t obligacji zerokuponowej o terminie wykupu T i wartości nominalnej 1 ($P(T, T) = 1$ dla każdego $T \in [0, T^*)$), $0 \le t \le T < T^*$. $P(t, T)$ zależy od $r(t)$

$$P(t,T) = E_{\boldsymbol{Q}}\left(exp\left\{-\int_t^T r(s)ds\right\}\middle|\mathcal{F}_{\mathrm{t}}\right),$$

gdzie $E_{\boldsymbol{Q}}$ oznacza wartość oczekiwaną względem miary martyngałowej spot $\boldsymbol{Q}$.

YTM(t, T) to wartość w chwili t stopy zwrotu do terminu wykupu T (*yield to maturity*) uzyskana z inwestycji w obligację:

$$YTM(t,T) = -\frac{1}{T-t}\ln P(t,T).$$

YTM(t, T) jako funkcja T jest krzywą dochodowości (*yield curve*) w chwili t. Krzywa dochodowości (inne określenia to: krzywa rentowności, krzywa stopy zwrotu) przedstawia relację pomiędzy stopami zwrotu a terminami wykupu tylko dla pewnej grupy obligacji wyodrębnionej np. na podstawie wielkości kuponów, przynależności do odpowiedniej klasy ryzyka lub rodzaju oprocentowania.

Krzywa dochodowości stanowi przybliżenie struktury terminowej stóp procentowych. Mianem struktury terminowej stóp procentowych (*term structure of interest rates*) określa się wpływ czasu na stopy procentowe. Pojęcie to jest zazwyczaj definiowane jako zależność stóp zwrotu wolnych od ryzyka obligacji zerokuponowych od ich terminów wykupu. Wspomniane ryzyko to m.in. ryzyko reinwestowania dochodów (kuponów) uzyskanych z tytułu posiadania obligacji. Stopa reinwestowania odsetek zależy przede wszystkim od stóp procentowych na rynku. Im dłuższy okres do terminu wykupu, tym większa szansa, że stopy te się zmienią. W związku z tym obligacje zerokuponowe można uważać za papiery wartościowe, które nie są obarczone tego typu ryzykiem. Zacytowana definicja struktury terminowej nastręcza w praktyce wiele trudności, zwłaszcza gdy brane są pod uwagę duże przedziały czasu. Najbardziej istotnymi mankamentami rynku finansowego generującymi owe niedogodności są:

- niewielka liczba obligacji zerokuponowych dostępnych na rynku (ten problem dotyczy również Polski),
- obligacje stanowiące bazę tworzenia struktury terminowej powinny być jednorodne, tzn. powinny należeć do tej samej klasy ryzyka (obligacje wolne od ryzyka praktycznie nie istnieją, za optymalne ich przybliżenie uchodzą bony skarbowe, choć i to podejście można poddać krytyce w obliczu choćby nie tak dawnego i nie w pełni przebrzmiałego światowego kryzysu gospodarczego), odznaczać się taką samą płynnością, sposobem opodatkowania, takim samym ryzykiem niewypłacalności, być instrumentami tego samego emitenta, mieć różne terminy wykupu itp.

Z tych powodów w praktyce, jako przybliżenie struktury terminowej, tworzy się właśnie krzywą dochodowości [Weron, Weron 1999, s. 204]. Badacze wyróżniają cztery typowe kształty krzywej stopy zwrotu: normalny (*normal*), płaski (*flat),* odwrócony (*inverted*) i łukowaty (*humped*) [Jajuga 1998, s. 62].

Określimy teraz, jaki jest związek między procesem stopy krótkoterminowej r a intensywnością oprocentowania. Niech δ oznacza intensywność oprocentowania równoważną efektywnej stopie r_{ef},

$$\delta \overset{\text{def}}{=} \lim_{k\to\infty}\frac{(1+r_{ef})^{1/k}-1}{1/k} = \ln(1+\ r_{ef}).$$

δ jest nominalną stopą procentową w granicznym przypadku oprocentowania złożonego, tzn. gdy w okresie bazowym liczba kapitalizacji $k\to\infty$. Wówczas kapitalizacja dokonywana jest teoretycznie nieustannie i mówi się o kapitalizacji ciągłej.

W bardziej ogólnym przypadku można rozpatrywać sytuację, gdy oprocentowanie jest funkcją czasu, tzn. zamiast stałej stopy procento-

ŚLĄSKI PRZEGLĄD STATYSTYCZNY
Nr 12(18)

wej r_{ef} mamy funkcję $r_{ef}(t)$. Intensywność oprocentowania jest wtedy również funkcją czasu określoną następująco

$$\delta(\mathrm{t}) = \ln(1 + r_{ef}(t)).$$

Kolejne uogólnienia to probabilistyczne i stochastyczne modelowanie oprocentowania. Wszystkie metody stochastycznego modelowania oprocentowania, a więc sposoby wykorzystujące teorię procesów stochastycznych, można podzielić na dwie grupy [Parker 1993; Ostasiewicz (red.) 2004]. Jedną z nich tworzą metody modelowania intensywności oprocentowania. Drugą zaś – metody modelowania funkcji intensywności oprocentowania $Y(t) = \int_0^t \delta(s)ds$. W przypadku pierwszego podejścia przyjmuje się, że intensywność oprocentowania jest funkcją losową, czyli procesem stochastycznym. Tak rozumianą intensywność oprocentowania utożsamia się wówczas z krótkoterminową stopą procentową $r(t)$. Zdecydowanie bardziej liczny i wciąż częściej wzbogacany przez badaczy jest zbiór metod modelowania intensywności oprocentowania. Tej grupie i my poświęcimy naszą uwagę.

Przedstawimy teraz w zarysie teoretyczne podwaliny struktury terminowej stóp procentowych.

3. Podstawy teoretyczne struktury terminowej stóp procentowych

Spośród wielu teorii próbujących tłumaczyć strukturę terminową stóp procentowych, a co za tym idzie, usiłujących wyjaśniać również kształt krzywej dochodowości, trzy są chyba najbardziej znane. Mowa o:
- teorii oczekiwań (e*xpectations theory*),
- teorii preferencji płynności (*liquidity preference theory*),
- teorii segmentacji rynku (*market segmentation theory*, *preferred habitat theory*).

Wspomniane koncepcje wskazują, identyfikują i opisują czynniki determinujące zróżnicowanie czasowe stóp procentowych oraz objaśniają mechanizmy kształtujące poziom tych stóp. Więcej na ten temat pisze np. A. Gemzik-Salwach [2010]. Publikacja ta stanowi, poprzedzoną gruntownymi studiami literaturowymi, próbę uporządkowania i usystematyzowania obecnego stanu wiedzy na temat teorii czasowej struktury stóp procentowych oraz jej estymacji. Autorka wymienionego artykułu podkreśla, że niestety „żadna ze stworzonych do tej pory

ŚLĄSKI
PRZEGLĄD
STATYSTYCZNY

Nr 12(18)

hipotez nie wyjaśnia w sposób zadowalający empirycznych obserwacji kształtów przybieranych przez krzywą dochodowości".

Badacze podejmowali próby empirycznej weryfikacji koncepcji terminowej struktury stóp procentowych. Najczęściej brali pod uwagę teorię oczekiwań. Przegląd rezultatów tych analiz zawiera np. praca U. Ziarko-Siwek i M. Kamińskiego [2003]. Przez kilkadziesiąt lat zajmowano się teorią oczekiwań w różnych gospodarkach. Przeważają jednak badania rynku amerykańskiego. Naukowcy doszli do następującej konkluzji: to, czy teoria oczekiwań się sprawdza, jest uzależnione od wielu czynników. Do tych składników warunkujących zaliczyć można m.in. rodzaj realizowanej strategii polityki pieniężnej, przyjęty okres badawczy, płynność i efektywność rynku finansowego, wykorzystywaną do analizy metodę oraz rodzaj danych używanych podczas badań. U. Ziarko-Siwek i M. Kamiński [2003] przeprowadzili tego typu analizy dla Polski. Autorzy nie dowiedli, że teoria oczekiwań pozwala przewidywać kierunek zmian stóp procentowych na rynku polskim.

Zastanówmy się teraz nad ważkim pytaniem o zasadność tworzenia modeli struktury terminowej. W następnym punkcie postaramy się pokazać, jaki pożytek daje nam takie właśnie modelowanie. Wypunktujemy mianowicie główne zastosowania modeli struktury terminowej stóp procentowych.

4. Korzyści płynące z modelowania struktury terminowej stóp procentowych

Wśród teoretycznych zastosowań struktury terminowej stóp procentowych wymienić można m.in.:

1) wycenę instrumentów dłużnych i instrumentów pochodnych na stopę procentową,

2) zastosowania modeli struktury terminowej stóp procentowych w matematyce aktuarialnej, gdzie stosuje się je m.in. do wyceny kontraktów ubezpieczeniowych i kalkulacji składek ubezpieczeniowych.

Ekonomiści i analitycy finansowi stosują omawiane modele, by pogłębić swoją wiedzę na temat procesu zmian stóp procentowych w miarę upływu czasu oraz sposobu oddziaływania rynku na te stopy [Munk 2003, s. 134].

Wśród badaczy przeważa opinia, iż struktura terminowa stóp procentowych nie jest modelowana w sposób zadowalający [Jajuga 2005]. Z tego powodu nader istotne jest dalsze prowadzenia analiz naukowych procesu zmian stóp procentowych w czasie.

ŚLĄSKI PRZEGLĄD STATYSTYCZNY
Nr 12(18)

Płaszczyzny praktycznych zastosowań modeli struktury terminowej stóp procentowych to (podział za [Świętoń 2002]):
1) zarządzanie finansowe,
2) polityka pieniężna i prognozy inflacyjne,
3) zjawiska w sferze gospodarki realnej.

Mówiąc o zarządzaniu finansowym, mamy na myśli:
1) wycenę papierów wartościowych [Świętoń 2002],
2) konstrukcję nowych produktów finansowych [Sztuba, Weron 2001],
3) prognozowanie stóp procentowych [Świętoń 2002],
4) zarządzanie ryzykiem finansowym, w szczególności ryzykiem stopy procentowej oraz analizę tegoż ryzyka.

Zauważono, że na kształt krzywej dochodowości wpływają m.in. oczekiwania inflacyjne uczestników rynku. Dlatego też banki centralne wykorzystują krzywą rentowności do kontrolowania poziomu inflacji. Stawki procentowe tworzące tę krzywą stanowią również ważne parametry przy zarządzaniu długiem publicznym [Gemzik-Salwach 2010]. Obszerniej ten aspekt spożytkowania wiedzy o strukturze terminowej stóp procentowych omawia w swoim artykule M. Świętoń [2002].

Badacze wskazują liczne powiązania między krzywą dochodowości a tempem wzrostu gospodarczego. Znajomość struktury terminowej pozwala na podejmowanie efektywnych decyzji dotyczących inwestowania i finansowania różnorakich projektów [Jajuga 2005]. Wymienić tu można np. firmy ubezpieczeniowe uwzględniające aproksymacje krzywej rentowności w analizie symulacyjnej hipotetycznych scenariuszy długookresowego inwestowania środków pieniężnych. Oprócz tego krzywą rentowności można wykorzystać jako jeden ze znaczących czynników w przewidywaniu prawdopodobieństwa recesji.

Podsumowując: badanie kształtu krzywej dochodowości może dostarczyć cennych informacji szerokiemu gronu odbiorców. Zaliczają się do nich: uczestnicy rynku instrumentów dłużnych, władze monetarnych oraz wszelkie inne podmioty, które zainteresowane są prognozowaniem stóp procentowych, inflacji i koniunktury gospodarczej [Świętoń 2002].

Zajmiemy się teraz jednym z nader istotnych aspektów konstrukcji modeli struktury terminowej. Mowa o sposobie uwzględnienia czasu w tychże modelach. Zdaniem Palczewskiego bardziej ogólny model, czyli model rynku finansowego z czasem ciągłym i skończonym horyzontem czasowym, jest „uważany za podstawowe narzędzie analizy rzeczywistych rynków finansowych” [Rutkowski (red.) 2003, s. 173].

5. Przewaga modeli z czasem ciągłym nad modelami z czasem dyskretnym

Tytuł niniejszej części odzwierciedla pogląd znakomitej większości badaczy zajmujących się matematyką finansową. Takie w każdym bądź razie odnieśliśmy wrażenie po lekturze wielu artykułów i książek podejmujących tematy z zakresu wspomnianej dziedziny wiedzy. Przytoczymy teraz najważniejsze argumenty wysuwane przez zwolenników modeli z czasem ciągłym przemawiające za rozważaniem, udoskonalaniem i stosowaniem tychże modeli. Jakież są zatem owe kluczowe racje?

Otóż, po pierwsze, możemy uwzględnić realia rynku. Mimo tego, że chyba żaden inwestor ze względu na praktyczne uwarunkowania i koszty transakcji nie chciałby ciągle zawierać umów handlowych, występuje grupa uczestników rynku, którzy transakcje zawierają bardzo często, ponadto dzieje się to w krótkich odstępach czasu. Co więcej, musimy sobie zdać sprawę z tego, iż do zawarcia umowy handlowej może dojść o dowolnej porze. Wystarczy uzmysłowić sobie możliwości oferowane przez specjalistyczne systemy informatyczne. Tak więc zarówno ceny, jak i stopy procentowe mogą się zmieniać niemal stale [Munk 2003, s. 45].

Po drugie, częstokroć zdarza się, że aparat matematyczny potrzebny do analizy modeli z czasem ciągłym jest bardziej rozwinięty i pozwala nie tyle więcej, co w ogóle cokolwiek wyznaczyć, udowodnić oraz policzyć. W opinii matematyków jest on też pod wieloma względami bardziej elegancki formalnie, łatwiejszy w użyciu i zapewnia bardziej precyzyjne rezultaty teoretyczne. Ceną za to jest stosowanie bardziej zaawansowanych i skomplikowanych metod matematycznych [Gibson i in. 2001, s. 11].

Po trzecie, w wielu modelach teoretycznych dzięki poczynieniu założenia znajomości ciągłej struktury terminowej można wyznaczyć pewne miary ryzyka, prognozować zmienności cen obligacji lub stóp procentowych oraz wyceniać instrumenty pochodne [Kliber 2009].

Po czwarte, estymacja ciągłej struktury terminowej zapewnia dokładniejszą aproksymację realizacji procesu stopy krótkoterminowej. Owa poprawa polega na zmniejszeniu wpływu losowych zakłóceń rynkowych na obserwowane wartości obligacji, a w konsekwencji i na konstruowaną na ich bazie krzywą dochodowości [Kliber 2009].

6. Modele dynamiki stopy krótkoterminowej opisane stochastycznymi równaniami różniczkowymi

6.1. Modele jednoczynnikowe

Omawiane modele są opisane następującym stochastycznym równaniem różniczkowym o ogólnej postaci:

$$dr(t) = \alpha(r(t), t)dt + \beta(r(t), t)dW(t),$$

gdzie współczynniki α, β: $\mathbb{R} \times [0, T^*] \to \mathbb{R}$ spełniają odpowiednie techniczne założenia gwarantujące istnienie rozwiązania powyższego równania. $\alpha(r(t), t)$ określana jest mianem funkcji dryfu. Jej wartość interpretowana jest jako chwilowa średnia procesu r w chwili t i w stanie $r(t)$. $\beta(r(t), t)$ nazywana jest funkcją dyfuzji. Jej wartość z kolei interpretuje się jako zmienność (tzn. chwilowe odchylenie standardowe) procesu r w chwili t i w stanie $r(t)$.

Tak określone modele stopy krótkoterminowej tworzą liczną klasę. Są one oparte na pojedynczym źródle niepewności – procesie Wienera. Dlatego też zalicza się je do klasy modeli jednoczynnikowych, zwanych również jednofaktorowymi. Według innego wytłumaczenia nazwa wywodzi się stąd, że modele te opisują tylko jeden czynnik, czyli stopę krótkoterminową. Jest ona jedyną zmienną stanową (faktorem), od której zależy krzywa dochodowości. W przypadku modeli wieloczynnikowych natomiast modelowanych czynników jest więcej i poza stopą krótkoterminową mogą to być na przykład zmienność stopy $r(t)$, średnia stopa długookresowa lub stopa inflacji [Gibson i in. 2001, s. 48].

Parametryczne przykłady jednoczynnikowych modeli chwilowej stopy procentowej można wyrazić w następujący sposób:

$$dr(t) = \left[\alpha_1(t) + \alpha_2(t)r(t) + \alpha_3(t)\ ln\left(r(t)\right)\right]dt \\ + \left[\beta_1(t) + \beta_2(t)\ r(t)\right]^{\nu} dW(t),$$

gdzie:
$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2$ – funkcje ciągłe,
$\nu \in [0{,}5; 1{,}5]$.

ŚLĄSKI PRZEGLĄD STATYSTYCZNY

Nr 12(18)

Tabela 1. Parametryczne przykłady jednoczynnikowych modeli stopy krótkoterminowej

Model	Współczynniki						**Formuła na $dr(t)$**
	α_1	α_2	α_3	β_1	β_2	ν	
Merton [1974]	•			•		**1**	$\alpha_1(t)\,dt + \beta_1(t)\,dW(t)$
Vasicek [1977]	•	•		•		**1**	$[\alpha_1(t) + \alpha_2(t)\,r(t)]dt + \beta_1(t)\,dW(t)$
Brennan–Schwartz [1979]	•	•			•	**1**	$[\alpha_1(t) + \alpha_2(t)\,r(t)]dt + \beta_2(t)r(t)\,dW(t)$
Cox–Ingersol–Ross (1980)					•	**1,5**	$[\beta_2(t)r(t)]^{1.5}dW(t)$
Cox–Ingersol–Ross [1985] **CIR**	•	•			•	**0,5**	$[\alpha_1(t) + \alpha_2(t)\,r(t)]dt + [\beta_2(t)r(t)]^{0,5}dW(t)$
Black–Karasinski [1991]		•	•		•	**1**	$[\alpha_2(t)\,r(t) + \alpha_3(t)\,ln\,(r(t))]dt + \beta_2(t)\,r(t)\,dW(t)$
Pearson–Sun [1994]	•	•		•	•	**0,5**	$[\alpha_1(t) + \alpha_2(t)\,r(t)]dt + [\beta_1(t) + \beta_2(t)r(t)]^{0,5}dW(t)$

• Współczynnik występuje w modelu jako niezerowy.

Źródło: [Weron, Weron 1999, s. 211].

6.2. Modele dwuczynnikowe

W przeciwieństwie do modeli jednoczynnikowych, modele wieloczynnikowe zapewniają bardziej realistyczną strukturę korelacyjną stóp zwrotu obligacji zerokuponowych i w większym stopniu wyjaśniają zmienność krzywej dochodowości. Pojawia się naturalne pytanie o to, ile czynników uwzględnić w modelu. Okazuje się, że już modele dwuczynnikowe wystarczająco dobrze spełniają swoją funkcję i w zadowalający sposób opisują strukturę terminową stóp procentowych. Na podstawie analiz empirycznych badacze doszli do wniosku, że modele jednoczynnikowe są w stanie wyjaśnić od 68 do 76% zmienności krzywej rentowności, modele dwuczynnikowe – od 85 do 90%, trzyczynnikowe zaś – od 93 do 94%. Wyniki te dotyczą wybranych, rozwiniętych gospodarek światowych. Niemniej jednak na podstawie tych rezultatów przyjmuje się, iż dwu- albo trzyczynnikowe modele w realistyczny sposób odzwierciedlają kształt całej krzywej dochodowości [Brigo, Mercurio 2006, s. 139].

Dwuczynnikowe modele dynamiki stopy krótkoterminowej są różnie opisane przez stochastyczne równania różniczkowe.

Na przykład proces y modelujący stopę krótkoterminową może mieć postać sumy

$$y(t) = r_1(t) + r_2(t),$$

gdzie każdy z procesów r_1, r_2 jest jednowymiarowym procesem stopy krótkoterminowej, której dynamika jest opisana stochastycznym równaniem różniczkowym, np. każde r_j opisane jest jednoczynnikowym modelem CIR i wtedy mamy do czynienia z dwuczynnikowym modelem CIR. Na ogół zakłada się, że poszczególne czynniki (składniki powyższej sumy) są wzajemnie niezależne.

W innym ujęciu dynamika procesu y modelującego stopę krótkoterminową może być opisana następującym stochastycznym równaniem różniczkowym o ogólnej postaci:

$$dy(t) = \alpha_y(y(t), t)dt + \beta_y(y(t), t)dW_1(t),$$

gdzie jeden ze współczynników α_y, β_y podlega generalizacji w stosunku do modelu jednoczynnikowego. Na przykład w przypadku dwuczynnikowego modelu Vasicka mamy

$$dy(t) = [\alpha_{1,y}(t) + \varepsilon(t) + \alpha_{2,y}(t)\, y(t)]dt + \beta_{1,y}(t)dW_1(t),$$

$$d\varepsilon(t) = \alpha_{2,\varepsilon}(t)\varepsilon(t)dt + \beta_{1,\varepsilon}(t)\rho dW_1(t) + \beta_{1,\varepsilon}(t)\sqrt{1-\rho^2}\rho dW_2(t),$$

gdzie ρ oznacza korelację między zmianami wartości procesów y oraz ε.

7. Podsumowanie

W artykule rozpatrzono wykorzystanie modeli chwilowej natychmiastowej stopy procentowej do opisu struktury terminowej stóp procentowych. Wskazano, iż dwu- albo trzyczynnikowe modele stopy krótkoterminowej w realistyczny sposób odzwierciedlają kształt całej krzywej dochodowości. Rezultaty te odnoszą się jednak do wybranych, rozwiniętych gospodarek światowych o zróżnicowanych i płynnych rynkach finansowych. W przypadku innych krajów stosowanie modeli stopy krótkoterminowej nastręcza kłopotów, ponieważ chwilowa natychmiastowa stopa procentowa nie jest bezpośrednio obserwowana na rynkach finansowych. Z tego powodu używa się przybliżeń jej realizacji. Stanowi to chyba największą wadę rozważanego w pracy podejścia do modelowania struktury terminowej stóp procentowych.

ŚLĄSKI
PRZEGLĄD
STATYSTYCZNY

Nr 12(18)

Wydaje się, iż zarówno teoretycy, jak i praktycy zarzucą modele stopy krótkoterminowej na rzecz tzw. modeli rynkowych odzwierciedlających dynamikę zmian obserwowanych na rynkach finansowych cen instrumentów pochodnych na stopę procentową.

Literatura

Black F., Karasinski P., *Bond and option pricing when short rates are lognormal*, „Financial Analysts Journal" 1991, Vol. 47, s. 52–59.

Brennan M., Schwartz E., *A continuous time approach to the pricing of bonds*, „Journal of Banking and Finance" 1979, Vol. 3, s. 133–155.

Brigo D., Mercurio F., *Interest Rate Theory and Practice with Smile, Inflation and Credit*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg 2006.

Cox J.C., Ingersoll J.E., Ross S.A., *A theory of the term structure of interest rates*, „Econometrica" 1985, Vol. 53, No. 2, s. 385–407.

Dębski W., *Rynek finansowy i jego mechanizmy. Podstawy teorii i praktyki*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2010.

Gemzik-Salwach A., *Analiza komparatywna koncepcji czasowej struktury stóp procentowych. Podejście analityczne i krytyczne*, Finansowy Kwartalnik Internetowy „e-Finanse" 2010, vol. 6, nr 2, http: www.e-finanse.com, s. 40–52.

Gibson R., Lhabitant F.-S., Talay D., *Modeling the term structure of interest rates: A review of the literature*, 2001, http://*www.risklab.ch/ftp/papers/TermStructureSurvey.pdf.*

Jajuga K., *Inwestycje. Instrumenty finansowe. Ryzyko finansowe. Inżynieria finansowa*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1998.

Jajuga K., *Modelowanie struktury terminowej stóp procentowych – wyzwanie dla ekonometrii*, Leźno 2005, http://ekonometria.wzr.pl/res/konferencje/300505/referaty.

Kliber P., *Estymacja struktury terminowej stóp procentowych w Polsce*, „Bank i Kredyt" 2009, s. 109–126.

Merton R., *On the pricing of corporate debt: the risk structure of interest rates*, „Journal of Finance" 1974, Vol. 29, s. 449–470.

Munk C., *Fixed Income Analysis: Securities, Pricing, and Risk Management*, 2003, http://www.sam.sdu.dk/~cmu.

Ostasiewicz W. (red.), *Składki i ryzyko ubezpieczeniowe. Modelowanie stochastyczne*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu, Wrocław 2004.

Parker G., *Two Stochastic Approaches for Discounting Actuarial Functions*, Proceedings of the XXIV ASTIN Colloquium, 1993, s. 367–389.

Pearson N., Sun T.S., *An empirical examination of the Cox, Ingersoll and Ross model of the term structure of interest rates using the method of maximum likelihood*, „Journal of Finance" 1994, vol. 54, s. 929–959.

Rutkowski M. (red.), *Matematyka finansowa. Instrumenty pochodne*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 2003.

Sztuba P., Weron A., *Pricing forward-start options in the HJM framework. Evidence from Polish market*, „*Applicationes Mathematicae* 2001*, nr 28 (2), s. 211–224.*

Świętoń M., *Terminowa struktura dochodowości skarbowych papierów wartościowych w Polsce w latach 1998–2001*, Materiały i Studia2002, nr 150, NBP, Warszawa.

Vasicek O., *An equilibrium characterisation of the term structure*, „Journal of Financial Economics" 1977, Vol. 5, s. 177–186.

ŚLĄSKI
PRZEGLĄD
STATYSTYCZNY

Nr 12(18)

Weron A., Weron R., *Inżynieria finansowa. Wycena instrumentów pochodnych. Symulacje komputerowe. Statystyka rynku*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1999.
Ziarko-Siwek U., Kamiński M., *Empiryczna weryfikacja teorii oczekiwań terminowej struktury stóp procentowych w Polsce*, Materiały i Studia 2003, nr 159, NBP, Warszawa, http: //www.nbp.pl.

TERM STRUCTURE OF INTEREST RATES DESCRIBED WITH SHORT-RATE MODELS

Summary: The article gives an overview of the theoretical basis for the term structure of interest rates. Theoretical and practical benefits of this kind of modeling are indicated. The arguments in support of the opinion that the financial market model with continuous time is better than the model with discrete time are listed. Slightly wider is the discussion on one-factor and two-factor models of the dynamics of the short term rate due to stochastic differential equations.

Keywords: spot rate, term structure of interest rates, yield curve, one-factor short-rate models, two-factor short-rate models.