Emil Panek
Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu, Wydział Informatyki i Gospodarki Elektronicznej, Katedra Ekonomii Matematycznej
emil.panek@ue.poznan.pl

NIESTACJONARNY MODEL VON NEUMANNA Z GRANICZNĄ TECHNOLOGIĄ

Streszczenie: W zdecydowanej większości prac z teorii magistral rozpatruje się stacjonarną gospodarkę ze stałą (niezmienna w czasie) technologią. Bardzo nieliczne są próby wyjścia poza „zaklęty krąg" stacjonarności i prześledzenia tzw. efektu magistrali w niestacjonarnej gospodarce Neumanna-Gale'a ze zmienną technologią. Zadanie to podjęto w artykule, w którym zaprezentowano „słabą" i „bardzo silną" wersję twierdzenia o magistrali w niestacjonarnej gospodarce von Neumanna z technologią zbieżną do pewnej technologii granicznej.

Słowa kluczowe: niestacjonarny model von Neumanna, technologia graniczna, „słabe" i „bardzo silne" twierdzenie o magistrali.

Klasyfikacja JEL: C10.

Wstęp

Aczkolwiek największe zainteresowanie ekonomistów matematycznych modelami von Neumanna-Gale'a i tzw. równowagą neumannowską przypada na drugą połowę XX wieku (por. obszerną bibliografię w pracy Panka [2011]), do chwili obecnej raz po raz pojawiają się nowe, wartościowe prace na ten temat (zob. np. Khan i Piazza [2011a, b], Khan i Zaslavski [2010], Zaslavski [2006]). Ich autorzy w zdecydowanej większości zajmują się różnymi wariantami stacjonarnej gospodarki ze stałą (niezmienną w czasie) technologią. Do bardzo nielicznych należą próby wyjścia poza „zaklęty krąg" stacjonarności i prześledzenia tzw. efektu magistrali w niestacjonarnej gospodarce typu von Neumanna-Gale'a ze zmienną technologią [Gantz 1980; Joshi 1997; Keeler 1972]. Zadanie to podejmujemy w artykule.

Nawiązując do pracy Panka [2011] oraz pracy Panka i Runki [2012] prezentujemy „słabą" i „bardzo silną" wersję twierdzenia o magistrali w niestacjonarnej gospodarce von Neumanna z technologią zbieżną do pewnej technologii granicznej. Rolę kryterium wzrostu gra wartość (mierzonej w cenach równowagi von Neumanna) produkcji wytworzonej w końcowym okresie ustalonego horyzontu $T = \{0,1,\ldots,t_1\}$.

Obowiązują oznaczenia z pracy Panka [2011].

1. Podstawowe założenia

Zakładamy, że czas t zmienia się skokowo, $t = 0,1,\ldots,t_1$. Okres końcowy t_1 informuje o długości horyzontu T. W gospodarce zużywa się i/lub wytwarza n towarów. Liczba n nie zmienia się w czasie, choć nie znaczy to, że w dowolnym okresie t wszystkie towary muszą być zużywane i/lub wytwarzane. Natomiast w każdym okresie możliwości wytwórcze gospodarki determinuje technologia produkcji, utożsamiana z pewną liczbą m tzw. bazowych procesów technologicznych tworzących wiersze neumannowskich macierzy nakładów (zużycia)

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \ldots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \ldots & a_{2n}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}(t) & a_{m2}(t) & \ldots & a_{mn}(t) \end{bmatrix}$$

i wyników (produkcji)

$$B(t) = \begin{bmatrix} b_{11}(t) & b_{12}(t) & \ldots & b_{1n}(t) \\ b_{21}(t) & b_{22}(t) & \ldots & b_{2n}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{m1}(t) & b_{m2}(t) & \ldots & b_{mn}(t) \end{bmatrix}$$

Liczba m bazowych procesów technologicznych nie zmienia się w czasie. Wiersz $a_j(t) = (a_{j1}(t), a_{j2}(t), ..., a_{jn}(t))$ macierzy $A(t)$ nazywamy wektorem nakładów (zużycia), a wiersz $b_j(t) = (b_{j1}(t), b_{j2}(t), ..., b_{jn}(t))$ macierzy $B(t)$ wektorem wyników (produkcji), którą można wytworzyć w okresie t, stosując j-ty bazowy proces technologiczny z jednostkową intensywnością. Element $a_{ji}(t) \geqq 0$ wskazuje na wielkość zużycia i-tego towaru w j-tym bazowym procesie technologicznym (prowadzonym z jednostkową intensywnością) w okresie t. Podobnie skalar $b_{ji}(t)$ informuje o wielkości produkcji i-tego towaru w okresie t w j-tym bazowym procesie technologicznym (prowadzonym z jednostkową intensywnością).

O neumannowskich macierzach nakładów $A(t)$ i wyników $B(t)$ zakładamy, że są określone dla $t = 0,1,\ldots$ oraz

(N1) $\lim_t A(t) = A \geq 0$ i każdy wiersz macierzy $A(t)$, A zawiera element dodatni (w każdym bazowym procesie technologicznym zużywany jest co najmniej jeden towar), $\lim_t B(t) = B$ i każda kolumna macierzy $B(t), B$ zawiera element dodatni (każdy towar jest wytwarzany w co najmniej jednym bazowym procesie technologicznym);

(N2) wśród bazowych procesów technologicznych $(a_j(t), b_j(t))$, $j = 1,...,m$, są procesy postaci $(e_k, 0) = ((0,...,\underset{k}{1},...,0),(0,...,0))$, $k = 1,...,n$, (warunek dopuszczający możliwość marnotrawstwa nakładów i/lub mocy produkcyjnych). Ponieważ $\lim_t A(t) = A$ oraz $\lim_t B(t) = B$, więc także graniczne macierze *A, B* zawierają wiersze postaci $(e_k, 0), k = 1,2,...,n$.

Z warunku (**N2**) wynika, że liczba bazowych procesów produkcyjnych jest większa od liczby towarów: $m > n$. O macierzach $A(t)$, $B(t)$ mówimy, że opisują technologię produkcji w gospodarce von Neumanna w okresie t, natomiast o macierzach *A, B* – że opisują technologię graniczną w gospodarce von Neumanna. Model jest liniowy w tym sensie, że jeżeli przez v oznaczymy nieujemny m-wymiarowy (wierszowy) wektor intensywności stosowania bazowych procesów technologicznych w okresie t, to w gospodarce z technologią $A(t)$, $B(t)$ z wektora nakładów $x(t) = vA(t) = \sum_{j=1}^{m} v_j a_j(t)$ można otrzymać wektor produkcji $y(t) = vB(t) = \sum_{j=1}^{m} v_j b_j(t)$. Podobnie w gospodarce z technologią graniczną *A, B* z nakładów vA otrzymujemy wektor produkcji vB.

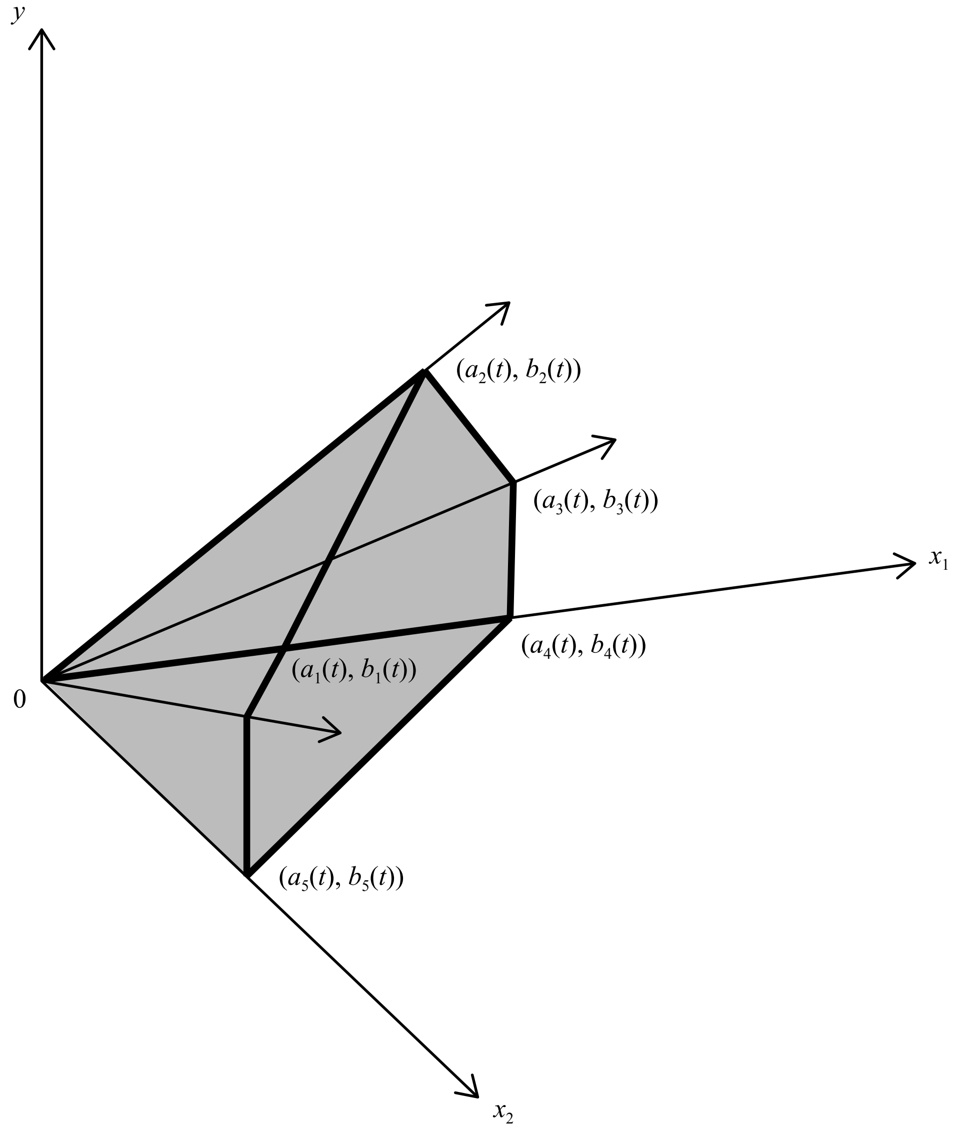
O każdej parze $\big(x(t), y(t)\big) = \big(vA(t), vB(t)\big)$ z dowolnym wektorem $v \geqq 0$ mówimy, że opisuje dopuszczalny proces produkcji w okresie t w niestacjonarnej gospodarce von Neumanna ze zmienną technologią. Natomiast o parze $(x, y) = (vA, vB)$ mówimy, że opisuje dopuszczalny proces produkcji w gospodarce von Neumanna z graniczną technologią *A, B*.

Zbiór $Z(t) = \{(x, y) \big| \, x = vA(t), y = vB(t);\ v \geqq 0\}$ nazywamy neumannowską przestrzenią produkcyjną w okresie t. Podobnie zbiór $Z = \{(x, y) \big| \, x = vA, y = vB;\ v \geqq 0\}$ nazywamy graniczną neumannowską przestrzenią produkcyjną (generowaną przez graniczną technologię *A, B*). Nietrudno zauważyć, że przestrzeń produkcyjna $Z(t)$ jest szczególnym stożkiem wielościennym w R_+^{2n} z wierzchołkiem w 0, który spełnia następujący warunek:

$$
\begin{gathered}
(x, y) \in Z(t) \ \&\ x' \geqq x \Rightarrow (x', y) \in Z(t) \\
(x, y) \in Z(t) \ \&\ 0 \leqq y' \leqq y \Rightarrow (x, y') \in Z(t)
\end{gathered}
\tag{1}
$$

Analogiczną własność ma także graniczna przestrzeń produkcyjna Z.

Stożek taki z pięcioma bazowymi procesami technologicznymi przedstawia poniższy rysunek (ze względu na konieczność zawarcia całej ilustracji w przestrzeni R^3, na rysunku nakład jest reprezentowany przez wektor dwuelementowy, $x = (x_1, x_2)$, a wynik przez skalar y).



Rysunek 1. Przestrzeń produkcyjna von Neumanna $Z(t)$ spełniająca warunki (N1), (N2)

Zakładamy, że rozwój technologii w gospodarce von Neumanna zwiększa z czasem jej możliwości wytwórcze, co w języku przestrzeni produkcyjnych $Z(t)$ prowadzi do warunku:

(N3) $\forall t\big(Z(t) \subseteq Z(t+1) \subseteq Z\big)$.

2. Technologiczna i ekonomiczna efektywność produkcji

Weźmy dowolny m-wymiarowy wektor intensywności $v \geq 0$ [1]. Liczbę:

$$\alpha_t(v) = \max\{\alpha \,|\, \alpha\, vA(t) \leqq vB(t)\} \tag{2}$$

nazywamy wskaźnikiem technologicznej efektywności procesu $(x(t), y(t)) = (vA(t), vB(t)) \in Z(t)$. Zastępując w (2) macierze $A(t)$, $B(t)$ granicznymi macierzami A, B, otrzymujemy definicję wskaźnika technologicznej efektywności procesu $(x, y) = (vA, vB) \in Z$ (w gospodarce z graniczną technologią):

$$\alpha(v) = \max\{\alpha \,|\, \alpha\, vA \leqq vB\}$$

Funkcje $\alpha_t(v)$, $\alpha(v)$ są ciągłe i dodatnio jednorodne na $R^m_+ \setminus \{0\}$ (dowód przebiega analogicznie jak dowód podobnych własności funkcji $\alpha(x, y)$ w gospodarce Gale'a ze stałą technologią; zob. Panek [2003], twierdzenie 5.2.

Liczby:

$$\alpha_{N,t} = \max_{v \geq 0} \alpha_t(v) = \max_{\substack{\alpha vA(t) \leqq B(t) \\ v \geq 0}} \alpha \tag{3}$$

$$\alpha_N = \max_{v \geq 0} \alpha(v) = \max_{\substack{\alpha vA \leqq B \\ v \geq 0}} \alpha \tag{4}$$

nazywamy odpowiednio:

- optymalnym wskaźnikiem ($\alpha_{N,t}$) technologicznej efektywności produkcji w gospodarce von Neumanna w okresie t (z technologią $A(t)$, $B(t)$),
- optymalnym wskaźnikiem (α_N) technologicznej efektywności produkcji w gospodarce von Neumanna z graniczną technologią A, B.

[1] Zapis $v \geq 0$ oznacza, że nieujemny wektor v ma co najmniej jedną współrzędną dodatnią.

□ **Twierdzenie 1.** Przy założeniach **(N1)–(N3)**:
(i) zadania (3), (4) mają rozwiązania $\overline{v}(t), \overline{v}$, tj.:

$$\exists \overline{v}(t) \geq 0 \ \left(\alpha_t \ (\overline{v}(t)) = \max_{\substack{vA(t) \leqq vB(t) \\ v \geq 0}} \alpha = \alpha_{N,t} \right)$$

$$\exists \overline{v} \geq 0 \ \left(\alpha(\overline{v}) = \max_{\substack{\alpha vA \leqq vB \\ v \geq 0}} \alpha = \alpha_N \right)$$

(2i) $\forall t \left(\alpha_{N,t} \leq \alpha_{N,t+1} \leq \alpha_N \right)$.

Dowód
(i) Funkcja $\alpha_t(v)$ jest dodatnio jednorodna stopnia 0, więc zadanie:

$$\max_{\substack{\alpha vA(t) \leqq vB(t) \\ v \geq 0}} \alpha$$

jest równoważne z zadaniem[2]:

$$\max_{\substack{v \geq 0 \\ \|v\|=1}} \alpha_t(v) \tag{5}$$

maksymalizacji ciągłej funkcji $\alpha_t(v)$ na simpleksie (zbiorze zwartym) $S_+^m(1) = \left\{ v \in R_+^m \mid \sum_i v_i = 1 \right\}$, które ma rozwiązanie $\overline{v}(t) \geq 0$. Podobnie z ciągłości funkcji $\alpha(v)$ na simpleksie $S_+^m(1)$ wynika, że istnieje rozwiązanie $\overline{v} \geq 0$ zadania:

$$\max_{\substack{v \geq 0 \\ \|v\|=1}} \alpha(v)$$

równoważne z rozwiązaniem zadania:

$$\max_{\substack{\alpha vA(t) \leqq vB(t) \\ v \geq 0}} \alpha$$

(2i) W myśl (N3) $Z \supseteq Z_{t+1} \supseteq Z_t$ i, zważywszy na definicje przestrzeni produkcyjnych $Z(t)$, Z, mamy:

---

[2] Tutaj i wszędzie dalej $\|x\| = \sum_i |x_i|$.

$$\alpha_N = \max_{v\geq 0}\alpha(v) = \max_{\substack{\alpha vA\leqq vB\\ v\geq 0}}\alpha = \max_{\substack{\alpha x\leqq y\\ (x,y)\in Z\setminus\{0\}}}\alpha \geq \max_{\substack{\alpha x\leqq y\\ (x,y)\in Z_{t+1}\setminus\{0\}}}\alpha = \max_{\substack{\alpha vA(t+1)\leqq B(t+1)\\ v\geq 0}}\alpha =$$

$$= \max_{v\geq 0}\alpha_{t+1}(v) = \alpha_{N,t+1} \geq \max_{\substack{\alpha x\leqq y\\ (x,y)\in Z(t)\setminus\{0\}}}\alpha = \max_{\substack{\alpha_t vA(t)\leqq vB(t)\\ v\geq 0}}\alpha = \max_{v\geq 0}\alpha_t(v) = \alpha_{N,t}$$

■

Wektory $\overline{v}(t),\overline{v}$ – rozwiązania zadań (3), (4) – nazywamy optymalnymi wektorami intensywności stosowania bazowych procesów, odpowiednio, w gospodarce von Neumanna z technologią $A(t),B(t)$ oraz w gospodarce z technologią graniczną *A*, *B*. Podobnie o parach wektorów:

$$(\overline{x}(t),\overline{y}(t)) = (\overline{v}(t)A(t),\overline{v}(t)B(t))$$
$$(\overline{x},\overline{y}) = (\overline{v}A,\overline{v}B)$$

mówimy, że opisują optymalne procesy produkcji, odpowiednio, w gospodarce von Neumanna z technologią *A*(*t*), *B*(*t*) oraz w gospodarce von Neumanna z technologią graniczną *A*, *B*. Optymalne wektory intensywności $\overline{v}(t),\overline{v}$ oraz odpowiadające im optymalne procesy produkcji są określane z dokładnością do mnożenia przez stałą dodatnią (z dokładnością do struktury).

Zakładamy, że wśród optymalnych procesów produkcji w gospodarce von Neumanna z graniczną technologią *A*, *B* istnieje proces, w którym wytwarzane są wszystkie towary:

(N4) $\exists\overline{v}\geq 0\left(\alpha(\overline{v}) = \alpha_N \ \&\ \overline{v}B > 0\right)$

Własność tę nazywamy warunkiem regularności.

3. Ceny von Neumanna w gospodarce z graniczną technologią. Magistrala produkcyjna

Oznaczmy przez $p\geq 0$ *n*-wymiarowy wektor (kolumnowy) cen towarów i weźmy dowolny wektor intensywności $v\geq 0$.

Liczbę:

$$\beta(v,p) = \frac{vBp}{vAp}$$

(tam, gdzie jest określona) nazywamy wskaźnikiem ekonomicznej efektywności procesu $(x,y) = (vA,vB)$ w gospodarce von Neumanna z graniczną technologią *A*, *B*.

Niech $\overline{v}$ będzie optymalnym wektorem intensywności w gospodarce von Neumanna z technologią graniczną (dla którego $\alpha(\overline{v}) = \alpha_N$).

Δ **Definicja 1.** Ceny $\overline{p} \geq 0$, przy których:

$$\beta_N = \beta(\overline{v}, \overline{p}) = \max_{v\geq 0} \beta(v, \overline{p}) = \max_{v\geq 0} \alpha(v) = \alpha(\overline{v}) = \alpha_N \tag{6}$$

nazywamy cenami von Neumanna (w gospodarce z graniczną technologią).

▲

Jeżeli spełnione są warunki (N1)–(N4), to ceny von Neumanna istnieją i są określone z dokładnością do struktury (dowód przebiega podobnie jak dowód istnienia cen von Neumanna w gospodarce ze stałą technologią; zob. Panek [2011], twierdzenie 2. O trójce $\{\alpha_N, \overline{v}, \overline{p}\}$ spełniającej warunek (6) mówimy, że charakteryzuje gospodarkę z graniczną technologią w równowadze von Neumanna.

Z (6) wynika, że:

$$\forall v \geq 0 \left(\beta(v, \overline{p}) = \frac{vB\overline{p}}{vA\overline{p}} \leq \alpha_N \right)$$

czyli:

$$\forall v \geq 0 \; \left(vB\overline{p} - \alpha_N vA\overline{p} \leq 0 \right) \tag{7}$$

i jedynie dla $v = \overline{v}$ zachodzi równość:

$$\overline{v}B\overline{p} - \alpha_N \overline{v}A\overline{p} = 0 \tag{8}$$

W gospodarce z technologią graniczną w równowadze von Neumanna dochodzi zatem do zrównania ekonomicznej efektywności produkcji z efektywnością technologiczną i jest to najwyższa efektywność jaką w ogóle może osiągnąć niestacjonarna gospodarka spełniająca warunki (N1)–(N4).

Warunek 7 jest równoważny z warunkiem[3]:

$$\forall (x, y) \in Z \; \left(\langle \overline{p}, y \rangle - \alpha_N \langle \overline{p}, x \rangle \leq 0 \right) \tag{7'}$$

[3] Tutaj i wszędzie dalej $\langle x, y \rangle = \sum_i x_i y_i$ (iloczyn skalarny wektorów x, y).

gdzie:

$$Z = \{(x, y) \mid x = vA, y = vB;\ v \geqq 0\}$$

a warunek (8) z warunkiem:

$$\langle \overline{p}, \overline{y} \rangle - \alpha_N \langle \overline{p}, \overline{x} \rangle = 0$$

dla $\overline{x} = \overline{v}A, \overline{y} = \overline{v}B$.
W celu uproszczenia dalszych wywodów będziemy zakładać, że:

(N5) Ceny von Neumanna $\overline{\boldsymbol{p}}$ są dodatnie[4].

Nietrudno zauważyć, że przy tym założeniu optymalny wektor intensywności $\overline{v}$ spełnia warunek:

$$\alpha_N \overline{v}A = \overline{v}B \tag{9}$$

Istotnie, z definicji optymalnego współczynnika α_N i optymalnego wektora intensywności $\overline{v}$ mamy:

$$\alpha_N \overline{v}A \leqq \overline{v}B \tag{10}$$

(zob. twierdzenie 1(i)). Załóżmy, że po pewnej, np. *i*-tej, współrzędnej w (10) mamy ostrą nierówność:

$$\alpha_N (\overline{v}A)_i < (\overline{v}B)_i$$

Wówczas otrzymujemy:

$$\alpha_N \overline{v}A\overline{p} < \overline{v}B\overline{p}$$

(gdyż $\overline{p} > 0$, zgodnie z **(N5)**), co przeczy (8).

Optymalnemu wektorowi intensywności $\overline{v}$ w gospodarce z graniczną technologią odpowiada optymalny wektor nakładów $\overline{x} = \overline{v}A$ oraz wyników (produkcji) $\overline{y} = \overline{v}B$ i zgodnie z (9):

$$\overline{s} = \frac{\overline{x}}{\|\overline{x}\|} = \frac{\overline{v}A}{\|\overline{v}A\|} = \frac{\alpha_N \overline{v}A}{\|\alpha_N \overline{v}A\|} = \frac{\overline{v}B}{\|\overline{v}B\|} = \frac{\overline{y}}{\|\overline{y}\|}$$

[4] Założenie to znacznie upraszcza dowody twierdzeń o magistrali (w artykule twierdzenia 3 i 4), choć nie jest konieczne.

tj. struktura nakładów i wyników w optymalnym procesie $(\overline{x},\overline{y})=(\overline{v}A,\overline{v}B)$ jest identyczna.

Δ **Definicja 2.** O wektorze $\overline{s}$ mówimy, że charakteryzuje optymalną strukturę produkcji w gospodarce von Neumanna z graniczną technologią.

▲

Promień (półprostą)

$$N=\{\lambda\overline{s}\mid\lambda>0\}$$

nazywamy magistralą produkcyjną w gospodarce von Neumanna z graniczną technologią.

4. Wzrost

Niech $v(t)$ będzie wektorem intensywności, z jaką w okresie t w niestacjonarnej gospodarce von Neumanna stosowane są bazowe procesy technologiczne. Gospodarka jest zamknięta w tym sensie, że źródłem nakładów w okresie następnym $x(t+1)=v(t+1)A(t+1)$ może być tylko produkcja wytworzona w okresie poprzednim $y(t)=v(t)B(t)$:

$$\begin{aligned} &v(t+1)A(t+1)\leqq v(t)B(t) \quad t=0,1,\ldots,t_1-1 \\ &v(t)\geq 0 \quad t=0,1,\ldots,t_1 \end{aligned} \tag{11}$$

Oznaczmy przez v^0 intensywność, z jaką bazowe procesy technologiczne są stosowane w początkowym okresie $t=0$:

$$v^0=v^0\geq 0 \tag{12}$$

Δ **Definicja 3.** Rozwiązanie $(v(t))_{t=0}^{t_1}$ układu (11)–(12) nazywamy (v^0, t_1) – dopuszczalną trajektorią intensywności (stosowania bazowych procesów technologicznych) w niestacjonarnej gospodarce von Neumanna. Ciągi $(x(t))_{t=0}^{t_1}$, $(y(t))_{t=0}^{t_1}$, gdzie:

$$x(t)=v(t)A(t)\,,\ y(t)=v(t)B(t)$$

nazywamy odpowiednio (x^0, t_1) – dopuszczalną trajektorią nakładów (z początkowym wektorem $x^0 = v^0 A(0)$) oraz $(y^0\ t_1)$ – dopuszczalną trajektorią produkcji (z początkowym wektorem $y^0 = v^0 B(0)$).

O trójce ciągów $(v(t),\ x(t),\ y(t))_{t=0}^{t_1}$ mówimy, że opisuje dopuszczalny proces wzrostu w niestacjonarnej gospodarce von Neumanna.

▲

Twierdzenia o magistrali prezentowane w tym artykule wymagają, aby istniał co najmniej jeden proces dopuszczalny $(\widetilde{v}(t), \widetilde{x}(t), \widetilde{y}(t))_{t=0}^{\breve{t}}$ umożliwiający dojście gospodarki w pewnym okresie $\breve{t}$ do magistrali. Warunek ten oznacza, że:

(N6) Istnieje taka $(v^0, \breve{t})$ – dopuszczalna trajektoria intensywności $(\widetilde{v}(t)\ _{t=0}^{\breve{t}}$, że:

$$\alpha_{\breve{t}}(\widetilde{v}(\breve{t})\ = \alpha_N$$

Mówi o tym następujące twierdzenie.

□ **Twierdzenie 2.** Jeżeli zachodzi warunek **(N6)** oraz $t_1 > \breve{t}$ to istnieje taki $(v^0,\ t_1)$ – dopuszczalny proces wzrostu $(v(t), x(t), y(t))_{t=0}^{t_1}$ oraz taka liczba $\sigma > 0$, że dla $t = \breve{t}, \breve{t}+1, ..., t_1$:

$$\alpha_t(v(t)) = \alpha_N \tag{13}$$

$$x(t) = v(t)A(t) = \alpha_N^{t-\breve{t}}\, x(\breve{t}) = \alpha_N^{t-\breve{t}}\, \sigma\overline{s} \in N \tag{14}$$

$$y(t) = v(t)B(t) = \alpha_N^{t-\breve{t}}\, y(\breve{t}) = \alpha_N^{t-\breve{t}+1} \sigma\overline{s} \in N \tag{15}$$

Dowód. Z założenia mamy taką $(v^0,\ \breve{t})$ – dopuszczalną trajektorię intensywności $(\widetilde{v}(t))_{t=0}^{\breve{t}}$, że $\alpha_{\breve{t}}(\widetilde{v}(\breve{t})) = \alpha_N$, czyli:

$$\alpha_N \widetilde{v}(\breve{t})A(\breve{t}) \leqq \widetilde{v}(\breve{t})B(\breve{t})$$

Niech $a = \widetilde{v}(\breve{t})A(\breve{t})$, $b = \widetilde{v}(\breve{t})B(\breve{t})$. Wówczas:

$$(a,b) \in Z(\breve{t}) = \{(x, y) \mid x = vA(\breve{t}), y = vB(\breve{t}); v \geqq 0\}$$

oraz

$$\alpha_N a \leqq b$$

Stąd oraz z własności (1) przestrzeni produkcyjnych $Z(t)$ wynika, że $(a, \alpha_N a) \in Z(\breve{t})$, czyli:

$$\exists v'(\breve{t}) \geq 0 \ \left(\alpha_N v'(\breve{t}) A(\breve{t}) = \alpha_N \tilde{v}(\breve{t}) A(\breve{t}) = v'(\breve{t}) B(\breve{t})\right)$$

Przyjmijmy oznaczenia[5]: $a' = v'(\breve{t}) A(\breve{t}),\ b' = v'(\breve{t}) B(\breve{t})$.
Wówczas:

$$(a', b') \in Z(\breve{t}) \text{ oraz } \alpha_N a' = b' \tag{16}$$

Utwórzmy następujący ciąg $(\xi(t))_{t=\breve{t}}^{t_1}$:

$$\xi(\breve{t}) = a' \left(= v'(\breve{t}) A(\breve{t})\right),\ \xi(\breve{t}+1) = \alpha_N a', \ldots, \xi(t_1) = \alpha_N^{t_1-\breve{t}} a'$$

Z (16), **(N3)** oraz tego, że przestrzenie produkcyjne $Z(t)$, Z są stożkami wielościennymi w R_+^{2n} z wierzchołkiem w 0 wynika, że:

$$\begin{gathered}
(\xi(\breve{t}),\ \xi(\breve{t}+1)) \in Z(\breve{t}) \subseteq Z \\
(\xi(\breve{t}+1),\ \xi(\breve{t}+2)) \in Z(\breve{t}) \subseteq Z(\breve{t}+1) \subseteq Z \\
\vdots \\
(\xi(t_1), \xi(t_1+1)) \in Z(\breve{t}) \subseteq Z(t_1) \subseteq Z
\end{gathered} \tag{17}$$

Z własności (1) przestrzeni $Z(\breve{t})$ oraz definicji ciągu $(\xi(t))_{t=\breve{t}}^{t_1}$ otrzymujemy:

$$(\xi(\breve{t}),\ \xi(\breve{t}+1)) = \left(v'(\breve{t}) A(\breve{t}), v'(\breve{t}) B(\breve{t})\right) = (a', \alpha_N a')$$

Z własnoaści (1) przestrzeni $Z(\breve{t}+1)$ oraz (17) wynika, że:

$$\begin{aligned}
\exists v'(\breve{t}+1) \geq 0 \quad (\xi(\breve{t}+1),\ \xi(\breve{t}+2)) &= \left(v'(\breve{t}+1) A(\breve{t}+1), v'(\breve{t}+1) B(\breve{t}+1)\right) = \\
&= (\alpha_N a', \alpha_N^2 a')
\end{aligned}$$

Rozumując analogicznie, dalej stwierdzamy, że dla $t = \breve{t}, \breve{t}+1, \ldots, t_1$:

$$\exists v'(t) \geq 0 \ (\xi(t),\ \xi(t+1)) = \left(\left(v'(t) A(t), v'(t) B(t)\right) = (\alpha_N^{t-\breve{t}} a', \alpha_N^{t-\breve{t}+1} a')\right)$$

---

[5] Ponieważ $v'(\breve{t}) A(\breve{t}) = \tilde{v}(\breve{t}) A(\breve{t})$, zatem *de facto* $a' = a$.

Zgodnie z taką konstrukcją ciągu $(v'(t))_{t=\breve{t}}^{t_1}$:

$$v'(\breve{t})A(\breve{t}) = \widetilde{v}(\breve{t})A(\breve{t}) = a' \leqq \widetilde{v}(\breve{t}-1)B(\breve{t}-1)$$

$$v'(\breve{t}+1)A(\breve{t}+1) = \alpha_N a' = v'(\breve{t})B(\breve{t})$$

$$\vdots$$

$$v'(t_1)A(t_1) = \alpha_N^{t_1-\breve{t}} a' = v'(t_1-1)B(t_1-1)$$

Utwórzmy ciąg $(v(t))_{t=0}^{t_1}$ ze „sklejenia" $(v^0, \breve{t})$ – dopuszczalnej trajektorii intensywności $(\widetilde{v}(t))_{t=0}^{\breve{t}}$ i wyżej zbudowanego ciągu $(v'(t))_{t=\breve{t}}^{t_1}$:

$$v(t) = \begin{cases} \widetilde{v}(t) & \text{dla } t = 0,1,\ldots,\breve{t}-1 \\ v'(t)\,\alpha_N^{t-\tau} & \text{dla } t = \breve{t},\breve{t}+1,\ldots,t_1 \end{cases}$$

Tak zbudowany ciąg jest (v^0, t_1) dopuszczalną trajektorią intensywności spełniającą dla $t = \breve{t},\breve{t}+1,\ldots,t_1$ warunek (13). Jednocześnie z inkluzji:

$$\big(v(t)A(t), v(t)B(t)\big) = (\alpha_N^{t-\breve{t}} a', \alpha_N^{t-\breve{t}+1} a') \in Z(t) \subseteq Z\,,\ t = \breve{t},\breve{t}+1,\ldots,t_1$$

wynika, że:

$$(\bar{x}, \bar{y}) = (a', \alpha_N a') \in Z$$

(gdyż Z jest stożkiem z wierzchołkiem w 0) oraz:

$$\exists \bar{v} \geq 0\ \big(\bar{x} = a' = \bar{v}A, \bar{y} = \alpha_N a' = \bar{v}B\big) \,\&\, \alpha(\bar{v}) = \alpha_N$$

Wektor $\bar{v}$ jest optymalnym wektorem intensywności w gospodarce von Neumanna z graniczną technologią, $\bar{x} = a' = \bar{v}A \in N$ jest optymalnym wektorem nakładów, a $\bar{y} = \bar{v}B \quad (= \alpha_N a') \in N$ – optymalnym wektorem produkcji w takiej gospodarce oraz:

$$\frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|} = \frac{\bar{y}}{\|\bar{y}\|} = \bar{s}$$

Z definicji magistrali $N = \{\lambda \bar{s} \mid \lambda > 0\}$ wynika, że $\exists \sigma > 0 \quad (a' = \sigma \bar{s})$. Definiując trajektorię nakładów $x(t) = v(t)A(t)$ oraz produkcji $y(t) = v(t)B(t)$ otrzymujemy żądany proces spełniający dla $t = \breve{t},\breve{t}+1,\ldots,t_1$ warunki (14), (15).

■

W celu zapewnienia jednoznaczności magistrali będziemy zakładać, że:

(N7) $$\forall v \geq 0 \left(x = vA \notin N \vee y = vB \notin N \Rightarrow \beta(v, \overline{p}) = \frac{vB\overline{p}}{vA\overline{p}} < \alpha_N \right)$$

W myśl tego warunku ekonomiczna efektywność jakiegokolwiek procesu $(x, y) =$ $= (vA, vB)$ poza magistralą jest niższa od optymalnej.

□ **Twierdzenie 3.** Jeżeli w gospodarce von Neumanna z graniczną technologią spełniony jest warunek **(N7)**, to:

$$\forall v \geq 0 \ \forall (x, y) = (vA, vB) \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \left(\left\| \frac{x}{\|x\|} - \overline{s}^x \right\| \geq \varepsilon \vee \left\| \frac{y}{\|y\|} - \overline{s}^x \right\| \geq \varepsilon \Rightarrow \right.$$
$$\left. \Rightarrow \beta(v, \overline{p}) = \frac{vB\overline{p}}{vA\overline{p}} \leq \alpha_N - \delta_\varepsilon \right)$$

■

Z dowodem tego twierdzenia można zapoznać się np. w pracy Panek [2011], twierdzenie 3. Nawiązując do tej pracy, rozpatrzymy następujące zadanie maksymalizacji wartości produkcji (mierzonej w cenach von Neumanna) wytworzonej w niestacjonarnej gospodarce w ostatnim okresie horyzontu $T = \{0,1,...,t_1\}$:

$$\max v(t_1)B(t_1)\overline{p} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} v(t+1)A(t+1) &\leqq v(t)B(t) \quad t = 0,1,\ldots,t_1 - 1 \\ v(t) &\geq 0 \qquad\qquad t = 0,1,\ldots,t_1 \\ v(0) &= v^0 \geq 0 \end{aligned} \tag{19}$$

(wektor v^0 ustalony)

Δ **Definicja 4.** Rozwiązanie $(v^*(t))_{t=0}^{t_1}$ zadania (18)–(19) nazywamy (v^0, $t_1, \overline{p}$) – optymalną trajektorią intensywności w niestacjonarnej gospodarce von Neumanna. Ciągi $(x^*(t))_{t=0}^{t_1}, (y^*(t))_{t=0}^{t_1}$, gdzie $x^*(t) = v^*(t)A(t)$, $y^*(t) = v^*(t)B(t)$, nazywamy (odpowiednio): (x^0, $t_1, \overline{p}$) – optymalną trajektorią nakładów (z początkowym wektorem nakładów $x^0 = v^0 A(0)$) oraz (y^0, $t_1, \overline{p}$) – optymalną trajektorią produkcji (z początkowym wektorem produkcji $y^0 = v^0 B(0)$). O trójce ciągów $(v^*(t), x^*(t), y^*(t))_{t=0}^{t_1}$ mówimy, że opisuje optymalny proces wzrostu w niestacjonarnej gospodarce von Neumanna.

▲

□ **Twierdzenie 4**. („Słabe" twierdzenie o magistrali).
Jeżeli niestacjonarna gospodarka von Neumanna spełnia warunki **(N1)–(N7)**, to $\forall \varepsilon > 0$, istnieje taka liczba naturalna k_ε, że liczba okresów, w których zachodzi którykolwiek z warunków:

$$\left\| \frac{x^*(t)}{\|x^*(t)\|} - \overline{s} \right\| \geq \varepsilon, \quad \left\| \frac{y^*(t)}{\|y^*(t)\|} - \overline{s} \right\| \geq \varepsilon \tag{20}$$

nie przekracza k_ε. Liczba k_ε nie zależy od długości horyzontu t_1.

Dowód. Niech $(v^*(t))_{t=0}^{t_1}$ będzie $(v^0, t_1, \overline{p})$ – optymalną trajektorią intensywności (rozwiązaniem zadania (18)–(19)).
Ponieważ:

$$\forall t \left((x^*(t), y^*(t)) = (v^*(t)A(t), v^*(t)B(t)) \in Z(t) \subset Z \right)$$

więc zgodnie z (7):

$$\langle \overline{p}, y^*(t) \rangle \leq \alpha_N \langle \overline{p}, x^*(t) \rangle \tag{21}$$

czyli:

$$v^*(t)B(t)\overline{p} \leq \alpha_N v^*(t)A(t)\overline{p} \qquad t = 0,1,\ldots,t_1$$

oraz:

$$v^*(t+1)A(t+1) \leqq v^*(t)B(t) \qquad t = 0,1,\ldots,t_1$$

(zgodnie z (19)), czyli:

$$v^*(t+1)A(t+1)\overline{p} \leq \alpha_N v^*(t)A(t)\overline{p} \qquad t = 0,1,\ldots,t_1 - 1 \tag{22}$$

Oznaczmy przez L_ε zbiór tych okresów $t \in T$, w których zachodzi którykolwiek z warunków (20). Niech l_ε będzie liczbą elementów zbioru L_ε. Wobec **(N3)**:

$$\exists v' \geq 0 \; ((x^*(t)(t)) = (v^*(t)A(t), v^*(t)B(t)) = (v'A, v'B))$$

Wtedy, zgodnie z twierdzeniem 3:

$$v^*(t)A(t)\overline{p} \leq (\alpha_N - \delta_\varepsilon)\, v^*(t)A(t)\overline{p} \qquad \text{dla} \qquad t \in L_\varepsilon \tag{23}$$

Z (22), (23) otrzymujemy:

$$v^*(t_1)A(t_1)\overline{p} \leq \alpha_N^{t_1 - l_\varepsilon}(\alpha_N - \delta_\varepsilon)^{l_\varepsilon}\, v^0 A(0)\ \overline{p} \tag{24}$$

Zgodnie z **(N6)** i twierdzeniem 2 istnieje taki (x^0, t_1) – dopuszczalny proces wzrostu $(v(t), x(t), y(t))_{t=0}^{t_1}$ i taki okres $\breve{t} < t_1$, że:

$$x(t) = v(t)A(t) = \alpha_N^{t-\breve{t}}\sigma\overline{s} \in N$$

$$y(t) = v(t)B(t) = \alpha_N^{t-\breve{t}+1}\sigma\overline{s} \in N$$

dla pewnej liczby $\sigma > 0$ i $t = \breve{t}, \breve{t}+1, ..., t_1$.
Wówczas:

$$v^*(t_1)B(t_1)\overline{p} \geq v(t_1)B(t_1)\overline{p} = \alpha_N^{t_1-\breve{t}+1}\sigma\langle\overline{p},\overline{s}\rangle > 0 \tag{25}$$

Łącząc (24), (25) (oraz pamiętając, że $v^*(t_1)B(t_1)\overline{p} \leq \alpha_N v^*(t_1)A(t_1)\overline{p}$), dochodzimy do nierówności:

$$0 < \alpha_N^{t_1-\breve{t}+1}\sigma\langle\overline{p},\overline{s}\rangle \leq v^*(t_1)B(t_1)\overline{p} \leq \alpha_N v^*(t_1)A(t_1)\overline{p} \leq$$
$$\leq \alpha_N^{t_1-l_\varepsilon}(\alpha_N - \delta_\varepsilon)^{l_\varepsilon}\, v^0 A(0)\ \overline{p}$$

która pozwala na oszacowanie górnego ograniczenia liczby l_ε:

$$l_\varepsilon \leq \frac{\ln A}{\ln\alpha_N - \ln(\alpha_N - \delta_\varepsilon)} = B$$

gdzie $A = \dfrac{\alpha_N^{\breve{t}} v^0 A(0)\overline{p}}{\sigma\langle\overline{p},\overline{s}\rangle}$. W charakterze liczby k_ε wystarczy wziąć najmniejszą liczbę naturalną większą od min $\{0,B\}$.

■

Zgodnie z powyższym twierdzeniem, optymalne procesy wzrostu w niestacjonarnej gospodarce von Neumanna „prawie zawsze” [6], niezależnie od długości

[6] To znaczy, zawsze poza pewną skończoną liczbą okresów.

horyzontu $T = \{0, 1, \ldots, t_1\}$ przebiegają w dowolnie bliskim otoczeniu magistrali produkcyjnej, którą wyznacza graniczna technologia A, B. Tempo wzrostu produkcji na magistrali jest najwyższym tempem możliwym do osiągnięcia przez gospodarkę.

Niewielkim wysiłkiem można otrzymać teraz tzw. „bardzo silną" wersję twierdzenia o magistrali w niestacjonarnej gospodarce von Neumanna.

□ **Twierdzenie 5.** („Bardzo silne" twierdzenie o magistrali).
Jeżeli niestacjonarna gospodarka von Neumanna spełnia warunki **(N1)–(N5), (N7)** i optymalny proces wzrostu $(v^*(t), x^*(t), y^*(t))_{t=0}^{t_1}$, w pewnym okresie $\breve{t} < t_1$ dochodzi do magistrali, tzn. $\alpha_{\breve{t}}(v^*(\breve{t}) = \alpha_N$, to:

$$\forall t \geq \breve{t} \left(x^*(t) = v^*(t)\ A(t) \in N \quad \text{oraz} \quad y^*(t) = v^*(t)\ B(t) \in N \right)$$

Dowód. Weźmy optymalny proces wzrostu $(v^*(t), x^*(t), y^*(t))_{t=0}^{t_1}$. Trajektoria $(v^*(t)\ _{t=0}^{t_1}$ jest rozwiązaniem zadania (18)–(19) oraz $x^*(t) = v^*(t)\ A(t)$, $y^*(t) = v^*(t)\ B(t)$. Z założenia proces ten w okresie $\breve{t} < t_1$ prowadzi do magistrali, zatem zgodnie z twierdzeniem 2 istnieje taka liczba $\sigma > 0$ oraz taki dopuszczalny proces wzrostu $(v(t), x(t), y(t))_{t=0}^{t_1}$ z trajektorią intensywności:

$$v(t) = \begin{cases} v^*(t), \text{ dla } t = 0, 1, \ldots, \breve{t} - 1 \\ v'(t), \text{ dla } t = \breve{t}, \breve{t} + 1, \ldots, t_1 \end{cases}$$

że:

$$x(t) = x^*(t) = v^*(t) A(t)$$

$$y(t) = y^*(t) = v^*(t) B(t)$$

dla $t = 0, 1, \ldots, \breve{t} - 1$, oraz:

$$x(t) = v'(t) A(t) = \alpha_N^{t - \breve{t}}\ \sigma \overline{s} \in N$$

$$y(t) = v'(t) B(t) = \alpha_N^{t - \breve{t} + 1}\ \sigma \overline{s} \in N$$

dla $t = \breve{t}, \breve{t} + 1, \ldots, t_1$. Wówczas:

$$v^*(t_1) B(t_1) \overline{p} \geq x(t_1) B(t_1) \overline{p} = \alpha_N^{t - \breve{t} + 1}\ \sigma \langle \overline{p}, \overline{s} \rangle > 0 \tag{27}$$

Z drugiej strony, postępując analogicznie jak przy dowodzie twierdzenia 4 z (22) (pamiętając, że $v^*(t_1)B(t_1)\overline{p} \le \alpha_N v^*(t_1)A(t_1)\overline{p}$), otrzymujemy:

$$v^*(t_1)B(t_1)\overline{p} \le \alpha_N v^*(t_1)A(t_1)\overline{p} \le \alpha_N^2 v^*(t_1-1)A(t_1-1)\overline{p} \le \ldots \\ \le \alpha_N^{t_1-\breve{t}+1}\, v^*(\breve{t})A(\breve{t})\overline{p} = \alpha_N^{t_1-\breve{t}+1}\, \sigma\langle \overline{p},\overline{s}\rangle \tag{28}$$

Załóżmy, że w pewnym okresie $\tau > \breve{t}\quad x^*(\tau) = v^*(\tau)A(\tau) \notin N$, tzn.:

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \left(\left\| \frac{x^*(\tau)}{\left\|x^*(t)\right\|} - \overline{s} \right\| \ge \varepsilon \vee \left\| \frac{y^*(t)}{\left\|y^*(\tau)\right\|} - \overline{s} \right\| \ge \varepsilon \right)$$

i zgodnie z twierdzeniem 3:

$$\exists \delta_\varepsilon > 0\ ((v^*(\tau+1)A(\tau+1)\overline{p} \le v^*(\tau)B(\tau)\overline{p} \le (\alpha_N - \delta_\varepsilon)v^*(\tau)A(\tau)\overline{p})) \tag{29}$$

co łącznie z (28) prowadzi do nierówności:

$$v^*(t_1)B(t_1)\overline{p} \le \alpha_N^{t_1-\breve{t}}\ (\alpha_N - \delta_\varepsilon)\ \sigma\langle \overline{p},\overline{s}\rangle \tag{30}$$

Z (27), (30) otrzymujemy warunek:

$$\alpha_N^{t_1-\breve{t}}\ (\alpha - \delta_\varepsilon)\ \sigma\langle \overline{p},\overline{s}\rangle \ge \alpha_N^{t-\breve{t}+1}\ \sigma\langle \overline{p},\overline{s}\rangle$$

z którego wynika, że $\delta_\varepsilon \le 0$.

Otrzymana sprzeczność kończy dowód twierdzenia. ■

Twierdzenie głosi, że „wejście" optymalnego procesu wzrostu na magistralę w niestacjonarnej gospodarce von Neumanna (z technologią zbieżną do pewnej technologii granicznej) jest bezpowrotne.

Uwaga 1. Jeżeli początkowy wektor intensywności v^0 w zadaniu (18)–(19) (w optymalnym procesie wzrostu) jest dodatni, wtedy obydwa twierdzenia o magistrali są prawdziwe także bez warunku **(N6)**.

Uwaga 2. Obydwa twierdzenia pozostają prawdziwe, jeżeli kryterium (18) maksymalizacji wartości produkcji mierzonej w cenach von Neumanna w ostatnim okresie horyzontu *T* zastąpimy kryterium maksymalizacji dowolnej społecznej funkcji użyteczności $u(y(t_1)) = g(\langle \overline{p}, y(t_1)\rangle)$, gdzie g jest monotonicznie rosnącą, ciągłą funkcją z R^1_+ do R^1_+ oraz $y(t_1) = v(t_1)B(t_1)$.

Uwaga 3. Wydaje się, że własności podobne do sformułowanych w twierdzeniach 4, 5 mają także optymalne procesy wzrostu w niestacjonarnej gospodarce von Neumanna z kryterium maksymalizacji łącznej wartości produkcji (mierzonej w cenach von Neumanna) wytworzonej w całym horyzoncie $T = \{0,1,...,t_1\}$ (a nie tylko w jego końcowym okresie). Wymaga to jednak dalszych badań.

Bibliografia

Gantz, D.T., 1980, *A Strong Turnpike Theorem for a Nonstationary von Neumann-Gale Production Model*, Econometrica, vol. 48, no. 7.

Joshi, S., 1997, *Turnpike Theorems in Nonconvex Nonstationary Environments*, Int. Econ. Rev., vol. 38, no. 1.

Keeler, E.B., 1972, *A Twisted Turnpike*, Int. Econ.Rev., vol. 13, no. 1.

Khan, M.A., Piazza, A., 2011a, *An Overview of Turnpike Theory: Towards the Discounted Deterministic Case*, Adv. Math. Econ., vol. 14.

Khan, M.A., Piazza, A., 2011b, *The Economics of Forestry and a Set-valued Turnpike of the Classical Type*, Nonlinear Analysis, vol. 74.

Khan, M.A., Zaslavski, A.J., 2010, *On Two Classical Turnpike Results for the Robinson--Solow-Srinivasan Model*, Asv. Math. Econ., vol. 13.

Panek, E., 2003, *Ekonomia matematyczna*, Wydawnictwo AEP, Poznań.

Panek, E., 2011, *O pewnej wersji „słabego" twierdzenia o magistrali w modelu von Neumanna*, Przegląd Statystyczny, t. 58, nr 1–2.

Panek, E., Runka, H.J., 2012, *Dwa twierdzenia o magistrali w modelu von Neumanna*, Przegląd Statystyczny, t. 59, nr 2.

Zaslavski, A.J., 2006, *Turnpike Properties in the Calculus of Variations and Optimal Control*, Springer, New York.

NON-STATIONARY VON NEUMANN MODEL WITH LIMIT TECHNOLOGY

Abstract: The vast majority of papers on the turnpike theory consider a stationary economy with constant technology (over time). There are only few attempts to go beyond the „vicious circle" of stationarity and to trace the so called turnpike effect in a non-stationary Neumann-Gale economy with unstable technology. This article undertakes this task. In the paper „weak” and „very strong” versions of the turnpike theorem in a non-stationary von Neumann economy are presented, with the technology converging to a certain technology limit.

Key words: non-stationary von Neumann model, limit technology, „weak” and „very strong” turnpike theorem.